

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ ТА МЕРЕЖ**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Основні розділи математичного аналізу

Методичні вказівки та завдання

**до практичних занять та самостійної роботи студента
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
інженерно-технічного факультету спеціальностей:**

G5 Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка

G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка

G9 Прикладна механіка

G19 Будівництво та цивільна інженерія

Укладачі: С.І. Балога, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
О.М. Гапак, канд. пед. наук, доцент;
Г.С. Тютюнникова, ст. викладач.

Рецензент: Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, зав. кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу, доцент.

Вища математика. Основні розділи математичного аналізу. Методичні вказівки і завдання до практичних занять та самостійної роботи для студентів інженерно-технічного факультету спеціальностей: G5 «Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка», G7 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка», G9 «Прикладна механіка» та G19 «Будівництво та цивільна інженерія» / уклад.: С.І. Балога, О.М. Гапак, Г.С. Тютюнникова. – Ужгород: 2025. – 88 с.

Методичні вказівки розглянуто та схвалено на засіданні кафедри комп'ютерних систем та мереж, протокол № 13 від 25 червня 2025 р. та методичної комісії інженерно-технічного факультету, протокол № 6 від 27 червня 2025 р.

Містить приклади розв'язання типових завдань з детальними поясненнями тем «Математичного аналізу» і варіанти завдань для практичних занять та самостійної роботи здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю G5 «Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка», G7 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка», G9 «Прикладна механіка» та G19 «Будівництво і цивільна інженерія».

ВСТУП

Підготовка інженера на сучасному етапі базується не тільки на засвоєнні основних розділів математики та вмінні застосовувати їх на практиці традиційним способом, але і вмінні застосовувати їх з використанням сучасних комп'ютерних технологій.

Практика викладання курсу "Вища математика" для інженерів показує, що для досягнення хороших успіхів у засвоєнні знань, одержаних на заняттях з інформатики та математики, є можливим лише при умові, коли ці дві складові поєднуються. При поєднанні цих складових спостерігається більша зацікавленість студентів у вивченні матеріалу, ніж на звичайних практичних чи лабораторних заняттях. Це зумовлено, в першу чергу, можливістю оперативного експерименту та творчого підходу при вирішенні тих чи інших конкретних завдань.

На сьогоднішній день розроблена достатня кількість пакетів прикладних програм, які дозволяють швидко і ефективно виконувати потрібні обчислення, аналітичні перетворення, графічні побудови тощо, а тому є можливість приділити більше уваги постановці задачі, побудові математичної моделі та дослідженню розв'язків, що необхідно, на нашу думку, студентам інженерних спеціальностей.

Для комп'ютерної підтримки вивчення математики ми пропонуємо використовувати універсальне математичне середовище Mathcad, правила користування яким вкрай прості, а можливості великі. В пакеті прикладних програм Mathcad інтегровані три процесори: текстовий, математичний та графічний. Середовище Mathcad містить досить широкий набір функцій та обчислювальних засобів і дозволяє робити записи функцій та математичних виразів у загальноприйнятій нотації. Зокрема, Mathcad може виконувати складні алгебраїчні перетворення й спрощення, розв'язувати алгебраїчні та трансцендентні рівняння (системи рівнянь і нерівностей), знаходити скінчені та нескінчені суми, добутки, границі, похідні, інтеграли тощо. Крім цього, Mathcad володіє вбудованою мовою програмування, яка дає змогу користувачеві запрограмувати розв'язання спеціальних задач.

Мета посібника – допомогти студенту в його самостійній роботі по розв'язуванню задач з вищої математики.

До кожної теми подаються короткі теоретичні відомості, зразки розв'язання прикладів в середовищі Mathcad та звичайним способом, вправи для самостійної роботи.

I. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

1. Побудова графіків в прямокутній системі координат

В програмі Mathcad передбачено побудову різних типів графіків, які можна розбити на дві великі групи: двовимірні (на площині) і тривимірні (в просторі). У свою чергу двовимірні графіки можна будувати в декартовій системі координат (X–Y Plot) і полярній системі координат (Polar Plot). Використовуючи тривимірну графіку можна будувати: графік тривимірної поверхні (Surface Plot); графік лінії рівня (Contour Plot); тривимірну гістограму (3D Bar Plot); тривимірну множину точок (3D Scatter Plot); векторне поле (Vector Field Plot). Зауважимо, що ділення на типи дещо умовне, оскільки керуючи установками відповідних параметрів, можна створити комбінації різних типів графіків. Більше того, всі графіки створюються майже однаково, за допомогою полицки інструментів Graph (График).

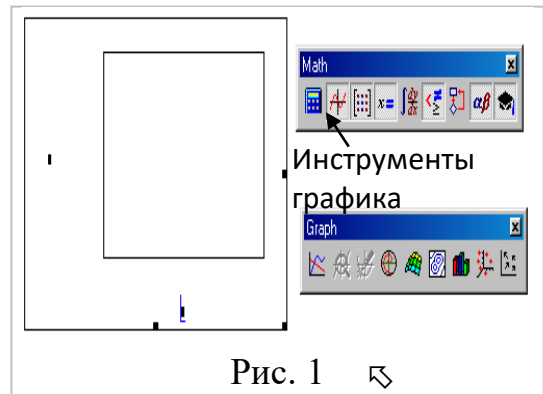


Рис. 1 ↗

Зокрема, для побудови графіка в прямокутній декартовій системі координат потрібно:

1. Розмістити курсор введення в те місце робочого листа, куди потрібно помістити рисунок.
2. Якщо на екрані відсутня полицка Graph (График), то викликати її клацнувши на кнопці із зображенням графіка (Инструменты графика), яка знаходиться на полицці Math (Математика).
3. Натиснути на полицці Graph (График) кнопку “Декартов графік” (X–Y Plot) для створення декартового графіка.
4. В результаті цих дій на робочому полі з’явиться порожня область графіка

з одним або декількома місцями для заповнення, в які вводяться імена змінних або функцій, які повинні бути зображені на графіку. При побудові графіка в декартовій системі координат два виділені місця відповідають осям x (нижнє) і y (зліва).

Якщо імена даних введені правильно, то на екрані з’явиться графік. Створений графік можна змінювати, вводячи нові дані або формувати його зовнішній вигляд.

Крім розглянутого способу, побудову графіка можна здійснити за допомогою команд головного меню **Вставка** ► **График** ► **Точка X–Y**, показаного на рис. 2, або – комбінації клавіш **Shift+2**. Аналогічним способом можна будувати графіки інших типів.

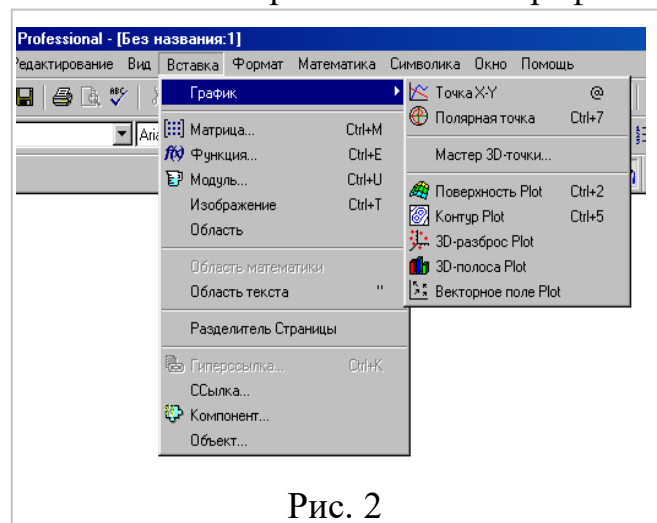


Рис. 2

Для побудови X–Y-графіків потрібно два ряди даних, які відкладаються по осях x і y . Розглянемо декілька способів побудови X–Y-графіків.

2. Побудова X–Y-графіка двох векторів

Найбільш простий і наочний спосіб побудувати графік в декартовій системі координат – це сформулювати два вектори даних, які будуть відкладені на осях x і

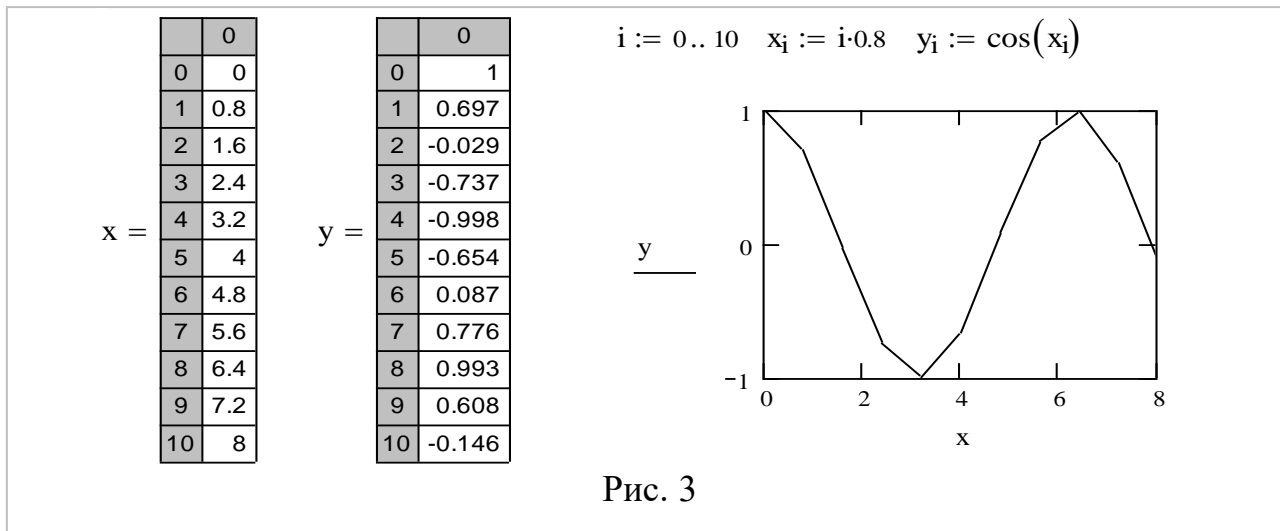


Рис. 3

y . Послідовність побудови графіка за допомогою двох векторів x і y , показана на рис. 3. Для побудови двох векторів x і y використано дискретну змінну i . Таблиця компонент векторів одержується шляхом введення імені вектора і натисненням клавіші “=”. В результаті одержується графік, утворений точками, які відповідають парам елементів векторів, з’єднаних послідовно відрізками прямих ліній.

Зауважимо, що такий самий результат можемо дістати, якщо в місця заповнення по осях введемо змінні з індексами x_i і y_i . При цьому таблиці компонент векторів виводитись не будуть.

3. Швидка побудова X–Y-графіка функції

Швидка побудова графіка будь-якої скалярної функції $y = f(x)$ полягає у введенні функції в одне із двох місцезаповнень, наприклад, $f(x)$ по осі ординат, а ім’я аргументу x – по осі абсцис (рис. 4). В результаті такої дії програма Mathcad сама буде графік функції у межах значень аргументу, які по замовчуванню змінюються від -10 до 10. Зрозуміло, що при потребі можна змінити діапазон значень аргументу і графік автоматично буде побудовано для нього.

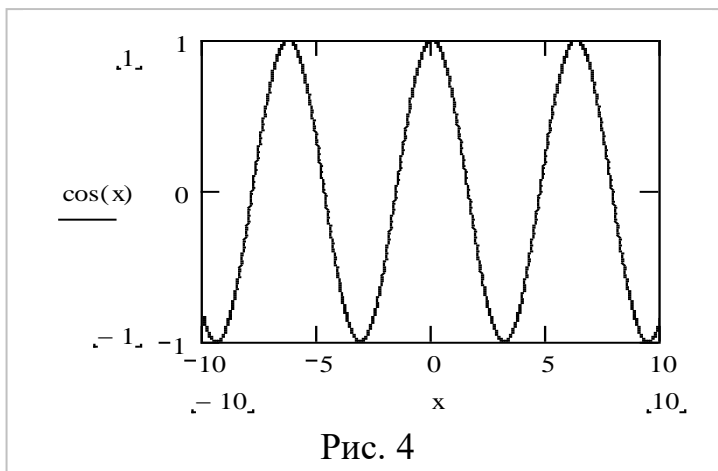
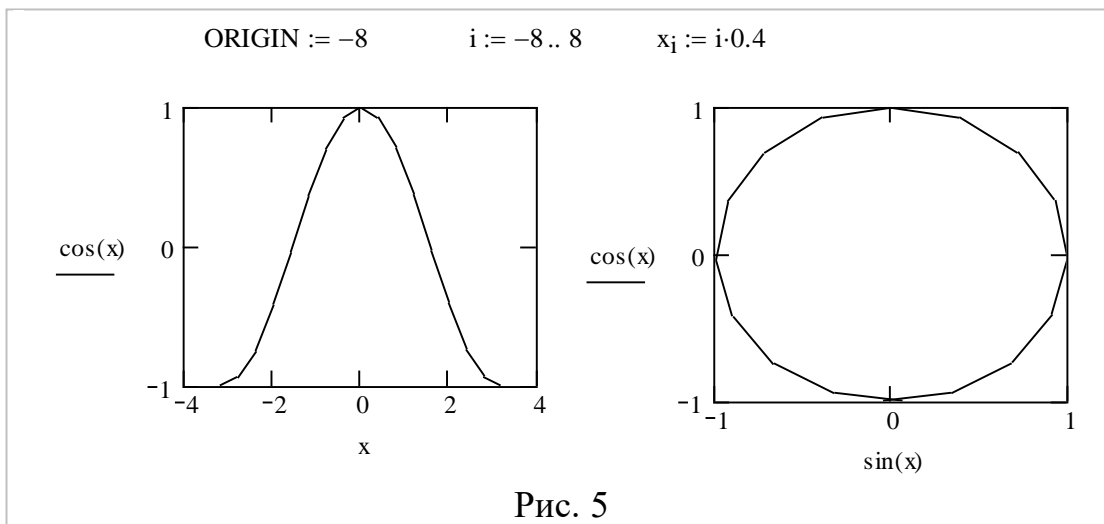


Рис. 4

Необхідно зауважити, що якщо змінній, яка є аргументом функції, було присвоєно деяке значення за допомогою дискретної змінної до побудови в

документі графіка, то замість швидкої побудови графіка буде побудований графік функції із врахуванням цього значення, тобто буде побудований графік функції від векторного аргументу. Приклади побудови двох таких графіків наведено на рис. 5.



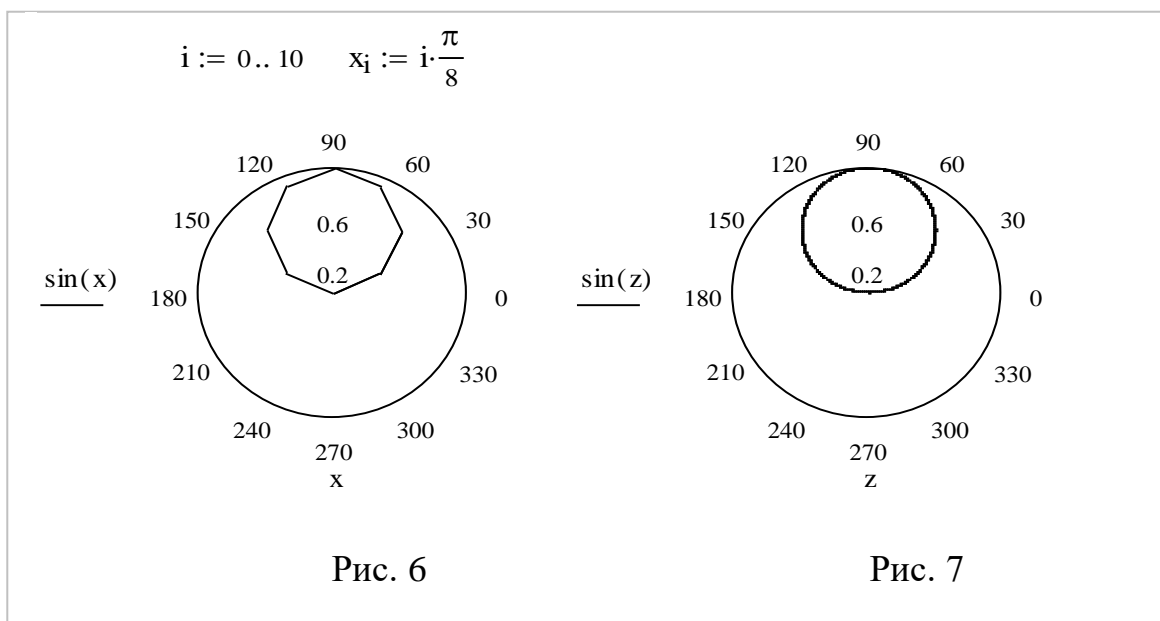
4. Побудова графіків у полярній системі координат

У полярній системі координат кожна точка задається кутом φ та модулем радіус-вектора $\rho(\varphi)$. Таким чином, рівняння $\rho = \rho(\varphi)$ або $\rho = f(\varphi)$ називається *рівнянням лінії в полярних координатах* або *полярним рівнянням*. Графік функції будується у вигляді лінії, яку описує кінець радіус-вектора при зміні кута φ у визначених межах (звичайно від 0 до 2π).

Зв'язок між прямокутними декартовими і полярними координатами задається формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{при } y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{при } y \leq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

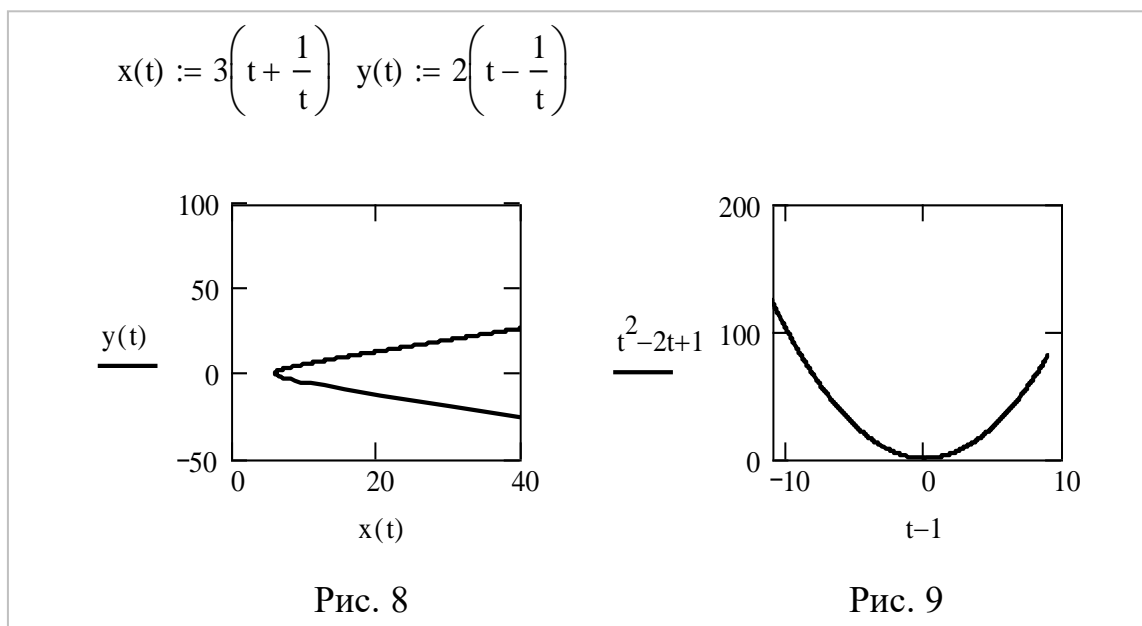
Надалі функція $y = f(x)$ (або від інших змінних) буде вважатися заданою в полярних координатах, якщо змінні x і y – полярний кут і полярний радіус, відповідно. Для побудови графіка функції, заданої в полярних координатах, необхідно натиснути кнопку Polar Plot з полицки Graph і вставити в місця заповнення імена аргументів і функцій. При цьому полярний кут (аргумент) вставляється в нижню позицію для заповнення, а полярний радіус (функція) – в ліву позицію для заповнення. Так само, як і при побудові графіків в декартовій системі координат, на осях можуть бути відкладені два вектори (рис. 6), елементи векторів і дискретних змінних у різних комбінаціях, а також може бути виконана швидка побудова графіка (рис. 7).



5. Графік функції, заданої параметрично

Якщо залежність між змінними x і y виражена через третю змінну t , тобто $x = x(t)$, $y = y(t)$, де t змінна, яка називається параметром, то кажуть, що функція задана параметрично. Графіки функцій, заданих параметрично, будуються аналогічно, як і функцій, заданих в декартовій системі координат. Але найбільш зручно будувати його заносючи у нижню позицію для заповнення функцію $x(t)$, а в ліву – функцію $y(t)$, які задаються безпосередньо або описуються як функції користувача.

Приклади побудови графіків функцій, заданих параметрично, наведено на рис. 8, 9.



Зауважимо, що на рис. 9 зображено графік функції, яка є параметричною формою явно заданої функції $y = x^2$. Дійсно, виключивши з рівнянь $x = t - 1$ і $y = t^2 - 2t + 1$ параметр t , дістанемо: $t = x + 1$, $y = (x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1$, звідки, після спрощення, матимемо $y = x^2$.

6. Побудова декількох графіків

На одному рисунку можна побудувати графіки до 16 різних залежностей. Для цього після введення чергового виразу функції, потрібно натиснути клавішу “,” і ввести вираз наступної функції.

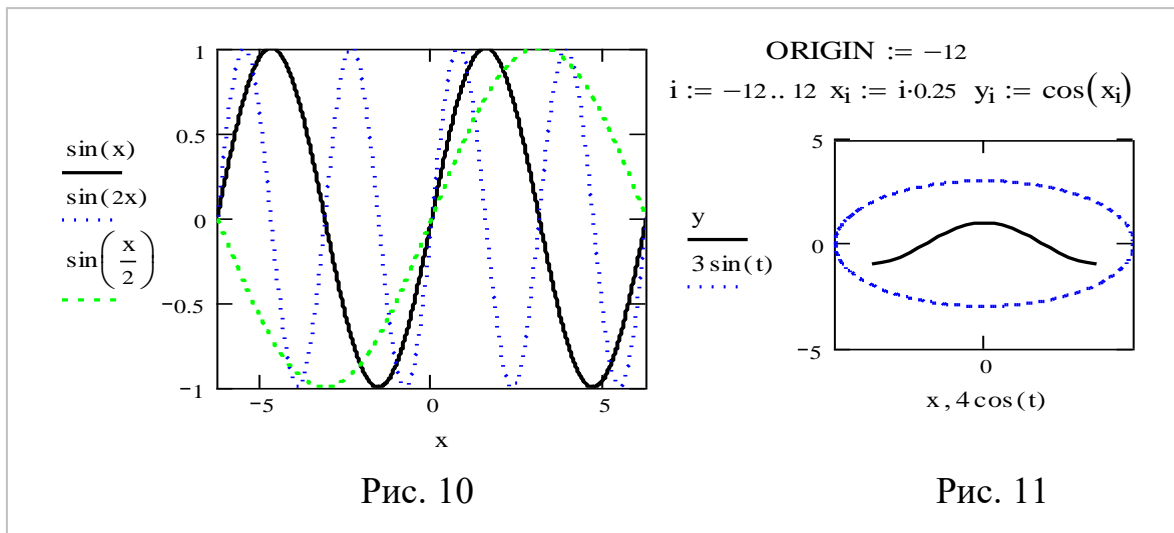


Рис. 10

Рис. 11

Описаним способом буде побудовано декілька залежностей, які відносяться до одного аргументу (рис. 10). Разом з тим, Mathcad надає можливість на одному і тому ж рисунку будувати графіки різних залежностей. Для цього достатньо ввести у відповідному порядку вирази усіх залежностей на обох осях. На рис. 11 зображено графіки двох залежностей: графік функції $y = \cos x$ і графік еліпса, заданого параметрично $x = 4 \cos t$, $y = 3 \sin t$.

7. Форматування графіків функцій

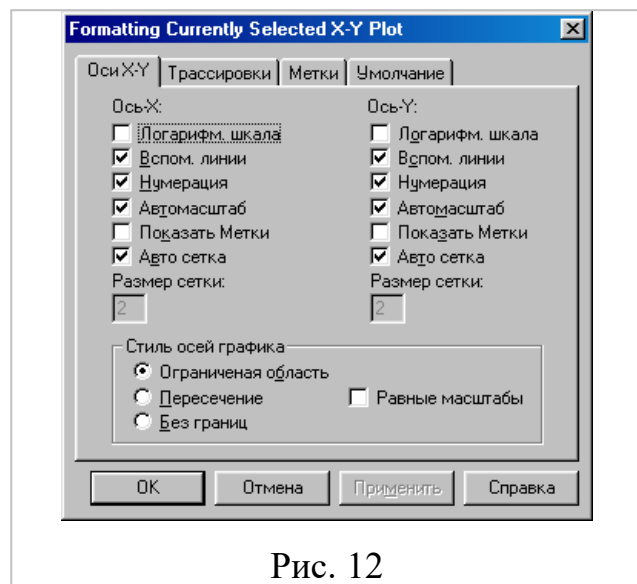


Рис. 12

Зміна діапазону осей. Коли графік будується вперше, Mathcad визначає діапазон для обох осей автоматично. Щоб змінити цей діапазон потрібно:

1. Перейти в режим редагування графіка, клацнувши в його межах лівою клавішею миші (ЛКМ). При цьому графік буде виділено, а поблизу кожної з осей з'являться два поля з числами, які задають границі діапазону. Клацнувши ЛКМ у межах

одного з полів, дістанемо можливість редагувати відповідну границю.

2. Користуючись клавішами керування курсором і клавішами “BackSpace” і “Delete” вилучаємо вміст поля і заносимо нове значення діапазону. Для одержання графіка в новому діапазоні, достатньо клацнути ЛКМ за межами графіка.

Форматування шкали. Зміна зовнішнього вигляду шкал, нанесених на координатні вісі, здійснюється за допомогою діалогових вікон для редагування шкал в декартовій і полярній системах координат (рис. 12, 13). Виклик діалогового вікна можна здійснити подвійним клацанням ЛКМ в області графіка або за допомогою команд **Формат / Графік / Точка X–Y або Полярна точка...**

Виділивши вкладку **Оси X–Y (Полярные Оси)** (рис. 12, 13), за допомогою кнопок і прапорців можна легко поміняти зовнішній вигляд кожної з осей.

За допомогою вкладки **Трассировки** (рис. 14) діалогового вікна Formatting Currently Selected X–Y Plot (Polar Plot) легко задати комбінації параметрів лінії і точок для кожного із графіків. Для цього достатньо у списку параметрів задати потрібні установки. Деякі з установок показано на рис. 13.

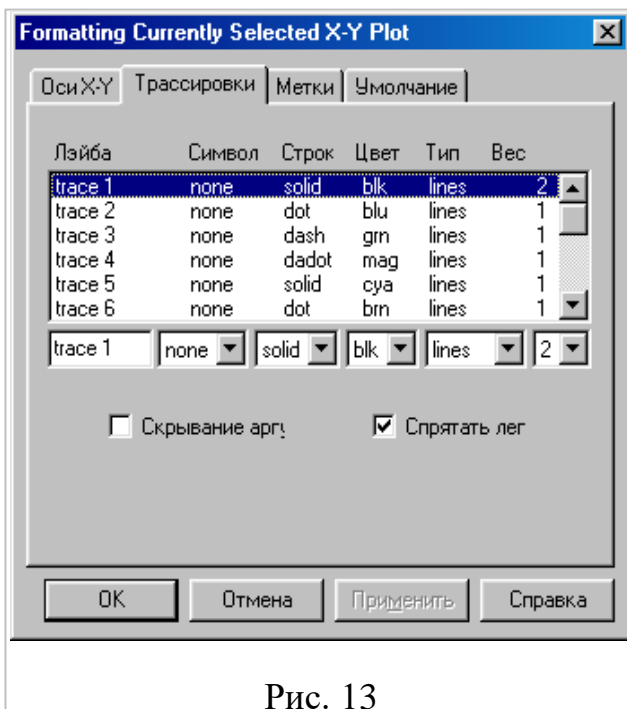


Рис. 13

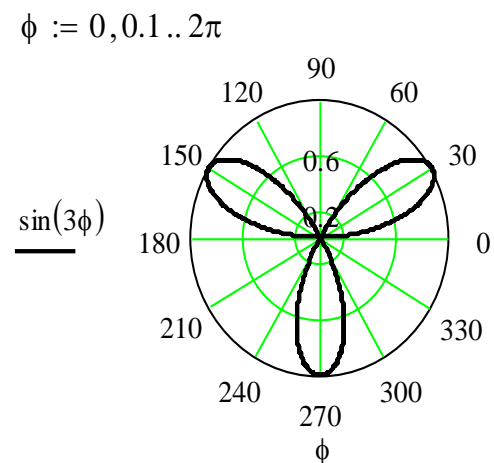


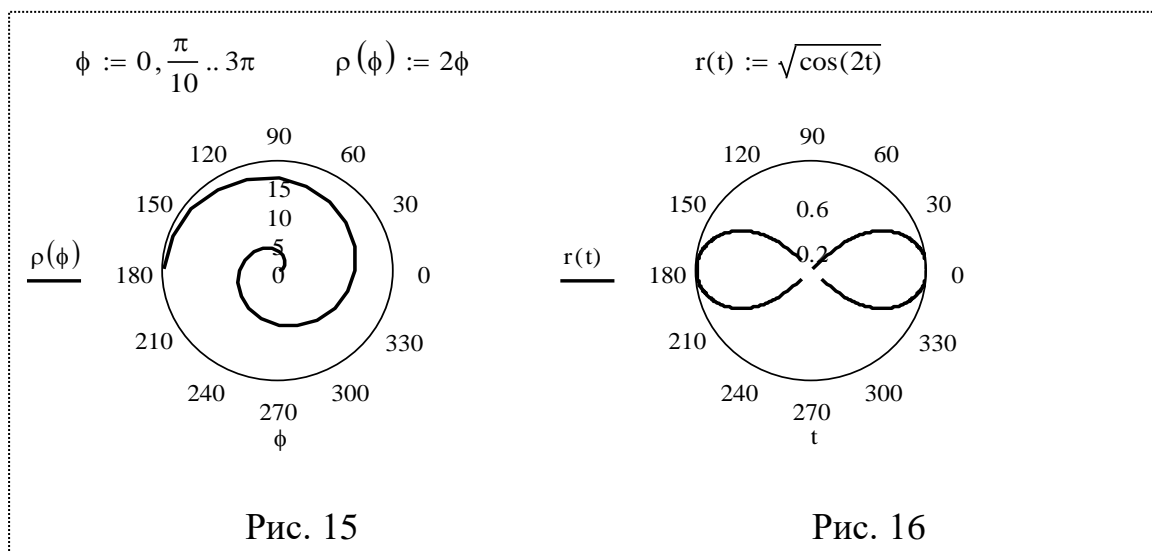
Рис.14. Графік функції – $r(\phi) = \sin(3\phi)$, де ϕ – полярний кут у межах від 0 до 2π .

8. Приклади деяких важливих кривих, заданих полярними та параметричними рівняннями

1. **Спіраль Архімеда** – лінія, яка описується точкою, що рівномірно рухається по променю, який сам рівномірно обертається навколо свого початку.

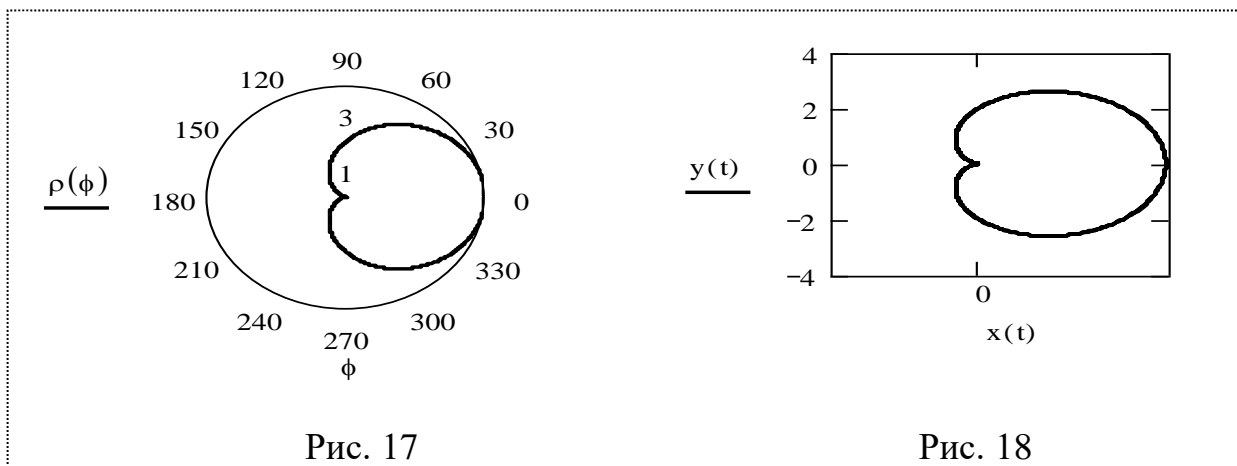
Рівняння спіралі Архімеда має вигляд $\rho = a\phi$, $a > 0$ ($r = a \cdot t$). На рис. 15 зображено спіраль Архімеда при $a = 2$, $0 \leq \phi \leq 3\pi$.

2. Лемніската Бернуллі – лінія, що задається рівнянням $\rho = a\sqrt{\cos 2\phi}$ і має вигляд вісімки. У прямокутних координатах рівняння лемніскати Бернуллі записується рівнянням вигляду $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$. На рис. 16 зображено лемніскату Бернуллі при $a = 2$.

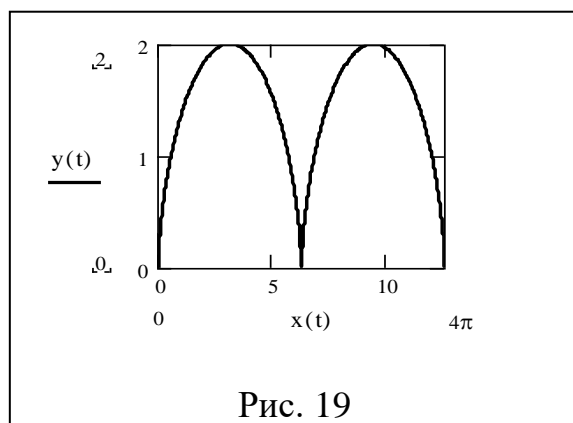


3. Равлик Паскаля – лінія, що задається рівняннями: у полярних координатах $\rho = a \cos \phi + b$; у параметричному вигляді $x = a \cos^2 t + b \cos t$, $y = a \cos t \sin t + b \sin t$ і має вигляд у залежності від a і b . Якщо $a = b$, то маємо лінію, яка *називається кардіоїдою*. На рис. 17 зображено кардіоїду у полярних координатах при $a = b = 2$, $-\pi \leq \phi \leq \pi$, а на рис. 18 – кардіоїду, задану у параметричному вигляді при $a = b = 2$, $-\pi \leq t \leq 1.3\pi$.

4. Циклоїда – лінія, яку описує довільна точка кола радіусом R , яке котиться без ковзання вздовж прямої. Якщо коло котиться вдовж прямої Ox , то циклоїда задається параметричними рівняннями: $x(t) = R(t - \sin t)$, $y(t) = R(1 - \cos t)$.



На рис. 19 зображена циклоїда при $R=1$, $0 \leq t \leq 4\pi$.



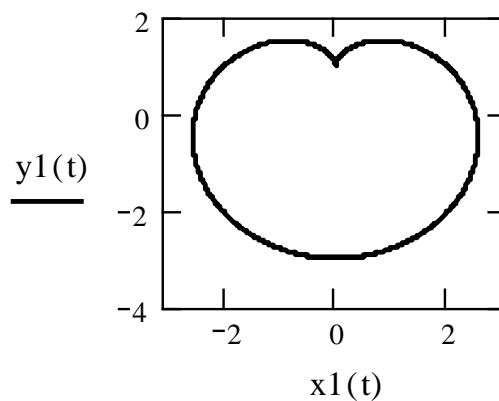
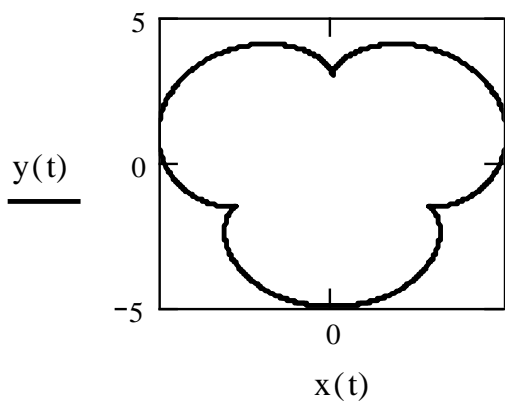
5. Епіциклоїда – лінія, яку описує довільна точка кола, під час його кочення вздовж більшого кола ззовні його. Параметричні рівняння мають вигляд:

$$x(t) = r(m+1)\sin\frac{t}{m} - r\sin\left(\frac{m+1}{m}t\right), \quad y(t) = r(m+1)\cos\frac{t}{m} - r\cos\left(\frac{m+1}{m}t\right).$$

6. Гіпоциклоїда – лінія, яку описує довільна точка кола, під час його кочення вздовж більшого кола залишаючись всередині його. Параметричні рівняння мають вигляд:

$$x(t) = r(m-1)\sin\frac{t}{m} - r\sin\left(\frac{m-1}{m}t\right), \quad y(t) = r(m-1)\cos\frac{t}{m} - r\cos\left(\frac{m-1}{m}t\right).$$

Вигляд епіциклоїди і гіпоциклоїди залежить від відношення $m = \frac{R}{r}$ – радіуса великого кола до радіуса малого кола. На рис. 20 зображена епіциклоїда при $r=1$, $m=3$, $-1.5\pi \leq t \leq 1.5\pi$, а на рис. 21 – гіпоциклоїда при $r=1$, $m=3$, $-\pi \leq t \leq \pi$.



Завдання для індивідуальної роботи

1. Побудувати графіки функцій із таблиці 1, заданих в декартовій системі координат:

Таблиця 1

№	Степеневих	Показникових	Логарифмічних
1	$y = (x - 2)^2$, $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = (x + 1)^{\frac{1}{2}}$	$y = 2^{-x+1}$, $y = 2^x - 1$	$y = \log_{0.5}(x - 1)$, $y = \log_2 x - 1$
2	$y = (x + 4)^3$, $y = x^{\frac{4}{3}}$ $y = (x - 2)^{\frac{1}{3}}$	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}$, $y = 3^x - 2$	$y = \log_{\frac{1}{3}}(x + 5)$, $y = \log_3 x - 2$
3	$y = x^2 + 2$, $y = (x - 1)^{\frac{2}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = \left(\frac{4}{5}\right)^{x-5}$, $y = \left(\frac{5}{4}\right)^x + 2$	$y = \log_{0.8}(x - 5)$, $y = \log_{\frac{5}{4}} x + 2$
4	$y = x^3 - 1$, $y = (x + 1)^{\frac{-5}{3}}$, $y = x^{-2}$	$y = 5^{-x+2}$, $y = 5^x - 2$	$y = \log_{0.2}(x - 2)$, $y = \log_5 x - 2$
5	$y = (x + 1)^4$, $y = x^{\frac{2}{3}} - 1$, $y = x^{-3}$	$y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$, $y = 4^{\frac{x}{2}} + 1$	$y = \log_{0.25}(x - 1)$, $y = \log_4 \frac{x}{2} + 1$
6	$y = x^4 - 2$, $y = (x + 3)^{\frac{3}{5}}$, $y = x^{-2} + 1$	$y = \left(\frac{5}{2}\right)^{-x+2}$, $y = \frac{5^x}{2} + 2$	$y = \log_{0.4}(x - 2)$, $y = \log_{\frac{5}{2}} x + 2$
7	$y = x^4 - 5$, $y = x^{\frac{-2}{3}} + 2$, $y = x^{\frac{-1}{2}} - 1$	$y = (0.1)^{x+4}$, $y = 10^x - 3$	$y = \log_{0.1}(x + 5)$, $y = \lg x - 3$
8	$y = (x + 3)^2 - 1$, $y = (x - 1)^{\frac{4}{3}}$, $y = x^{\frac{-1}{3}}$	$y = 10^{-(x-1)}$, $y = 10^x - 2$	$y = \log_{0.1}(x - 1)$, $y = \lg x - 2$
9	$y = (x - 1)^2 + 2$, $y = (x + 1)^{\frac{2}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{2}} + 1$	$y = \left(\frac{1}{7}\right)^{2x+4}$, $y = 7^x + 1$	$y = \log_{\frac{1}{7}}(2x + 4)$, $y = \log_7 x + 1$
10	$y = x^3 + 1$, $y = (x + 4)^{\frac{2}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}} - 5$	$y = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x+4}$, $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x - 3$	$y = \log_{\frac{2}{3}}(x - 4)$, $y = \log_{\frac{3}{2}} x - 3$

11	$y = x^4 + 2, y = (x - 1)^{\frac{5}{3}},$ $y = (x + 3)^{\frac{1}{2}}$	$y = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x}{2}+4}, y = 9^x - 3$	$y = \log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x}{2} + 4\right),$ $y = \log_9 x - 3$
12	$y = 2(x + 3)^2 - 2,$ $y = (x + 2)^{\frac{3}{2}}, y = x^{\frac{1}{4}}$	$y = 2^{-2x+4}, y = 2^x + 1$	$y = \log_{0.5}(2x - 4),$ $y = \log_2 x + 1.$

2. Тригонометричних функцій: $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x.$

3. Обернених тригонометричних функцій: $y = \arcsin x, y = \arccos x,$
 $y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x .$

4. На одному рисунку побудувати графіки функцій: $y = 2^x, y = \log_2 x$ та $y = x;$ $y = \sin x, y = \arcsin x$ та $y = x$ на відрізках $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

5. На одному рисунку побудувати графіки функцій: $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right),$
 $y = \sin x$ та $y = \sin 2x$ на відрізку $x \in [-2\pi, 2\pi]$

6. На одному рисунку побудувати графіки функцій:

$$1) y_1(x) = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, y_2(x) = -b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, y_3(x) = \frac{b}{a}x, y_4(x) = -\frac{b}{a}x;$$

$$2) y_1(x) = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}, y_2(x) = -b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}, y_3(x) = \frac{b}{a}x, y_4(x) = -\frac{b}{a}x$$

при $a = 4, b = 3.$

7. В декартовій системі координат побудувати графіки функцій, заданих параметрично:

$$1) x(t) = -1 - 2\cos(t), y(t) = 3 + 2\cos(t); 2) x(t) = 4\sin(2t), y(t) = 8\sin^2(t).$$

8. В полярній системі координат побудувати графік функції: $x(\alpha) = \alpha,$
 $y(\alpha) = \cos(2\alpha).$

9. В полярній системі координат побудувати графік функції, заданої параметрично: $x(\alpha) = \sin(\alpha), y(\alpha) = \cos(2\alpha)$ при $\alpha := 0, \frac{\pi}{30} .. 2\pi.$

II. ГРАНИЦЯ Й НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

1. Границя функції в точці і на нескінченності

Границя функції в точці. Нехай функція $y = f(x)$ задана в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 .

Число b називається *границею функції* $y = f(x)$ при x , що прямує до x_0 (або в точці x_0), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ (як завгодно малого), знайдеться таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх x , таких, що $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Це записується так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.

Односторонні границі. При дослідженні функцій корисні поняття односторонніх границь.

Число b називається *границею функції* $y = f(x)$ *справа* (зліва) при $x \rightarrow x_0$, $x > x_0$ ($x \rightarrow x_0$, $x < x_0$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, знайдеться таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x , таких, що $0 < x - x_0 < \delta$ ($0 < x_0 - x < \delta$) виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Позначають це так: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = b$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = b \right)$.

Границя функції на нескінченності. Поняття границі функції $y = f(x)$ на нескінченності тісно пов'язане з поняттям границі числової послідовності $\{x_n\}$. Якщо у випадку числової послідовності змінна n , зростаючи, приймає лише цілі значення, то у випадку границі функції змінна x , змінюючись, приймає будь-які значення.

Число b називається *границею функції* $y = f(x)$ при x , яке прямує до нескінченності ($x \rightarrow \infty$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, знайдеться таке додатне число $M > 0$ ($M = M(\varepsilon)$), що для всіх x таких, що $|x| > M$, справедлива нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

У цьому випадку границя записується так: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

Нескінченні границі. У попередніх випадках малося на увазі, що b – певне число. Іноді потрібно розглядати нескінченні границі.

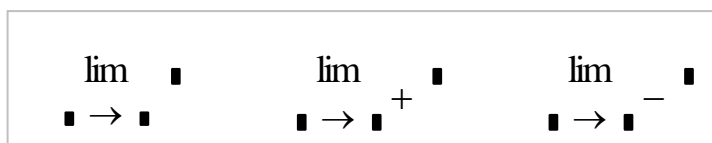
Кажуть, що функція $y = f(x)$ має своєю границею ∞ (або $+\infty$ чи $-\infty$) при $x \rightarrow x_0$, якщо для будь-якого $M > 0$, знайдеться таке додатне число $\delta > 0$, що для всіх x таких, що $|x - x_0| < \delta$, справедлива нерівність $|f(x)| > M$.

Це позначають так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \right)$.

Аналогічно можна розглядати односторонні нескінченні границі:

$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty$

В програмі Mathcad є три оператори обчислення границь: просто границі, правосторонньої і лівосторонньої границь:



Для обчислення границі потрібно: на полиці **Calculus** клацнути ЛКМ на відповідній кнопці і ввести вираз справа від слова **lim**; ввести ім'я змінної і її граничне значення; клацнути на кнопці символічного знаку дорівнює "→" і натиснути клавішу "Enter".

Завдання 1. Обчислити границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{5x + 2}{2x + 3} \right).$$

Оскільки $x \rightarrow 4$, то чисельник дробу прямує до числа $5 \cdot 4 + 2 = 22$, а знаменник – до числа $2 \cdot 4 + 3 = 11$. Тоді $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{5x + 2}{2x + 3} \right) = \frac{22}{11} = 2$.

Результат, одержаний за допомогою програми Mathcad, такий самий

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}.$$

У даному випадку чисельник і знаменник дробу при $x \rightarrow 2$ прямує до нуля (маємо невизначеність типу $0/0$). Для знаходження границі розкладемо чисельник і знаменник на множники і скоротимо дріб на $x - 2$.

Лістинг з результатами, одержаними за допомогою програми Mathcad згідно з описаним алгоритмом та безпосередньо, мають вигляд:

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}.$$

Помножимо чисельник і знаменник дробу на суму $\sqrt{x + 4} + 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + 4} - 2) \cdot (\sqrt{x + 4} + 2)}{x \cdot (\sqrt{x + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 4 - 4}{x \cdot (\sqrt{x + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + 4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Результат, одержаний за допомогою програми Mathcad, має вигляд:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \rightarrow \frac{1}{4}$$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{2x+7}$.

Чисельник і знаменник дробу необмежено зростає при $x \rightarrow \infty$. У цьому випадку говорять, що має місце невизначеність типу ∞/∞ . Розділивши чисельник і знаменник на x , одержимо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{2x+7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{x}}{2 + \frac{7}{x}} = \frac{3}{2},$$

оскільки при $x \rightarrow \infty$ кожен із дробів $\frac{5}{x}$ і $\frac{7}{x}$ прямує до нуля, тобто $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = 0$

і $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} = 0$.

Програма Mathcad дає той самий результат.

4. Для функції $f(x) = \frac{2}{x-3}$ обчислити звичайну та односторонні границі при $x \rightarrow 3$.

Користуючись програмою Mathcad, одержимо:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x-3} \rightarrow \text{undefined} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{x-3} \rightarrow -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{x-3} \rightarrow \infty$$

Як бачимо, у даному випадку звичайна границя не існує (невизначена).

2. Практичне обчислення границь

Практичне обчислення границь базується на наступній теоремі.

Теорема. Якщо кожна із функцій $f(x)$ та $g(x)$ має границю при $x \rightarrow x_0$ або при $x \rightarrow \infty$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x) = b$, то справедливі рівності:

1) $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x)$,

2) $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x)$,

3) $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x)} \left(\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x) \neq 0 \right)$.

Використовуються також границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ – перша важлива границя.

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z \rightarrow \infty} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e$ – друга важлива границя.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, $a > 0$, $a \neq 1$. Зокрема, при $a = e$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a > 0$. Зокрема, при $a = e$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = 1$.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, $\alpha \in R$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу 0/0:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$, 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{5x^2 - 8x + 3}$, 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^3 - 8}$, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 11x - 3}{x^2 - 9}$.

2. Знайти границі функцій, позбувшись ірраціональності:

1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x} - 2}$, 2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - x^2}{3 - \sqrt{5 + x}}$, 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$, 4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}$.

3. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу $[\infty/\infty]$:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 8}{x - 2}$, 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-10x^2 - 6x + 5}{5x^2 + 8x + 3}$, 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^3 - 8}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 11x - 3}{x^2 - 9}$.

4. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу $[\infty - \infty]$:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$, 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$, 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 1} - x)$, 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 9} - x)$

5. Знайти границі функцій, застосувавши першу важливу границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$, 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 2x}$, 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x^2}$, 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{3x}}{\sqrt{x}}$.

6. Знайти границі функцій, застосувавши другу важливу границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$, 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$, 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^x$, 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-4x}$.

3. Неперервність функції

Функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці** x_0 , якщо вона визначена в цій точці і нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. Функція $y = f(x)$

називається **неперервною зліва(справа)** від точки x_0 , якщо: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0) \right).$$

4. Розрив функції. Класифікація точок розриву

Використовуючи поняття неперервності функції зліва і справа, можна сказати, що функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли вона визначена в деякому околі точки x_0 і мають місце рівності:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0). \quad (1)$$

Якщо при деякому $x = x_0$ не виконується хоча б одна із умов (1), то кажуть, що функція у цій точці має **розрив**, а сама точка x_0 називається **точкою розриву функції**.

Якщо функція $y = f(x)$ не визначена в точці $x = x_0$ або визначена, але має місце співвідношення $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, то розрив в точці x_0 називається **усувним**.

В цьому випадку функцію можна довизначити або змінити її значення в точці x_0 так, щоб виконувалась рівність $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо функція $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ має скінчені одnobічні границі, але вони не рівні між собою, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, то кажуть, що функція має в точці $x = x_0$ **неусувний розрив першого роду**, а різницю $d = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ називають **стрибком функції**.

Якщо хоча б одна з одnobічних границь не існує, або дорівнює нескінченності, то кажуть, що в точці $x = x_0$ функція має **неусувний розрив другого роду**.

8. Які із наведених нижче функцій є неперервними в точці $x = 2$? У випадку розривності встановити характер розриву:

$$1) y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}; \quad 2) y = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{якщо } x \neq 2, \\ 4, & \text{якщо } x = 2; \end{cases} \quad 3) y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-2}}}.$$

Завдання для індивідуальної роботи

- Для наведених в таблиці 1 функцій та двох значень аргументів треба:
 - встановити чи буде функція неперервною у заданих точках;
 - у випадку розриву функцій встановити характер розриву, знайшовши її одnobічні границі;
 - зробити схематичний рисунок.

Таблиця 1

1	$y = 2^{\frac{1}{x-3}},$ $x_1 = 1, \quad x_2 = 3$	5	$y = 2 + \frac{1}{1-x},$ $x_1 = 1, \quad x_2 = 3;$	9	$y = \frac{5}{\frac{1}{2+3^{2-x}}},$ $x_1 = 2, \quad x_2 = 3$
2	$y = \frac{1}{x^2 + 4x - 12},$ $x_1 = 2, \quad x_2 = 3$	6	$y = \frac{1}{3} - 4^{\frac{1}{(1-x)^2}},$ $x_1 = 1, \quad x_2 = 3$	10	$y = \frac{2}{1-3^{7+x}},$ $x_1 = -7, \quad x_2 = -6$
3	$y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}},$ $x_1 = 0, \quad x_2 = 1$	7	$y = \frac{3}{3+7^{\frac{1}{x+1}}},$ $x_1 = -1, \quad x_2 = 0$	11	$y = 3^{\frac{1}{2-5x}} + 1,$ $x_1 = \frac{2}{5}, \quad x_2 = \frac{3}{10}$
4	$y = 1 - \frac{1}{(x+1)^2},$ $x_1 = -1, \quad x_2 = 3$	8	$y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1},$ $x_1 = 0, \quad x_2 = 1$	12	$y = \frac{2}{3^{\frac{1}{2x-1}}},$ $x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1$

2. Обчислити границі функції, наведених в таблиці 2.

Таблиця 2

№	a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
1	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{3x - 1}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 4}; \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - x$
2	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8x^2 + 1}{x + 3}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 8}{5 + 8x^2 - x^4}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{7}{x}\right)^{\frac{x-8}{x-1}}$
3	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x+4}}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3}{1 + 5x^2 - 2x^3}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x + 1}\right)$
4	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x - 3}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \cdot \sin(x)}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{7 + 2x^2}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)$
5	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)\sqrt{1-x}}{9-x^2};$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(mx)}{x^2}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}\right);$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{x}\right)^{\frac{2x-1}{2x+1}}$
6	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + x - 1}{2x^2 - 9x + 3}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$
7	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{x^3}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x+1}; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x - 2^x}{5^x + 2^x}$

8	$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(3x)}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{x-1} \right)^x$
9	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - x}{x-3}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{1-2x}; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 4^x}{3^x - 4^{x+1}}$
10	$\lim_{x \rightarrow 0.5} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(5x)}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{2x-1}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{3x-1}{x}}$
11	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+1} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x}{4x+3}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2}{1-x^2} + 2^{\frac{1}{x}} \right)$
12	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)\sqrt{3-x}}{4-x^2}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(mx)}{\operatorname{tg}(kx)}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{x(5-5x^2)}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x} \right)^{\frac{x+1}{x-1}}$

III. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1. Похідна функції однієї змінної

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на проміжку $X = (a, b)$ (можливо нескінченному). Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо їй довільного приросту $\Delta x \neq 0$ такого, щоб $x_0 + \Delta x \in X$. Тоді функція $y = f(x)$ в точці x_0 дістане приріст

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Означення 1. Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту цієї функції до приросту аргументу Δx , коли приріст аргументу прямує до нуля.

Позначають похідну одним із символів: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$. Отже, за означенням

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2)$$

називають **диференціальним відношенням**.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці $x \in X$, то цю похідну позначають y' , $f'(x)$ або $\frac{d}{dx}f(x)$.

Означення 2. Функцію $y = f(x)$, яка має похідну в точці x_0 , називають **диференційованою в точці x_0** . Функцію, диференційовану в кожній точці $x \in X$, називають **диференційованою на проміжку X** . Операцію відшукання похідної називають **диференціюванням**.

Приклад 1. Користуючись означенням похідної та програмою Mathcad, знайти похідні функцій: $y = x^3$, $y = \sin(x)$.

Лістинг для знаходження похідних наведено нижче:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \rightarrow 3 \cdot x^2 \qquad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \rightarrow \cos(x)$$

2. Правила диференціювання

2.1. Диференціювання суми, різниці, добутку й частки

Теорема 1. Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовані в точці $x \in X$, то функції $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ (в останньому випадку вважається, що $v(x) \neq 0$) також диференційовані в цій точці й справедливі такі рівності:

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad 2) (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'; \quad 3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

2.2. Диференціювання складної функції

Теорема 2. Нехай $y = f(\varphi(x))$ – складна функція, де $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – диференційовані функції своїх аргументів. Точніше, зовнішня функція $y = f(u)$ в точці $u = \varphi(x)$ має похідну (по u) $y'_u(u) = f'_u(u)$, а внутрішня функція $u = \varphi(x)$ у точці x – похідну (по x) $u'_x = \varphi'(x)$. Тоді складна функція $y = f(\varphi(x))$ диференційована в точці x , причому її похідна обчислюється за формулою

$$f'_x(\varphi(x)) = f'_u(u) \cdot \varphi'(x) \text{ або } y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

2.3. Похідна оберненої функції

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ – пара взаємно обернених функцій.

Теорема 3. Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна на інтервалі (a, b) і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ в довільній точці цього інтервалу, то існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка також має похідну $\varphi'(y)$, причому

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ або } y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

В програмі Mathcad є два оператори обчислення похідних: похідної першого порядку і похідної n -го порядку:

$$\frac{d}{d\blacksquare}$$

$$\frac{d^{\blacksquare}}{d\blacksquare^{\blacksquare}}$$

Для обчислення похідної потрібно: на полиці **Calculus** клацнути ЛКМ на відповідній кнопці, ввести функцію, ім'я змінної і, якщо треба, порядок похідної у відповідні знакомісця, клацнути на кнопці символічного знаку дорівнює "→" і натиснути клавішу "Enter".

Приклад 2. Користуючись програмою Mathcad, знайти похідні першого порядку від функцій: $y = \arcsin(x)$, $y = \operatorname{arctg}(x)$ і похідну другого порядку від функції $y = x^4 + 3x^2$.

Лістинг для знаходження похідних наведено нижче:

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) \rightarrow \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{atan}(x) \rightarrow \frac{1}{(1+x^2)} \quad \frac{d^2}{dx^2} (x^4 + 3x^2) \rightarrow 12 \cdot x^2 + 6$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій

	Похідна основної елементарної функції	Похідна складної елементарної функції $u = u(x)$	Частинний випадок
1	$(C)' = 0$		
2	$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \alpha \in R$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'_x, \alpha \in R$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, a > 0, a \neq 1$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'_x, a > 0, a \neq 1$	$(e^x)' = e^x$
4	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'_x, a > 0, a \neq 1$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'_x$	
6	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'_x$	
7	$(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tg u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x$	
8	$(ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctg u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x$	
9	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (x < 1)$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$	
10	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (x < 1)$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$	
11	$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\text{arctg } u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$	
12	$(\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\text{arcctg } u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$	
13	$(shx)' = chx$	$(shu)' = chu \cdot u'_x$	
14	$(chx)' = shx$	$(chu)' = shu \cdot u'_x$	
15	$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$	$(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'_x$	
16	$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$	$(cthu)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'_x$	

2.5. Похідна функції, заданої параметрично

Нехай функцію $y = f(x)$ задано параметрично: $\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta.$

Теорема 4. Припустимо, що функція $x = \varphi(t)$ на сегменті $[a, b]$ задовольняє теорему про існування похідної оберненої функції, а функція $\psi(t)$

має похідну на інтервалі (a, b) . Тоді існує похідна y'_x , яка обчислюється за формулою $y'_x = \frac{\psi'_t}{\phi'_t}$.

Приклад 3. Користуючись програмою Mathcad, знайти похідну функції, заданої параметрично: $y(t) = a \cdot \cos t$, $x(t) = a \cdot \sin t$.

Лістинг для знаходження похідних наведено нижче:

$y(t) := a \cdot \cos(t) \quad x(t) := a \cdot \sin(t)$	$\frac{\frac{d}{dt} y(t)}{\frac{d}{dt} x(t)} \rightarrow \frac{-\sin(t)}{\cos(t)}$
---	--

2.6. Похідна функції, заданої неявно

Нехай неявна функція $y = y(x)$ задана рівнянням $F(x, y) = 0$.

Теорема 5. Якщо функція $F(x, y)$ задовольняє теоремі про існування і є диференційованою за своїми змінними, то похідна $y'(x)$ обчислюється за формулою $y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

Останню формулу легко одержати, якщо ліву і праву частину рівняння $F(x, y) = 0$ продиференціювати по x , вважаючи y функцією від x , а саме $F'_x + F'_y \cdot y'(x) = 0$, і одержане рівняння розв'язати відносно $y'(x)$.

Приклад 4. Користуючись програмою Mathcad, знайти похідну функції, заданої неявно: $x^2 + y^2 - 2y + 3x - 1 = 0$.

Лістинг знаходження похідної має вигляд:

$F(x, y) := x^2 + y^2 - 2y + 3x - 1$	$\frac{\frac{d}{dx} F(x, y)}{\frac{d}{dy} F(x, y)} \rightarrow \frac{-(2 \cdot x + 3)}{(2 \cdot y - 2)}$
--------------------------------------	--

2.7. Похідна показниково-степеневі функції

Нехай потрібно знайти похідну показниково-степеневі функції вигляду $y = u^v$, де u, v – задані і диференційовані функції від x . У даному випадку похідну потрібно шукати шляхом попереднього логарифмування, а саме:

$$\ln y = v \cdot \ln u, \quad \frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u',$$

$$y' = y \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right) = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right) = u^v \cdot \ln u \cdot v' + u^{v-1} \cdot v \cdot u'.$$

Приклад 5. Користуючись програмою Mathcad, знайти похідну показниково-степеневі функції $y = x^{\sin 5x}$.

Лістинг знаходження похідної має вигляд:

$$\frac{d}{dx} \sin(5x) \rightarrow \sin(5 \cdot x) \cdot \left(5 \cdot \cos(5 \cdot x) \cdot \ln(x) + \frac{\sin(5 \cdot x)}{x} \right)$$

3. Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x , тобто існує границя

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Тоді для досить малого околу точки x має місце рівність

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Звідси $\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$, де $o(\Delta x)$ – нескінченно мала вищого порядку порівняно з Δx .

Означення 3. Диференціалом функції $y = f(x)$ у точці x називають головну, лінійну відносно Δx частину приросту функції в цій точці

$$dy = f'(x)\Delta x \quad \text{або} \quad dy = f'(x)dx. \quad (3)$$

Означення 4. Другим диференціалом $d^2 y$ або диференціалом другого порядку називається диференціал від диференціала першого порядку

$$d^2 y = d(dy) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2. \quad (4)$$

Приклад 6. Користуючись означенням та програмою Mathcad знайти диференціали першого і другого порядків функції $y = \arctg x$.

За формулами (3), (4) знаходимо: $dy = \frac{1}{1+x^2} dx$, $d^2 y = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx^2$.

Зауважимо, що за допомогою програми Mathcad диференціали можна знайти як безпосередньо, так і за допомогою функцій користувача (відповідно перший і другий стовпчики лістинга).

Звертаємо також увагу і на те, що диференціали незалежної змінної вводяться шляхом домноження похідної відповідного порядку на диференціал такого ж порядку.

Лістинг знаходження диференціалів першого і другого порядків функції $y = \arctg x$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{atan}(x) \cdot dx &\rightarrow \frac{1}{(1+x^2)} \cdot dx & dy(x, dx) &:= \frac{d}{dx} \operatorname{atan}(x) \cdot dx \rightarrow \frac{1}{(1+x^2)} \cdot dx \\ \frac{d^2}{dx^2} \operatorname{atan}(x) \cdot dx^2 &\rightarrow \frac{-2}{(1+x^2)^2} \cdot dx^2 \cdot x & d^2 y(x, dx) &:= \frac{d^2}{dx^2} \operatorname{atan}(x) \cdot dx^2 \rightarrow \frac{-2}{(1+x^2)^2} \cdot dx^2 \cdot x \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Для нижче наведених функцій знайти похідні першого порядку за правилами диференціювання та за допомогою програми Mathcad:

1) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$, 2) $y = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 3) $y = \arcsin(\sqrt[3]{2x + x})$,

4) $x + 3y = e^{3x} + e^y$, 5) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, 6) $y = (6x^2 + 7)^{\ln x}$.

2. Для нижче наведених функцій знайти похідні та диференціали першого і другого порядків як за правилами диференціювання, так і за допомогою програми Mathcad:

1) $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 7$, 2) $y = x^2 e^{5x}$, 3) $y = e^{\sin^2 7x}$.

Варіанти індивідуальних завдань

№	Знайти y'	Знайти y'	Знайти $y', dy, y'', d^2 y$
1	$y = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{x} \cos x + \frac{e^x}{x^2}$	$y = \sin \sqrt{\frac{x^2}{3} + 1}$
2	$y = x^4 + \frac{3}{x} + 2\sqrt{x}$	$y = x^2 \sin x + \frac{\ln x}{x^2}$	$y = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$
3	$y = \frac{x^5}{5} - \frac{2}{x^2} + \sqrt{x}$	$y = x^2 \operatorname{tg} x + \frac{x}{e^x}$	$y = \operatorname{tg}^4\left(\frac{x}{4}\right)$
4	$y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + x^3$	$y = (x^2 - 1) \sin x + \frac{2^x}{x}$	$y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 5x\right)^4$
5	$y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{x} + x^4$	$y = x^5(x^3 - 5) + \frac{x}{3^x}$	$y = \operatorname{tg}^4\left(\frac{x}{3}\right)$
6	$y = \frac{1}{10x^5} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + x^3$	$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + (x^3 - 1) \sin x$	$y = \sin\left(\frac{1}{x} + 3\sqrt{x}\right)$
7	$y = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} - x^4$	$y = \frac{\sin x}{x^2} + x^3(x^2 - 5)$	$y = \cos^4\left(\frac{x}{2}\right)$
8	$y = 3x - 6\sqrt{x} + \frac{2}{x^3}$	$y = \frac{2x}{\cos(x)} + x \arcsin x$	$y = \ln\left(3x + \frac{1}{\ln x}\right)$
9	$y = 6\sqrt[3]{x} - 4x^5 + \frac{1}{x^4}$	$y = \frac{2x}{x^2 + 1} + x \arccos x$	$y = \sin\left(e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)$
10	$y = 6x^2 - \sqrt[4]{x} + \frac{7}{x^3}$	$y = \frac{4x}{x^2 - 6} + x \operatorname{arctg} x$	$y = 6 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$
11	$y = x + \frac{6}{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2}$	$y = \frac{x}{2x - 1} + x \operatorname{arcctg} x$	$y = \sin^2\left(\frac{x}{4}\right)$
12	$y = x^4 - \frac{7}{x^2} - \sqrt[5]{x}$	$y = \frac{\sin 2x}{\sqrt{x^2 + 1}} + e^x \ln x$	$y = \left(\frac{1}{e^x} - 3x\right)^{10}$

IV. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

Розглянемо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$.

Теорема 1. Нехай для функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ виконуються умови:

1) функції визначені на півінтервалі $(a; b]$ і $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$;

2) в інтервалі $(a; b)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні, причому $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a; b)$;

3) існує (скінченна або нескінченна) границя $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

Тоді існує границя відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \rightarrow a$ і ця границя дорівнює також

числу K , тобто $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

Отже, границя відношення функції дорівнює границі відношення похідних від цих функцій.

Наведену теорему називають правилом Лопіталю.

Зауваження 1. Може статися, що поряд з рівностями $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ виконуються рівності $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} g'(x) = 0$. Нехай

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = K.$$

Тоді, застосовуючи двічі теорему 1, дістаємо таку рівність:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = K.$$

Взагалі, цей спосіб можна застосовувати доти, поки не прийдемо до відношення $\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, яке має при $x \rightarrow a$ деяку границю. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

У цьому випадку кажуть, що правило Лопіталю використовується n разів.

Зауваження 2. Теорема 1 при виконанні її умов справджується і тоді, коли $x \rightarrow \infty$. У цьому випадку $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Справді, застосувавши підстановку $x = \frac{1}{t}$, маємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Сформулюємо теорему Лопітала, яка стосується розкриття невизначеності вигляду $\frac{0}{0}$.

Теорема 2. Нехай для функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ виконуються умови:

1) функції визначені на півінтервалі $(a; b]$ і $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$;

2) в інтервалі $(a; b)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні, причому $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a; b)$;

3) існує (скінченна або нескінченна) границя $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

Тоді $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

Зауваження 3. Крім невизначеностей $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ є ще й інші невизначеності:

$0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$. Проте всі вони зводяться до невизначеності $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.

Справді, нехай, наприклад, маємо невизначеність $0 \cdot \infty$. Інакше кажучи, нехай маємо функції $f(x)$ і $g(x)$ такі, що $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Тоді

добуток $f(x) \cdot g(x)$ можна зобразити у вигляді частки: $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$.

Отже, у правій частині ми маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$.

Якщо маємо невизначеність $\infty - \infty$, тобто $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, то

різницю $f(x) - g(x)$ можна записати: $f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}}$.

Отже, в правій частині маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$.

Якщо маємо степінь $[f(x)]^{g(x)}$ і $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, тобто невизначеність виду 0^0 , то її розкривають так: припускаючи, що $f(x) > 0$, вираз $[f(x)]^{g(x)}$ має вигляд $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$. У показнику при $x \rightarrow a$ маємо невизначеність виду $0 \cdot \infty$, яка (це було показано вище) зводиться до

невизначеності $\frac{0}{0}$. Аналогічно невідзначеності 0^0 розкриваються невідзначеності 1^∞ , ∞^0 .

Розв'язування прикладів

Завдання. Користуючись правилом Лопітала, знайти границі функцій:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}; \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}; \quad 3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}; \quad 4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right).$$

Перевіримо виконання умов теорем Лопітала для першого прикладу.

1. Нехай $f(x) = \ln x$, $g(x) = x - 1$. Тоді $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$. Знаходимо

$$\text{похідні } f'(x) = \frac{1}{x} \text{ і } g'(x) = 1 \neq 0. \text{ Тоді } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Отже, виконуються всі три умови першої теореми Лопітала. Тому

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1.$$

Обчислимо цю границю за допомогою програми Mathcad:

$$f(x) := \ln(x) \quad g(x) := x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{\frac{d}{dx} g(x)} \rightarrow 1$$

2. Маємо невідзначеність вигляду $0 \cdot \infty$. Зводимо її до невідзначеності $\frac{0}{0}$.

Для цього запишемо $(x-1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ у вигляді

$$(x-1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \frac{x-1}{\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}} = \frac{x-1}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}.$$

Отже, дістали невідзначеність $\frac{0}{0}$. Тому

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\frac{\pi}{2 \sin^2 \frac{\pi x}{2}}} = -\frac{2}{\pi}.$$

Обчислимо цю границю за допомогою програми Mathcad:

$$f(x) := x - 1 \quad g(x) := \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{\frac{d}{dx} g(x)} \rightarrow \frac{-2}{\pi}$$

3. Маємо невизначеність 1^∞ . Тоді

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{tgx} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} tgx \ln \sin x}$$

Знайдемо границю показника:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} tgx \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{tgx}} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x = 0.$$

Тому $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{tgx} = e^0 = 1$.

Обчислимо цю границю за допомогою програми Mathcad:

$$f(x) := \ln(\sin(x)) \quad g(x) := \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{\frac{d}{dx} g(x)} \rightarrow 1$$

4. Маємо невизначеність вигляду $\infty - \infty$. Запишемо даний вираз:

$$tgx - \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x - 1}{\cos x}. \quad \text{Отримуємо невизначеність } \frac{0}{0}.$$

Отже,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(tgx - \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Обчислимо цю границю за допомогою програми Mathcad:

$$f(x) := \sin(x) - 1 \quad g(x) := \cos(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{\frac{d}{dx} g(x)} \rightarrow 0$$

Завдання для індивідуальної роботи

Користуючись правилом Лопітала обчислити границі із таблиці 1

Таблиця 1

1	$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right)^{\operatorname{ctg} 2x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^{-x}}{\ln(1 + 2x)}$
2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\sin 4x}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \cdot \operatorname{tg} x$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x - 2^x}{5^x + 2^x}$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 2} (4 - x^2) \cdot \operatorname{ctg} \pi x$	$\lim_{x \rightarrow 1-0} (\ln(1 - x))^{2 \operatorname{tg} \pi x}$
4	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{3x-1}{x}}$
5	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 4}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + 3x^2 - 1}{3x - \operatorname{tg}^2 x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-4x}$
6	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\sin(x-1)} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - \sin x}$
7	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{\ln x} \right)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 8}{5 + 8x^2 - x^4}$
8	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+1} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{5x - \operatorname{tg} 5x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$
9	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 2x^2)}{\ln(\sin x^2)}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$
10	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{x(2 - 5x)}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \cdot \sin(x)}$	$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$
11	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\ln \sin x} - \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(mx)}{x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 2} (2 - x)^{\cos \frac{\pi x}{4}}$
12	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{x^3}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1) \cdot \sin \frac{5}{x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x^2}}$

V. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

1. Геометричне застосування похідної

Якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, де α – кут, який утворює з додатнім напрямком осі Ox дотична до кривої в точці з абсцисою x_0 .

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$, де $y_0 = f(x_0)$.

Нормалью до кривої називається пряма, перпендикулярна до дотичної, яка проходить через точку дотику.

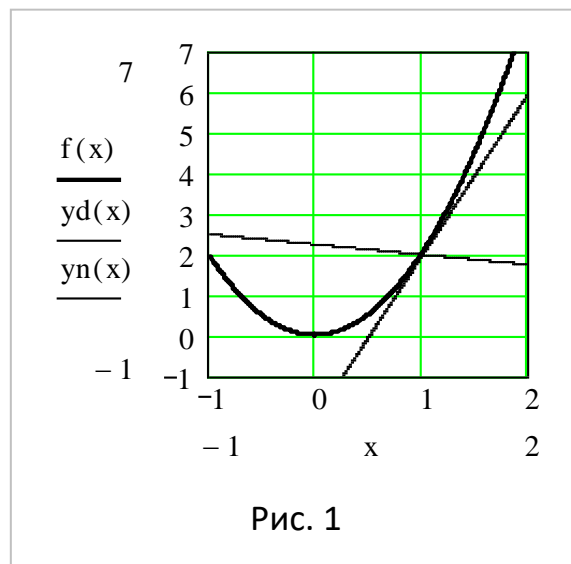
Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці дотику $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$.

Приклад 1. Користуючись програмою Mathcad, знайти рівняння дотичної і нормалі до параболи $y = 2x^2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Лістинг знаходження дотичної і нормалі має вигляд:

$$\begin{aligned} f(x) &:= 2x^2 & fl(x) &:= \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 4 \cdot x \\ x0 &:= 1 & y0 &:= f(x0) \rightarrow 2 \\ yd(x) &:= fl(x0) \cdot (x - x0) + y0 \rightarrow 4 \cdot x - 2 \\ yn(x) &:= \frac{-1}{fl(x0)}(x - x0) + y0 \rightarrow \frac{-1}{4} \cdot x + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Графік функції, дотичної і нормалі наведено на рис 1.



Приклад 2. Користуючись програмою Mathcad, знайти рівняння дотичної і нормалі до гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$, які проведені в точці $A(-9, -8)$.

Послідовність дій наведено на лістингу, а графік функції, дотичної і нормалі, наведено на рис 2.

$$F(x, y) := \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} - 1 \quad x_0 := -9 \quad y_0 := -8$$

$$f_n(x) := -\sqrt{\frac{8x^2}{9} - 8} \quad f_v(x) := \sqrt{\frac{8x^2}{9} - 8}$$

$$y_1(x, y) := -\frac{\frac{d}{dx} F(x, y)}{\frac{d}{dy} F(x, y)} \rightarrow \frac{8}{9} \cdot \frac{x}{y}$$

$$y_d(x) := y_1(x_0, y_0)(x + 9) + y_0 \rightarrow x + 1$$

$$y_n(x) := \frac{-1}{y_1(x_0, y_0)}(x - x_0) + y_0 \rightarrow -x - 17$$

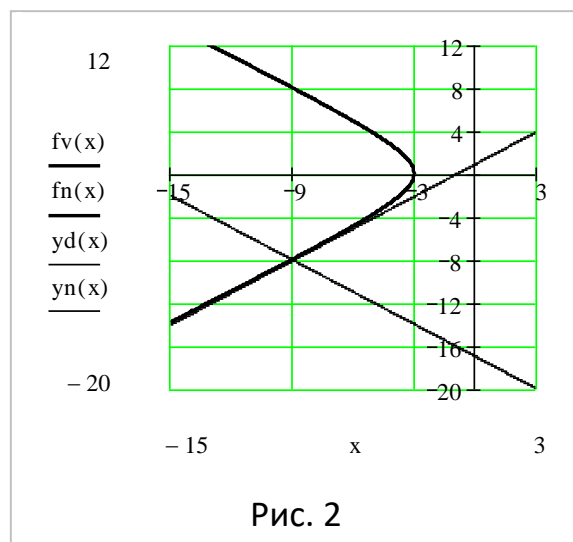


Рис. 2

2. Застосування диференціалу функції до наближених обчислень функцій

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x .

Теорема 1. Якщо $y'_x(x) = f'(x) \neq 0$, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1$, тобто Δy і dy є еквівалентними нескінченно малими.

На підставі означення диференціалу та сформульованої теореми дістанемо наближені формули:

$$\Delta y \approx dy \text{ або } f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \quad (1)$$

Якщо в рівності (1) покласти $x_0 = 0$, а $\Delta x = x$, то вона набуває вигляду

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x. \quad (2)$$

Формули (1), (2) часто використовуються для наближених обчислень.

Приклад 3. Користуючись програмою Mathcad наближено обчислити значення $\arctg(1.05)$.

Для наближеного обчислення значення $\arctg(1.05)$ скористаємось формулою (1), згідно з якою $\arctg(x_0 + \Delta x) \approx (\arctg x_0)' \cdot \Delta x + \arctg(x_0)$.

Поклавши $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.05$, одержимо

$$\arctg(1.05) \approx \frac{1}{1+1^2} \cdot 0.05 + \frac{\pi}{4} = 0.025 + 0.78539816 = 0.81039816.$$

З використанням програми Mathcad послідовність обчислень для одержання наближеного і точного значень, наведено на наступному лістингу, де $x_0 = x_0 = 1$, $x_1 = 1.05$, а $f_1(x) = f'(x)$.

$f(x) := \text{atan}(x)$	$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \frac{1}{(1+x^2)}$	
$x0 := 1$	$\Delta x := 0.05$	$x1 := 1.05$
$f_nabl(x1) := f1(x0) \cdot \Delta x + f(x0) \text{ simplify} \rightarrow .81039816339744830963$		
$f_tochne(x1) := f(x1) \rightarrow .80978357257016684662$		

Приклад 4. Користуючись формулою (2), одержати формулу для наближеного обчислення функції $f(x) = \sqrt{x+1}$ в околі точки $x=0$.

Послідовність дій, з використанням програми Mathcad, може мати вигляд

$f(x) := \sqrt{x+1}$	$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \frac{1}{2 \cdot (x+1)^{\frac{1}{2}}}$	$f_nabl(x) := f(0) + f1(0) \cdot x \rightarrow 1 + \frac{1}{2} \cdot x$
----------------------	--	--

Таким чином, маємо $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$.

3. Формула Тейлора та її застосування

Теорема 2. Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x_0 і в деякому її околі неперервні похідні до $(n+1)$ -го порядку включно, то має місце формула Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(a)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

де $R_n(x)$ – залишковий член формули Тейлора, який задається формулою

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Формулою Маклорена називається формула Тейлора при $a=0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \tilde{R}_n(x),$$

де $\tilde{R}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, а точка c знаходиться між 0 і x ($c = \theta x, 0 < \theta < 1$).

4. Розвинення в ряд (Expand to Series)

За допомогою символного процесора Mathcad є можливість одержати розвинення (розклад) функції в ряд Тейлора за степенями змінної x в околі точки $x=0$, тобто в ряд Маклорена. Для цього можна скористатись кнопкою **series** з полицки команд **symbolic**, яка має вигляд

$$\blacksquare \text{ series, } \blacksquare, \blacksquare \rightarrow$$

де перше знакомісце відводиться для функції, друге для змінної, а третє – для степеня залишкового члена, який позначається як $o(x^n)$, тобто відкидаються члени ряду, які містять x^{n+1} і вище. Наприклад, якщо ми хочемо розкласти

функцію $f(x) = e^x$ у ряд Маклорена із залишковим членом $o(x^6)$, то потрібно виконати команду **series** із параметрами: **exp(x), x, 6**. Результат виконання команди має вигляд

$$\text{exp}(x) \text{ series, } x, 6 \rightarrow 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{120} \cdot x^5$$

Для розвинення функції $y = f(x)$ в ряд Тейлора, за степенями $x - a$ необхідно розвинути функцію $y = f(x - a)$ за степенями змінної x і зробити заміну змінної x на $x - a$. Це можна зробити за допомогою двох команд: **series** і **substitute** з полицки команд **symbolic**. Команда **substitute** має вигляд

$$\blacksquare \text{ substitute, } \blacksquare = \blacksquare \rightarrow$$

де перше знакомісце відводиться для виразу, в якому потрібно зробити заміну, друге для змінної, яку треба замінити, а третє – для виразу, на який треба замінити. Наприклад, якщо ми хочемо розкласти функцію $f(x) = \ln(x)$ у ряд Тейлора за степенями $x - 1$, то потрібно розкласти функцію $\ln(x + 1)$ за степенями x , а потім за допомогою команди **substitute** замінити x на $x - 1$. Результат виконання команди має вигляд

$$\ln(x + 1) \text{ series, } x, 4 \rightarrow x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 \text{ substitute, } x = x - 1 \rightarrow x - 1 - \frac{1}{2} \cdot (x - 1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x - 1)^3$$

Отже, розклад функції $\ln(x)$ у ряд Тейлора за степенями $x - 1$ має вигляд

$$\ln(x) = x - 1 + \frac{1}{2} \cdot (x - 1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x - 1)^3.$$

Недоліком даного методу є те, що не вдається копіювати результати виконання команди для подальшої обробки. Зокрема, через це, останній результат було набрано в редакторі формул.

Щоб уникнути вказаних незручностей пропонується подати розклад функції $y = f(x)$ у ряд Тейлора в околі точки $x = a$ у вигляді функції користувача вигляду

$$F(x, a) = f(a) + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{d^i}{da^i} f(a) \right) \cdot \frac{1}{i!} (x - a)^i \right].$$

Для розкладу конкретної функції в ряд потрібно задати функцію користувача $f(x)$, значення параметрів a і n , де n – кількість членів суми може бути задано наперед або безпосередньо в сумі.

Приклад 5. Користуючись програмою Mathcad одержати розклад в ряд Тейлора функцію $f(x) = e^x$ при $n = 3$, $a = 0$ і $a = 1$.

Лістинг розв'язання задачі має вигляд:

$$\begin{array}{l} n := 3 \quad f(x) := \exp(x) \\ F(x, a) := f(a) + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{d^i}{da^i} f(a) \right) \cdot \frac{1}{i!} \cdot (x - a)^i \right] \rightarrow \exp(a) + \exp(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2} \cdot \exp(a) \cdot (x - a)^2 + \frac{1}{6} \cdot \exp(a) \cdot (x - a)^3 \end{array}$$

$$F(x,0) \rightarrow 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 \quad F(x,1) \rightarrow \exp(1) + \exp(1) \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot \exp(1) \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{6} \cdot \exp(1) \cdot (x-1)^3$$

5. Застосування диференціального числення до дослідження функцій

5.1. Монотонність функції

Означення 1. Функцію $f(x)$ називають **зростаючою (спадною)** на деякому проміжку $X = (a, b)$, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ (відповідно $f(x_1) > f(x_2)$).

Теорема 3 (достатні умови строгої монотонності). Якщо функція $f(x)$ диференційовна на проміжку X і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на X , то функція $f(x)$ є строго зростаюча (спадна) на цьому проміжку. Якщо функція $f(x)$ диференційовна на проміжку X і $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на X , то функція на цьому проміжку не спадає (не зростає).

Теорема 4 (необхідна умова зростання). Якщо диференційовна на проміжку X функція зростає (спадає), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на X .

Наприклад, функція $y = x^3$ зростає на $X = (-\infty, +\infty)$ і має похідну $y' = 3x^2 > 0$, якщо $x \neq 0$ і рівну нулю, якщо $x = 0$.

З наведених теорем випливає, що інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю (їх називають **стаціонарними точками**), або точками, де похідна не існує. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються **критичними точками** або **критичними точками першого роду**.

Отже, щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$ треба:

- 1) знайти область визначення функції;
- 2) знайти похідну даної функції.
- 3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує;
- 4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної. На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна – спадає.

Приклад 6. Знайти інтервали монотонності функції

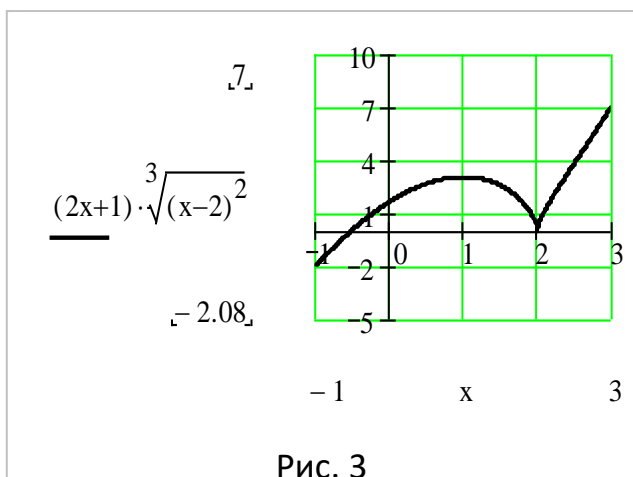
$$y = (2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$$

та побудувати її графік.

- 1) Область визначення $(-\infty, +\infty)$.

- 2) Похідна $y' = \frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x-2}}$.

- 3) Критичні точки: $x_1 = 1$ – похідна дорівнює нулю, $x_2 = 2$ – похідна не існує. Інтервали, знак похідної та



поведінку функції показано в наведеній таблиці, а графік функції на рис. 3.

x	$(-\infty; 1)$	$(1; 2)$	$(2; +\infty)$
$y'(x)$	+	-	+
$y(x)$	зростає	Спадає	зростає

5.2. Локальний екстремум функції

Означення 2. Точку x_0 називають **точкою строгого локального мінімуму (максимуму) функції $f(x)$** , якщо при всіх $x \neq x_0$ із деякого δ -околу точки x_0 виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$ (відповідно $f(x) < f(x_0)$).

Якщо в деякому δ -околі точки x_0 виконується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$ (відповідно $f(x) \leq f(x_0)$), то точку x_0 називають **точкою локального мінімуму (максимуму) функції $f(x)$** .

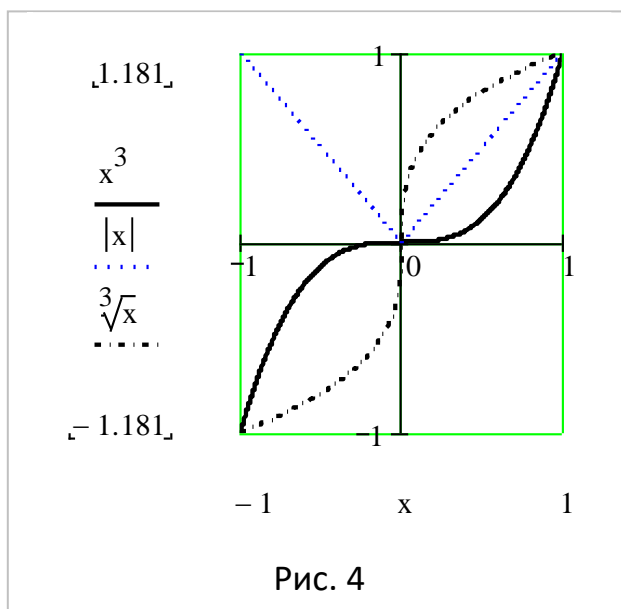
Точки локального мінімуму й локального максимуму функції називають **точками локального екстремуму**, а значення функції в цих точках називають відповідно **локальним мінімумом** і **локальним максимумом** або **локальним екстремумом**.

Теорема 4 (необхідні умови екстремуму). Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці функція диференційовна, то $f'(x_0) = 0$.

З даної теореми випливає, що не всяка точка x_0 , в якій похідна $f'(x_0) = 0$, є екстремальною точкою. Наприклад, функція $y = x^3$ має похідну $y = 3x^2$, що дорівнює нулю в точці $x = 0$, але не має в цій точці екстремуму.

Проте існують функції, які в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, функція $y = |x|$ в точці $x = 0$ має мінімум, але не має в цій точці похідної. Це не означає, що кожна точка, в якій функція не має похідної, обов'язково є точкою екстремуму. Наприклад, функція $y = \sqrt[3]{x}$ не диференційовна в точці $x = 0$ і не має в цій точці екстремуму. Графіки розглянутих функцій, наведено на рис. 2.

Теорема 5 (перша достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$, яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 , в якому функція $f(x)$ має похідну $f'(x)$, крім, можливо, точки x_0 , тоді:



1) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ похідна $f'(x) > 0$, а в інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) < 0$, то x_0 є точкою локального максимуму функції $f(x)$;

2) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ похідна $f'(x) < 0$, а в інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) > 0$, то x_0 є точкою локального мінімуму функції $f(x)$;

3) якщо в обох інтервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ і $(x_0; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак, то x_0 не є екстремальною точкою функції $f(x)$.

Зауважимо, що першу достатню умову екстремуму можна сформулювати і так:

якщо при переході зліва на право через критичну точку x_0 похідна функції $y = f(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то точка x_0 є точкою максимуму функції $y = f(x)$, а якщо з мінуса на плюс – то точкою мінімуму.

З теорем 4 і 5 випливає таке правило дослідження функції на екстремум:

Правило 1. Щоб дослідити функцію $f(x)$ на екстремум, треба:

1. Знайти стаціонарні точки заданої функції, розв'язавши рівняння $f'(x_0) = 0$, причому з розв'язків вибрати тільки дійсні і ті, які є внутрішніми точками області визначення функції.

2. Знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує (якщо критичних точок функція $f(x)$ не має, то вона не має і екстремумів).

3. Дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення знайденими критичними точками. Для цього достатньо визначити знак похідної в якій-небудь одній точці інтервалу, оскільки похідна може змінити знак лише при переході через критичну точку. Якщо $f'(x)$ при переході через критичну точку (зліва на право) змінює знак з $+$ на $-$, то ця точка є точкою максимуму. Якщо $f'(x)$ змінює знак з $-$ на $+$, то ця точка є точкою мінімуму. Якщо при переході через критичну точку знак похідної не змінюється, то розглядувана критична точка не є екстремальною точкою заданої функції.

Результати досліджень доцільно звести в таблицю.

Приклад 7. Користуючись першим правилом, дослідити на екстремум функцію $y = \sqrt[3]{x^2} e^x$.

Знаходимо похідну $f'(x) = \frac{2+3x}{3\sqrt[3]{x}} e^x$. Похідна $f'(x)$ при $x = -\frac{2}{3}$ дорівнює

нулю і не існує при $x = 0$. Отже, $x_1 = -\frac{2}{3}$ і $x_2 = 0$ – критичні точки даної функції. Визначимо знаки похідної на інтервалах неперервності:

$$f'(-1) = \frac{2-3}{\sqrt[3]{-1}} e^{-1} > 0, \quad f'\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2-1}{\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}} e^{-\frac{1}{3}} < 0, \quad f'(1) = \frac{2+3}{\sqrt[3]{1}} e^1 > 0, \quad f\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 0.4,$$

$f(0) = 0$. На основі знайдених значень складемо таблицю

x	$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	∞	$+$
$f(x)$	\nearrow	$\max \approx 0.4$	\searrow	$\min = 0$	\nearrow

Таким чином, точка $x_1 = -\frac{2}{3}$ – точка локального максимуму, а $x_2 = 0$ – точка локального мінімуму.

Теорема 6 (друга достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 – стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$. Тоді, якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального мінімуму; якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимуму.

На основі теореми 6 можна сформулювати друге правило дослідження функції на екстремум:

Правило 2. Щоб дослідити функцію $f(x)$ на екстремум, треба:

1. Знайти стаціонарні точки заданої функції. 2. Знайти похідну другого порядку в стаціонарних точках. Якщо при цьому в стаціонарній точці x_0 похідна $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 є екстремальною точкою заданої функції, а саме точкою мінімуму, якщо $f''(x_0) > 0$, і точкою максимуму, якщо $f''(x_0) < 0$.

Приклад 8. Користуючись другим правилом, дослідити на екстремум функцію $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 18x + 8$.

Знаходимо похідну першого порядку $f'(x) = 6x^2 - 30x - 84$, прирівнюємо її до нуля і розв'язуємо утворене рівняння: $6x^2 - 30x - 84 = 0$. Отже, стаціонарні точки: $x_1 = -2$, $x_2 = 7$.

Знаходимо похідну другого порядку: $f''(x) = 12x - 30$ і обчислюємо її значення в стаціонарних точках: $f''(-2) = -54 < 0$, $f''(7) = 54 > 0$. В точці $x_1 = -2$ функція має максимум $f(-2) = 100$, а в точці $x_2 = 7$ – мінімум $f(7) = -629$.

Теорема 7 (третя достатня умова локального екстремуму). Нехай в околі стаціонарної точки x_0 існує неперервна похідна $f^{(n)}(x)$, причому:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тоді: якщо n – парне і $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x)$ має в точці x_0 локальний максимум;

1) якщо n – парне і $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $f(x)$ має в точці x_0 локальний мінімум;

2) якщо n – непарне, то $f(x)$ в точці x_0 локального екстремуму не має.

Приклад 9. Користуючись теоремою 7, дослідити на екстремум функцію $f(x) = x^4$.

Знаходимо похідну першого порядку: $f'(x) = 4x^3$, прирівнюємо її до нуля і розв'язуємо утворене рівняння: $4x^3 = 0$. Звідси дістаємо одну стаціонарну точку $x = 0$. Точок, в яких похідна першого порядку не існує, немає. Знаходимо похідну другого порядку: $f''(x) = 12x^2$. Підставивши значення $x = 0$, маємо $f''(0) = 0$. Отже, друге правило тут застосувати не можна. Обчислимо похідну третього порядку: $f'''(x) = 24x$. Підставивши значення $x = 0$, матимемо $f'''(0) = 0$. Знайдемо наступну похідну: $f^{IV}(x) = 24 \neq 0$.

Отже: $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, а $f^{IV}(0) \neq 0$. Оскільки перша відмінна від нуля похідна є похідною парного порядку, то в точці $x = 0$ функція $f(x) = x^4$ має екстремум. Оскільки $f^{IV}(0) = 24 > 0$, то в цій точці функція має мінімум $f(0) = 0$.

5.3. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. Тоді, згідно з теоремою Вейерштрасса, функція на цьому відрізку досягає свого найбільшого і найменшого значень. Якщо ця функція досягає свого найбільшого (найменшого) значення на інтервалі (a, b) , то воно, очевидно, буде максимумом (мінімумом) функції $f(x)$. Але функція може досягати свого найбільшого (найменшого) значення на одному з кінців відрізка $[a, b]$. Звідси випливає таке правило знаходження точок, в яких функція набуває найбільшого (найменшого) значень.

Правило 3. Щоб знайти найбільше (найменше) значення неперервної функції на відрізку $[a, b]$, треба знайти усі локальні максимуми (мінімуми) і порівняти їх зі значеннями функції, яких вона набуває на кінцях відрізка. Найбільше (найменше) число серед знайдених чисел і буде найбільшим (найменшим) значення функції на відрізку $[a, b]$.

Приклад 10. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на відрізку $[-2; 2,5]$.

Знаходимо стаціонарні точки. Для цього обчислимо похідну $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$. Прирівнюючи цю похідну до нуля і розв'язуючи рівняння $6x^2 - 6x - 12 = 0$, дістанемо стаціонарні точки: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Точок, в яких похідна не існує, немає.

Обчислимо значення функції в точках x_1 , x_2 , а також на кінцях відрізка, тобто в точках: $x_3 = -2$, $x_4 = 2,5$. Маємо

$$f(-1) = 8, \quad f(2) = -19, \quad f(-2) = -3, \quad f(2,5) = -16,5.$$

Таким чином, найменше значення $f(2) = -19$, а найбільше – $f(-1) = 8$.

5.4. Опуклість та угнутість графіка. Точки перегину

Означення 3. Крива $y = f(x)$ називається опуклою (угнутою) на інтервалі (a, b) , якщо усі точки графіка функції лежать нижче (вище) точок її дотичних на цьому інтервалі.

Теорема 8. Якщо в усіх точках інтервалу (a, b) друга похідна $f''(x) > 0$, то крива $y = f(x)$ є угнутою на цьому інтервалі; якщо $f''(x) < 0$ на інтервалі (a, b) то крива опукла на цьому інтервалі.

Означення 4. Точкою перегину графіка неперервної функції називається точка, яка розділяє інтервали, в яких функція опукла і угнута.

Правило 4. Точка $x = x_0$ буде точкою перегину кривої $y = f(x)$, якщо: $f''(x_0) = 0$ або не існує, а знаки $f''(x)$ зліва ($x < x_0$) та справа ($x > x_0$) різні.

Приклад 11. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривої $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$.

Знаходимо похідні першого та другого порядків:
 $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$, $f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$.

Прирівнюємо $f''(x)$ до нуля: $36x^2 - 48x + 12 = 0$. Звідси знаходимо корені:
 $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

В інтервалах $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(1; +\infty)$ похідна $f''(x) > 0$, а в інтервалі $(\frac{1}{3}; 1)$ похідна $f''(x) < 0$. Тому в інтервалах $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(1; +\infty)$ крива вгнута, а в інтервалі $(\frac{1}{3}; 1)$ – опукла. Точки $(\frac{1}{3}; \frac{335}{27}) \approx (0,33; 12,41)$, $(1; 13)$ – точки перегину кривої (рис. 3).

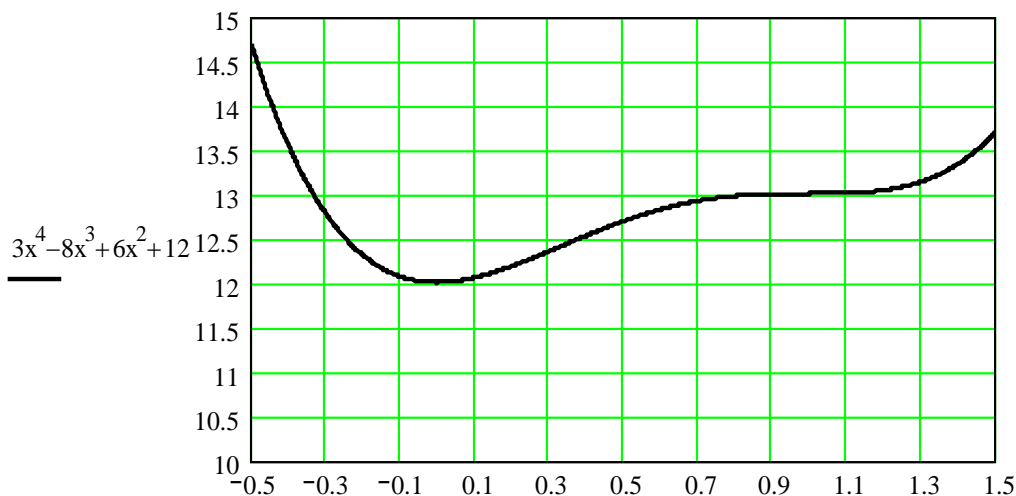


Рис. 5

5.5. Асимптоти кривої

Означення 5. Пряму лінію називають асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань точки M кривої від цієї прямої прямує до нуля при віддалені точки M в нескінченість.

Асимптоти бувають вертикальні, горизонтальні та похилі.

Пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою, якщо хоча б одна із границь

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty \text{ або } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty.$$

Якщо лише $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = b$ або $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = b$, то функція має лише односторонню асимптоту.

Пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою, якщо $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$. Рівняння похилої асимптоти має вигляд $y = kx + b$, де k і b – коефіцієнти, які обчислюються за формулами: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$.

Приклад 12. Користуючись програмою Mathcad знайти асимптоти кривої $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 1}{x}$.

Знайдемо вертикальні асимптоти. Оскільки $f(x)$ не визначена в точці $x = 0$ і

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x} \rightarrow \infty \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x} \rightarrow -\infty$$

то $x = 0$ – вертикальна асимптота.

Знайдемо похилу асимптоту

$$k := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x \cdot x} \rightarrow 2 \quad b := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x} - k \cdot x \rightarrow 5 \quad y := k \cdot x + b \rightarrow 2 \cdot x + 5$$

Таким чином, дана крива має дві асимптоти: $x = 0$ і $y = 2x + 5$.

5.6. Схема дослідження функції та побудова її графіка

Найбільш наочне уявлення про зміну функції дає її графік. Тому побудова графіка є заключним етапом дослідження функції, на якому використовуються усі результати її дослідження.

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік треба:

1. Знайти область існування функції.
2. Знайти, якщо це можна, точки перетину графіка функції з координатними осями. Для цього треба розв'язати дві системи рівнянь

$$\begin{cases} y = f(x); \\ y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = f(x); \\ x = 0, \end{cases}$$

Перша дає точку перетину з віссю Ox , а друга – з віссю Oy .

3. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.
4. Знайти точки розриву і дослідити їх.
5. Знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках.
6. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину.
7. Знайти асимптоти кривої.
8. Побудувати графік функції.

Приклад 13. Дослідити та побудувати графік функції $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

Досліджувана функція визначена і неперервна для всіх значень x , крім $x = 1$. Функція не є ні парною, ні непарною. Її графік не має точок перетину з віссю Ox , оскільки $x^2 + 1 > 0$.

Далі, за допомогою програми Mathcad, знайдемо вертикальні асимптоти. Для цього знайдемо границі:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \rightarrow \infty$$

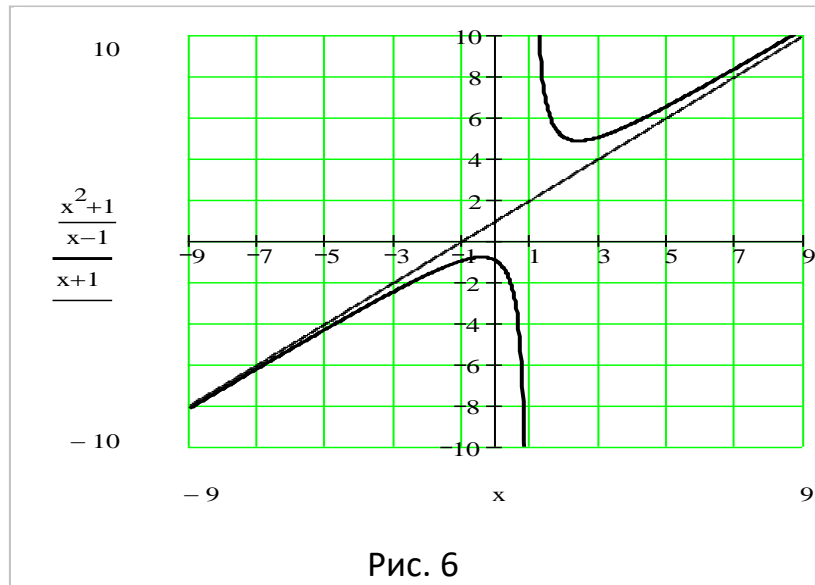
Знайдені границі показують, що пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

Користуючись програмою Mathcad знайдемо похідну даної функції та точки, в яких вона перетворюється в нуль

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \text{ simplify} \rightarrow \frac{(x^2 - 2 \cdot x - 1)}{(x - 1)^2} \quad \frac{(x^2 - 2 \cdot x - 1)}{(x - 1)^2} \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Таким чином похідна дорівнює нулю в точках $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, а отже, вони є точками екстремуму. Ці точки розбивають усю числову вісь на три проміжки: $(-\infty, 1 - \sqrt{2})$, $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, $(1 + \sqrt{2}, +\infty)$, всередині кожного з яких похідна $f'(x)$ зберігає постійний знак. Легко перекопати, що в першому і третьому проміжках $f'(x) > 0$ і, таким чином, тут функція зростає, у другому проміжку $f'(x) < 0$ і, отже, тут функція спадає. Її друга похідна

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \text{ simplify} \rightarrow \frac{4}{(x - 1)^3}$$



відмінна від нуля на всій області визначення, а це означає, що графік даної функції точок перегину не має. Оскільки на проміжку $(-\infty, 1)$ друга похідна $f''(x) < 0$, то графік даної функції на даному проміжку є опуклим, а в точці x_1 ця функція має локальний максимум; на проміжку $(1, +\infty)$ похідна $f''(x) > 0$, а тому тут графік функції угнутий, а в точці x_2 ця функція має локальний мінімум.

За допомогою програми Mathcad знаходимо похилу асимптоту:

$$k := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{(x-1) \cdot x} \rightarrow 1 \quad b := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x-1} - k \cdot x \rightarrow 1 \quad y := k \cdot x + b \rightarrow x + 1$$

Графік функції $y = \frac{x^2 + 1}{x-1}$ зображено на рис 4.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Користуючись програмою Mathcad, скласти рівняння дотичної і нормалі до:

- 1) гіперболи $y = \frac{2}{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$;
- 2) кривої $y = \operatorname{tg} x$ у початку координат;
- 3) кривої $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ у точці перетину з віссю Ox ;
- 4) до гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ в точці $M\left(5; \frac{9}{4}\right)$;
- 5) кривої $y = x^3$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$;
- 6) параболи $y = x^2$ в точках перетину її з прямою $y = 3x - 2$;
- 7) до еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{3y^2}{16} = 1$ в точці $M(2; -2)$;
- 8) гіперболи $y = \frac{x-1}{x+2}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$;
- 9) гіперболи $y = \frac{x-1}{x+2}$ в точці з абсцисою $x_0 = -5$;
- 10) параболи $y = x^2 - x + 1$ в точці з абсцисою $x_0 = \frac{2}{3}$;
- 11) кривої $y = e^{4-x^2}$ у точці перетину з прямою $y = 1$;
- 12) кривої $y = \arccos 3x$ у точці перетину з віссю Oy .

Побудувати графік функції, дотичної і нормалі.

2. Користуючись програмою Mathcad обчислити наближено значення:

- 1) $\sin 31^\circ$; 2) $\arcsin(0.707)$; 3) $\arccos 0.494$; 4) $\cos 47^\circ$;
- 5) $\operatorname{arctg} 1.08$; 6) $\sin 47^\circ$; 7) $\ln 1.03$; 8) $\cos 31^\circ$;

9) $\arcsin 0.505$; 10) $\sin 61^\circ$; 11) $\arccos 0.504$; 12) $\lg 1.07$.

3. Показати, що при достатньо малих x ($|x| \ll 1$) мають місце наближені рівності: $\ln(1+x) \approx x$, $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$, $e^x \approx 1+x$, $\sin x \approx x$.

4. Користуючись програмою Mathcad одержати розклад в ряд Тейлора функцій:

1) $f(x) = \sin x$ при $n=5$, $a=0$ і $a=\pi/2$;

2) $f(x) = \cos x$ при $n=5$, $a=0$ і $a=\pi/2$;

3) $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ за степенями x ;

4) $f(x) = x^4 - 5x^3 - 3x + 4$ за степенями $x-4$;

5) $f(x) = \ln x$ при $n=5$, $a=1$;

6) $f(x) = \cos^2 x$ при $n=5$, $a=\pi/4$;

7) $f(x) = e^x$ при $n=5$, $a=-2$;

8) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ при $n=5$, $a=-1$;

9) $f(x) = \frac{1}{4-3x}$ при $n=5$, $a=2$;

10) $f(x) = \ln(5x+3)$ при $n=5$, $a=1$;

11) $f(x) = \frac{1}{5+2x}$ при $n=5$, $a=3$;

12) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x - 7}$ при $n=5$, $a=-2$.

5. Знайти інтервали монотонності та побудувати графіки функцій:

1) $y = x(1 + \sqrt{x})$; 2) $y = x^3(2x-5)$; 3) $y = \ln(1+x^2)$; 4) $y = \frac{2x}{1+x^2}$;

5) $y = (x-2)^5(2x+1)^4$; 6) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$; 7) $y = x - e^x$;

8) $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$; 9) $y = 2x^2 - \ln x$; 10) $y = x^2 e^{-x}$; 11) $y = x\sqrt{2-x^2}$;

12) $y = x + \frac{16}{x}$.

6. Користуючись першим правилом, дослідити на екстремуми функції:

1) $y = x^2(1-x\sqrt{x})$; 2) $y = x + \sqrt{3-x}$; 3) $y = x^3 - 3x + 2$; 4) $y = \frac{x}{\ln x}$;

5) $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$; 6) $y = -x^2\sqrt{x^2+2}$; 7) $y = x - \ln(1+x^2)$; 8) $y = x - \ln(1-x)$;

9) $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$; 10) $y = x(1-x\sqrt{x})$; 11) $y = x + \sqrt{3-x}$;

12) $y = (2x-1)\sqrt[3]{(x-3)^2}$.

7. Користуючись другим правилом, дослідити на екстремуми функції:

1) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 3$; 2) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$; 3) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;

4) $f(x) = x^2e^{-x}$; 5) $f(x) = x + \sqrt{1-x}$; 6) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$; 7) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$;

8) $f(x) = x^2(3-x)^2$; 9) $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$; 10) $f(x) = xe^{-x}$; 11) $f(x) = \ln(4+x^2)$;
12) $f(x) = x \ln x$.

8. Користуючись теоремою 7, дослідити на екстремуми функції:

1) $f(x) = (x-1)^4$, 2) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$,

3) $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ – в точці $x=0$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функцій:

1) $f(x) = x^4 - 8x^2$ на відрізку $[-1; 3]$; 2) $f(x) = 3x - x^3$ на відрізку $[-2; 3]$;

3) $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2$ на відрізку $[-3; 1]$; 4) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x$ на відрізку

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 5) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ на відрізку $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$; 6) $f(x) = x^4 + 4x$ на відрізку

$[-2; 2]$; 7) $f(x) = 81x - x^4$ на відрізку $[-1; 4]$; 8) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x$ на
відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 9) $f(x) = 3 - 2x^2$ на відрізку $[-1; 3]$; 10) $f(x) = x^3 - 12x + 7$

на відрізку $[0; 3]$; 11) $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$ на відрізку $[0; 2]$;

12) $f(x) = x - \sin x$ на відрізку $[-\pi; \pi]$.

10. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривих:

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$; 2) $f(x) = 2 + (x-5)^{5/3}$;

3) $f(x) = (x+2)^6 + 2x + 2$; 4) $f(x) = (x+1)^4 + e^x$;

5) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$; 6) $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{(x-1)^6}$;

7) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$; 8) $f(x) = (x-4)^5 + 4x + 4$;

9) $f(x) = (x+1)^2(x-2)$; 10) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$;

11) $f(x) = \ln(1+x^2)$; 12) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

11. Користуючись програмою Mathcad знайти асимптоти кривих:

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$; 2) $f(x) = x + 2\arctg x$; 3) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+2}$;

$$4) y = xe^{\frac{2}{x}} + 1; 5) y = 2x + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}; 6) y = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x; 7) y = 2x - \frac{\cos x}{x};$$

$$8) y = x^2 e^{-x}; 9) y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}; 10) y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}; 11) y = \frac{x^3}{2(x+1)^2};$$

$$12) y = \frac{x^3 + 4}{x^2}.$$

12. Дослідити та побудувати графіки функцій:

$$1) y = \frac{x^3}{1-x^2}; 2) y = \frac{x^3 + 4}{x^2}; 3) y = \sqrt{1-x^3}; 4) y = e^{-x^2}; 5) y = \frac{x^2}{1-x^2};$$

$$6) y = \frac{4x}{4+x^2}; 7) y = \frac{x^2-5}{x-3}; 8) y = (x-1)e^{3x+1}; 9) y = (x-1)\sqrt{x};$$

$$10) y = 16x(x-1)^3; 11) y = \frac{4x^3 + 5}{x}; 12) y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$$

VI. РАЦІОНАЛЬНІ ТА ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

1. Основні відомості про раціональні функції

Многочленом (поліномом або цілою раціональною функцією) називається функція вигляду

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (1)$$

де n – натуральне число, яке називається степенем многочлена; $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ – коефіцієнти многочлена, дійсні або комплексні числа; незалежна змінна x також може бути як дійсною, так і комплексною.

Лема 1. Для того, щоб многочлен (1) тотожно дорівнював нулю, необхідно і достатньо, щоб усі його коефіцієнти дорівнювали нулю.

Наслідок. Для того, щоб два многочлени $P_n(x)$ і $Q_n(x)$ однакових степенів були тотожно рівні між собою, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти при однакових степенях x многочленів були рівні між собою.

Теорема 1 (Теорема Безу). Остача від ділення многочлена $P_n(x) = 0$ на різницю $x - a$ дорівнює $P_n(a)$.

Теорема 2 (Основна теорема алгебри). Будь-який многочлен степеня $n > 0$ з будь-якими дійсними або комплексними коефіцієнтами, має хоча би один корінь – дійсний або комплексний.

Теорема 3. Будь-який многочлен $P_n(x)$ степеня n має точно n коренів, враховуючи їх кратність.

Теорема 4. Будь-який многочлен n -го степеня можна подати у вигляді

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n), \quad (2)$$

де x_1, x_2, \dots, x_n – дійсні або комплексні корені многочлена, a_0 – коефіцієнт многочлена при x^n .

Вираз (2) називається **розкладом многочлена на лінійні множники**.

Якщо серед коренів x_1, x_2, \dots, x_n є рівні між собою (кратні корені), то вираз (2) можна записати у вигляді

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\dots(x - x_m)^{k_m}, \quad (3)$$

де k_1, k_2, \dots, k_m – кратності, а $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

Нехай число $\alpha + i\beta$ – комплексний корінь многочлена $P_n(z)$, тобто $P_n(\alpha + i\beta) = 0$. Тоді справедлива теорема.

Теорема 5. Якщо многочлен $P_n(z)$ з дійсними коефіцієнтами має корінь $z = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, то $\bar{z} = \alpha - i\beta$ також є коренем цього многочлена.

Таким чином, у розкладі $P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$ деякі множники входять попарно-спряженими.

Перемноживши лінійні множники, які відповідають парі комплексно спряжених коренів, одержимо тричлен другого степеня з дійсними коефіцієнтами:

$$[x - (\alpha + i\beta)][x - (\alpha - i\beta)] = x^2 + px + q, \text{ де } p = -2\alpha, \text{ } q = \alpha^2 + \beta^2.$$

Якщо число $\alpha + i\beta$ є коренем кратності k , то число $\alpha - i\beta$ має ту ж саму кратність.

Таким чином, многочлен з дійсними коефіцієнтами розкладається на множники з дійсним коефіцієнтами першого і другого степеня відповідної кратності, тобто

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \dots (x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}, \quad (4)$$

де $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2l_1 + 2l_2 + \dots + 2l_s = n$.

2. Розкладання правильного раціонального дробу на найпростіші Найпростішими або елементарними називаються дробі вигляду:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}; \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^m}; \quad \text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \quad \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}.$$

Тут $m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$; A, B, p, q, a – дійсні числа; $D = p^2 - 4q < 0$ – квадратний тричлен не має дійсних коренів. Числа A і B називаються *невизначеними коефіцієнтами*.

Відношення двох многочленів

$$R(x) = \frac{Q_r(x)}{P_n(x)} \quad (5)$$

називають *правильним раціональним* дробом, якщо $r < n$, і *неправильним*, якщо $r > n$.

Якщо дріб (5) неправильний, то його завжди можна подати у вигляді алгебраїчної суми многочлена і правильного раціонального дробу, тобто

$$\frac{Q_r(x)}{P_n(x)} = M(x) + \frac{Q_{r_1}(x)}{P_n(x)}. \quad (6)$$

Теорема 6. *Будь-який правильний раціональний дріб можна єдиним способом подати у вигляді суми скінченного числа елементарних дробів, тобто*

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{Q_r(x)}{P_n(x)} = \frac{Q_r}{a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \dots (x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}} = \\ &= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \dots + \\ &\quad + \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{R_1x+S_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \\ &\quad + \frac{R_1x+S_1}{x^2+p_sx+q_s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+p_sx+q_s)^2} + \dots + \frac{R_{l_s}x+S_{l_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Вираз (7) називається *розкладом правильного раціонального дробу на суму елементарних раціональних дробів*.

3. Застосування програми Mathcad для розкладання многочлена на лінійні та квадратичні множники

Приклад 1. Користуючись програмою Mathcad розкласти на множники наступні многочлени: 1. $x^3 - 5x^2 + 4x$; 2. $x^3 - 3x + 2$; 3. $x^3 - x^2 + x - 1$.

Розкладання многочлена на множники здійснюється за допомогою команди **factor** з полицки **Symbolic**. Для цього потрібно набрати многочлен, наприклад, многочлен $x^3 - 5x^2 + 4x$ і натиснути кнопку **factor**. При цьому з'явиться запис вигляду $x^3 - 5x^2 + 4x$ factor, ■ → . Для одержання результату потрібно за допомогою клавіші **BackSpace** вилучити із запису квадратик і кому і натиснути клавішу **Enter**. В результаті таких дій, одержимо лістинг:

1. $x^3 - 5x^2 + 4x$ factor → $x \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)$
2. $x^3 - 3 \cdot x + 2$ factor → $(x - 1)^2 \cdot (x + 2)$
3. $x^3 - x^2 + x - 1$ factor → $(x - 1) \cdot (x^2 + 1)$.

4. Застосування програми Mathcad для розкладання раціонального дроби на найпростіші

Розкласти раціональні дроби на найпростіші можна різними способами. В програмі Mathcad це можна зробити шляхом зведення задачі до розв'язання системи лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів за допомогою обчислювального блоку **Given...Find** або за допомогою команди **parfrac**.

Приклад 2. Користуючись програмою Mathcad розкласти на суму найпростіших раціональних дробів наступні раціональні функції:

Випадок 1. Знаменник має тільки дійсні різні корені $\frac{x^2 + 2x + 6}{(x - 1)(x - 2)(x - 4)}$.

Розклад шукаємо у вигляді $\frac{x^2 + 2x + 6}{(x - 1)(x - 2)(x - 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 4}$.

Невідомі коефіцієнти шукаємо з рівності многочленів

$$x^2 + 2x + 6 = A(x - 2)(x - 4) + B(x - 1)(x - 4) + C(x - 1)(x - 2)$$

Систему лінійних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів можемо дістати шляхом порівняння коефіцієнтів при однакових степенях x або шляхом надання конкретних числових значень змінній x у лівій і правій частинах рівності многочленів.

У першому випадку це зручно зробити за допомогою команди **collect** з полицки **Symbolic**, яка збирає коефіцієнти при однакових степенях x . Процес розв'язання задачі у цьому випадку має вигляд

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}$$

$$x^2 + 2x + 6 = A \cdot (x-2) \cdot (x-4) + B \cdot (x-1) \cdot (x-4) + C \cdot (x-1) \cdot (x-2)$$

$$A \cdot (x-2) \cdot (x-4) + B \cdot (x-1) \cdot (x-4) + C \cdot (x-1) \cdot (x-2) \text{ collect, } x \rightarrow (B+A+C) \cdot x^2 + (-6A-5B-3C) \cdot x + 8A+2C+4B$$

$$x^2 + 2x + 6 = (B+A+C) \cdot x^2 + (-6A-5B-3C) \cdot x + 8A+2C+4B$$

$$A := 0 \quad B := 0 \quad C := 0$$

Given

$$B + A + C = 1 \quad -6A - 5B - 3C = 2 \quad 8A + 2C + 4B = 6$$

$$\text{Find}(A, B, C) = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що для запису рівностей використовується логічна операція '= \Rightarrow ' з полицки **Boolean**.

У другому випадку систему рівнянь зручно одержати за допомогою введення функцій користувача, одна з яких задає ліву частину рівності, а друга – праву і обчислити їх при різних значеннях змінної x . Процес розв'язання задачі у цьому випадку має вигляд

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}$$

$$x^2 + 2x + 6 = A \cdot (x-2) \cdot (x-4) + B \cdot (x-1) \cdot (x-4) + C \cdot (x-1) \cdot (x-2)$$

$$fl(x) := x^2 + 2x + 6 \quad fp(x, A, B, C) := A \cdot (x-2) \cdot (x-4) + B \cdot (x-1) \cdot (x-4) + C \cdot (x-1) \cdot (x-2)$$

$$fl(x) = fp(x, A, B, C)$$

$$A := 0 \quad B := 0 \quad C := 0$$

Given

$$fl(1) = fp(1, A, B, C) \quad fl(2) = fp(2, A, B, C) \quad fl(4) = fp(4, A, B, C)$$

$$\text{Find}(A, B, C) = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Якщо нас цікавить тільки результат розкладання на найпростіші дроби, то це можна виконати за допомогою команди **parfrac**

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} \text{ convert, parfrac, } x \rightarrow \frac{3}{(x-1)} - \frac{7}{(x-2)} + \frac{5}{(x-4)}$$

Випадок 2. Знаменник має тільки дійсні корені, серед яких можуть бути і кратні $\frac{x^2 + 1}{(x-1)^3(x+3)}$.

У цьому випадку розкладання шукаємо у вигляді

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}.$$

Невідомі коефіцієнти шукаємо з рівності многочленів

$$x^2 + 1 = A(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)^2(x+3) + D(x-1)^2.$$

Подальший хід розв'язання за першим способом побудови системи рівнянь видно з наведеного лістингу

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{x^2 + 1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}$$

$$x^2 + 1 = A(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)^2(x+3) + D(x-1)^3$$

$$A \cdot (x+3) + B \cdot (x-1)(x+3) + C \cdot (x-1)^2(x+3) + D \cdot (x-1)^3 \text{ collect, x}$$

$$(C + D) \cdot x^3 + (B + C - 3 \cdot D) \cdot x^2 + (2 \cdot B - 5 \cdot C + A + 3 \cdot D) \cdot x + 3 \cdot A + 3 \cdot C - 3 \cdot B - D$$

$$A := 0 \quad B := 0 \quad C := 0 \quad D := 0$$

Given

$$C + D = 0 \quad B + C - 3 \cdot D = 1 \quad 2 \cdot B - 5 \cdot C + A + 3 \cdot D = 0 \quad 3 \cdot A + 3 \cdot C - 3 \cdot B - D = 1$$

$$\text{Find}(A, B, C, D) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{5}{32} \\ \frac{-5}{32} \end{pmatrix}$$

Звернемо увагу на те, що рядок присвоєнь $A := A \quad B := B \quad C := C$ потрібно для відміни попередніх числових значень цих змінних, якщо вони були.

Якщо систему рівнянь будувати другим способом, то лістинг може мати вигляд

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}$$

$$A := A \quad B := B \quad C := C$$

$$x^2 + 1 = A(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)^2(x+3) + D(x-1)^3$$

$$fl(x) := x^2 + 1 \quad fp(x, A, B, C, D) := A \cdot (x+3) + B \cdot (x-1) \cdot (x+3) + C \cdot (x-1)^2 \cdot (x+3) + D \cdot (x-1)^3$$

$$fl(x) = fp(x, A, B, C, D)$$

$$A := 0 \quad B := 0 \quad C := 0 \quad D := 0$$

Given

$$fl(1) = fp(1, A, B, C, D) \quad fl(2) = fp(2, A, B, C, D) \quad fl(3) = fp(3, A, B, C, D) \quad fl(4) = fp(4, A, B, C, D)$$

$$Find(A, B, C, D) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{5}{32} \\ \frac{-5}{32} \end{pmatrix}$$

Результат розкладання на найпростіші дроби, одержаний за допомогою команди **parfrac**, має вигляд

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)^3(x+3)} \text{ convert, parfrac, x} \rightarrow \frac{1}{2 \cdot (x-1)^3} + \frac{3}{8 \cdot (x-1)^2} + \frac{5}{32 \cdot (x-1)} - \frac{5}{32 \cdot (x+3)}$$

Випадок 3. Серед коренів знаменника дроби є дійсні прості і комплексні корені.

Хід розв'язання за першим способом побудови системи рівнянь видно з наведеного лістингу

$$\frac{1}{x^5 - x^2} \text{ factor} \rightarrow x^2 \cdot (x-1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

$$\frac{1}{x^2 \cdot (x-1) \cdot (x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{D \cdot x + E}{x^2 + x + 1}$$

$$A \cdot (x-1) \cdot (x^2 + x + 1) + B \cdot x \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x-1) + C \cdot x^2 \cdot (x^2 + x + 1) + (D \cdot x + E) \cdot x^2 \cdot (x-1) \text{ collect, x}$$

$$(C + B + D) \cdot x^4 + (A + C + E - D) \cdot x^3 + (-E + C) \cdot x^2 - B \cdot x - A$$

$$1 = (C + B + D) \cdot x^4 + (A + C + E - D) \cdot x^3 + (-E + C) \cdot x^2 - B \cdot x - A$$

$$A := 0 \quad B := 0 \quad C := 0 \quad D := 0 \quad E := 0$$

Given

$$C + B + D = 0 \quad A + C + E - D = 0 \quad C - E = 0 \quad -B = 0 \quad -A = 1$$

$$\text{Find}(A, B, C, D, E) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Якщо систему рівнянь будувати другим способом, то лістинг може мати вигляд

$$\frac{1}{x^5 - x^2} \quad x^5 - x^2 \text{ factor} \rightarrow x^2 \cdot (x-1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

$$\frac{1}{x^2 \cdot (x-1) \cdot (x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{D \cdot x + E}{x^2 + x + 1}$$

fl(x) := 1

$$\text{fp}(x, A, B, C, D, E) := A \cdot (x-1) \cdot (x^2 + x + 1) + B \cdot x \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x-1) + C \cdot x^2 \cdot (x^2 + x + 1) + (D \cdot x + E) \cdot x^2 \cdot (x-1)$$

$$\text{fl}(x) = \text{fp}(x, A, B, C, D, E)$$

A := 0 B := 0 C := 0 D := 0 E := 0

Given

$$\text{fl}(1) = \text{fp}(1, A, B, C, D, E) \quad \text{fl}(2) = \text{fp}(2, A, B, C, D, E) \quad \text{fl}(3) = \text{fp}(3, A, B, C, D, E)$$

$$\text{fl}(4) = \text{fp}(4, A, B, C, D, E) \quad \text{fl}(5) = \text{fp}(5, A, B, C, D, E)$$

$$\text{find}(A, B, C, D, E) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Результат розкладання на найпростіші дроби, одержаний за допомогою команди **parfrac**, має вигляд

$$\frac{1}{x^2 \cdot (x-1) \cdot (x^2 + x + 1)} \text{ convert, parfrac, x} \rightarrow \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{3 \cdot (x-1)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(x-1)}{(x^2 + x + 1)}$$

Випадок 4. Серед коренів знаменника кратні комплексні корені.
Хід розв'язання за першим способом видно з наведеного лістингу

$$\frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{A \cdot x + B}{(x^2 + 1)^2} + \frac{C \cdot x + D}{x^2 + 1}$$

$$x^3 - 2x = (A \cdot x + B) + (C \cdot x + D) \cdot (x^2 + 1)$$

$$(A \cdot x + B) + (C \cdot x + D) \cdot (x^2 + 1) \text{ collect, } x \rightarrow C \cdot x^3 + D \cdot x^2 + (A + C) \cdot x + B + D$$

$$A := 0 \quad B := 0 \quad C := 0 \quad D := 0$$

Given

$$C = 1 \quad D = 0 \quad A + C = -2 \quad B + D = 0$$

$$\text{Find}(A, B, C, D) \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Якщо систему рівнянь будувати другим способом, то лістинг може мати вигляд

$$\frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{A \cdot x + B}{(x^2 + 1)^2} + \frac{C \cdot x + D}{x^2 + 1}$$

$$x^3 - 2x = (A \cdot x + B) + (C \cdot x + D) \cdot (x^2 + 1)$$

$$\text{fl}(x) := x^3 - 2x \quad \text{fp}(x, A, B, C, D) := (A \cdot x + B) + (C \cdot x + D) \cdot (x^2 + 1)$$

$$\text{fl}(x) = \text{fp}(x, A, B, C, D)$$

$$A := 0 \quad B := 0 \quad C := 0 \quad D := 0$$

Given

$$\text{fl}(1) = \text{fp}(1, A, B, C, D) \quad \text{fl}(2) = \text{fp}(2, A, B, C, D)$$

$$\text{fl}(3) = \text{fp}(3, A, B, C, D) \quad \text{fl}(4) = \text{fp}(4, A, B, C, D)$$

$$\text{Find}(A, B, C, D) \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Результат розкладання на найпростіші дроби, одержаний за допомогою команди **parfrac**, має вигляд

$$\frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} \text{ convert, parfrac, } x \rightarrow -3 \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x}{(x^2 + 1)}$$

Завдання для індивідуальної роботи

Розкласти на найпростіші дроби дробово-раціональні функції із таблиці 1.

Таблиця 1

1	$\frac{10x - 25}{x^2 - 3x - 4},$ $\frac{5x^2 + 6x + 9}{(x - 3)^2(x + 1)^2}$	5	$\frac{x^3 + 1}{x^3 + x^2},$ $\frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6};$	9	$\frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x},$ $\frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6};$
2	$\frac{x^2 - x + 1}{x^3(x + 2)^2},$ $\frac{1}{x^3 + 8}$	6	$\frac{x^2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4},$ $\frac{x^2 + 1}{x(x + 1)(x - 1)}$	10	$\frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2},$ $\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x - 2)^4}$
3	$\frac{2x^3 + 3}{x^3 - 5x^2 + 6x},$ $\frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8}$	7	$\frac{x^3 + 2}{x^3 - 4x},$ $\frac{1}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 2)}$	11	$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2 + 2x},$ $\frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + x)}$
4	$\frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6},$ $\frac{3x^3 - 2x^2 + 7x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)}$	8	$\frac{1}{x^4 - 4}, \frac{x}{x^4 - 3x^2 + 2}$	12	$\frac{2x^2 - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x},$ $\frac{3x^2 + 1}{(x^3 - 1)^2}$

VII. ОБЧИСЛЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. Поняття первісної та невизначеного інтеграла

Означення 1. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на проміжку $\langle a, b \rangle$, якщо $F(x)$ диференційовна на $\langle a, b \rangle$ і в кожній точці $x \in \langle a, b \rangle$ $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, первісною функції $f(x) = x^2$ є функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$, оскільки

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} \right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2.$$

Теорема 1. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на проміжку $\langle a, b \rangle$, то всяка інша первісна функції $f(x)$ на цьому самому проміжку має вигляду $F(x) + C$, де C – довільна стала.

Означення 2. Сукупність усіх первісних $F(x) + C$ для заданої функції $f(x)$ називають **невизначеним інтегралом** і позначають $\int f(x) dx$, отже

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1)$$

Тут \int – знак інтеграла, $f(x) dx$ – підінтегральний вираз, $f(x)$ – підінтегральна функція, x – змінна інтегрування, C – стала інтегрування.

2. Основні властивості невизначеного інтеграла

1. $(\int f(x) dx)' = f(x)$.

2. $d \int f(x) dx = f(x) dx$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$, то $\int f(u) du = F(u) + C$.

Наприклад, $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$. Користуючись властивістю 4, можемо записати формулу $\int u du = \frac{u^2}{2} + C$, де $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну. Зокрема: $\int \sin x d \sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + C$; $\int \ln x d \ln x = \frac{\ln^2 x}{2} + C$.

5. $\int C f(x) dx = C \int f(x) dx$, де C – стала.

6.

$$\int [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_n f_n(x)] dx = C_1 \int f_1(x) dx + C_2 \int f_2(x) dx + \dots + C_n \int f_n(x) dx.$$

3. Таблиця основних інтегралів

№ п/п	$\int f(x) dx = F(x) + C$	Перевірка умовою $(F(x) + C)' = f(x)$
1	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C\right)' = x^n$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$
3	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{\ln a \cdot a^x}{\ln a} = a^x$
4	$\int e^x dx = e^x + C$	$(e^x + C)' = e^x$
5	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$(\sin x + C)' = \cos x$
6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$(-\cos x + C)' = \sin x$
7	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$(\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$(-\operatorname{ctg} x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
9	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\left(\arcsin \frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
10	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	$\left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{x^2 + a^2}$

Додамо до основної таблиці інтегралів ще три інтеграли, які часто використовуються:

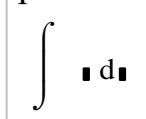
$$1) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$2) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$3) \int \sqrt{a + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a + x^2} + \frac{a}{2} \ln |x + \sqrt{a + x^2}| + C.$$

4. Обчислення невизначеного інтеграла в програмі Mathcad

В програмі Mathcad для обчислення невизначених інтегралів є оператор



Для обчислення інтеграла потрібно: на полиці **Calculus** клацнути ЛКМ на відповідній кнопці, ввести функцію і ім'я змінної інтегрування у відповідні знакомісця, клацнути на кнопці символічного знаку дорівнює "→" і натиснути клавішу "Enter".

Приклад 1. Обчислити невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int \left(x^3 + \sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^3} \right) dx, \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Лістинг для знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \left(x^3 + \sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^3} \right) dx \rightarrow \frac{1}{4} \cdot x^4 + \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \quad \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \rightarrow \arcsin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$$

Зауваження. При інтегруванні за допомогою програми Mathcad стала інтегрування не додається.

5. Методи інтегрування

5.1. Метод безпосереднього інтегрування

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла та таблиці основних інтегралів називають *безпосереднім інтегруванням*.

Приклад 2. Зайти інтеграл: а) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$.

$$\begin{aligned} \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx &= \int \left(x + 2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \right) dx = \int \left(x + 2x^{\frac{1}{6}} + x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \\ &= \int x dx + 2 \int x^{\frac{1}{6}} dx + \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{12}{7} x^{\frac{7}{6}} + 3 \sqrt[3]{x} + C. \end{aligned}$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{12}{7} \cdot x^{\frac{7}{6}} + 3 \cdot x^{\frac{1}{3}}$$

5.2. Метод заміни змінної. Внесення функції під знак диференціала

Суть цього методу полягає у введенні під знаком інтеграла такої нової змінної, що після підстановки і заміни диференціала заданої змінної на диференціал нової змінної дістають табличний інтеграл, або інтеграл, який легко зводиться до табличних. Обґрунтування такого методу дається теоремою.

Теорема. Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $\langle a, b \rangle$, тобто $\int f(x) dx = F(x) + C$ і нехай функція $x = \varphi(t)$, ($dx = \varphi'(t) dt$) визначена і диференційовна на проміжку $\langle \alpha, \beta \rangle$, причому множина значень цієї функції є проміжок $\langle a, b \rangle$. Тоді справедлива формула $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{(2x+1)^2}$.

Виконаємо заміну $2x+1=t$, $2dx=dt$, звідки $dx=\frac{1}{2}dt$. Підставивши одержані вирази в заданий інтеграл, дістанемо:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \int t^{-2} dt = -\frac{1}{2} t^{-1} + C = -\frac{1}{2} \frac{1}{2x+1} + C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{1}{(2x+1)^2} dx \rightarrow \frac{-1}{2 \cdot (2x+1)}$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\ln^7 x dx}{x}$.

Використаємо метод внесення функції під знак диференціала. Очевидно, що $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$. Тоді

$$I = \int \frac{\ln^7 x dx}{x} = \int \ln^7 x \cdot \frac{dx}{x} = \int \ln^7 x d(\ln x) = [\ln x = t] = \int t^7 dt = \frac{1}{8} t^8 + C = \frac{1}{8} \ln^8 x + C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{\ln(x)^7}{x} dx \rightarrow \frac{1}{8} \cdot \ln(x)^8$$

Наслідок 1. Якщо підінтегральний вираз можна розкласти на множники $f(\varphi(x))$ та $\varphi'(x)dx$, то доцільно зробити заміну $\varphi(x) = t$. Тоді

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(t) dt.$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int e^{\sin x} \cos x dx$.

Оскільки підінтегральний вираз можна представити у вигляді добутку і $e^{\sin x} \cos x dx = e^{\sin x} (\sin x)' dx$, то ввівши заміну $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$, дістанемо $\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$.

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int e^{\sin(x)} \cos(x) dx \rightarrow \exp(\sin(x))$$

Наслідок 2. Якщо підінтегральна функція має вигляд $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, тобто, у чисельнику є похідна від знаменника, то за допомогою заміни $\varphi(x) = t$, $\varphi'(x)dx = dt$ інтеграл зводиться до табличного.

Справді,
$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(\varphi(x)) + C.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int \frac{3\cos 3x}{1 + \sin 3x} dx$.

Скориставшись наслідком 2, дістанемо

$$\int \frac{3\cos 3x}{1 + \sin 3x} dx = \int \frac{(1 + \sin 3x)'}{1 + \sin 3x} dx = \left[\begin{array}{l} 1 + \sin 3x = t \\ 3\cos 3x dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(1 + \sin 3x) + C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{3\cos(3x)}{1 + \sin(3x)} dx \rightarrow \ln(1 + \sin(3 \cdot x))$$

5.2. Метод інтегрування частинами

Цей метод застосовується, якщо під інтегралом є добуток функцій.

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$, тоді $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$. Інтегруємо обидві частини $\int d(u \cdot v) = \int u \cdot dv + \int v du$. Звідки, з врахуванням властивості 3 невизначеного інтеграла, дістанемо формулу для інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $I = \int \arctg x dx$.

Використавши інтегрування частинами, дістанемо

$$I = \left[\begin{array}{l} u = \arctg x, \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \int dx = x \end{array} \right] = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \text{atan}(x) dx \rightarrow x \cdot \text{atan}(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2)$$

6. Інтегрування основних класів функцій

6.1. Інтегрування раціональних функцій

Нехай треба знайти інтеграл від раціональної функції $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$.

Враховуючи те, що раціональну функцію можна подати у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу, дістанемо:

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \int S_l(x) dx + \int \frac{R_k(x)}{Q_n(x)} dx.$$

Інтеграл від многочлена береться безпосередньо, а інтеграл від правильного раціонального дробу зводиться до інтегрування найпростіших раціональних дробів.

6.1.1. Інтегрування найпростіших дробів

Найпростішими (елементарними) дробами називаються дробі вигляду:

$$I. \frac{A}{x-a}; \quad II. \frac{A}{(x-a)^k}, k \geq 2, k \in N;$$

$$III. \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, p^2-4q < 0; \quad IV. \frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^k}, p^2-4q < 0, k \geq 2, k \in N.$$

Інтегрування найпростіших дробів I та II типів не представляє труднощів. Справді,

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

Розглянемо інтегрування раціонального дробу III типу $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$.

Якщо зробити заміну $x = t - \frac{p}{2}$, $dx = dt$ і ввести позначення $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, то

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{\left(t - \frac{p}{2}\right)^2 + p\left(t - \frac{p}{2}\right) + q} dt = \int \frac{At + B - A \cdot \frac{p}{2}}{t^2 + a^2} dt = \\ &= A \int \frac{t}{t^2 + a^2} dt + \left(B - A \cdot \frac{p}{2}\right) \int \frac{1}{t^2 + a^2} dt. \end{aligned}$$

Перший інтеграл знаходиться безпосередньо:

$$\int \frac{t}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + a^2) + C,$$

а другий є табличним (номер 10), оскільки за умовою $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Тоді

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \ln(t^2 + a^2) + \frac{\left(B - A \cdot \frac{p}{2}\right)}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C, \text{ де } t = x + \frac{p}{2}.$$

Оскільки $t^2 + a^2 = x^2 + px + q$, то

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{\left(B - A \cdot \frac{p}{2}\right)}{a} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{a} + C.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $I = \int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx$.

Виділимо в чисельнику дробу вираз, який є похідною від знаменника, після чого розіб'ємо на два інтеграли:

$$I = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4) - 1 + 6}{x^2 - 4x + 8} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{x^2 - 4x + 8} dx + 5 \int \frac{1}{x^2 - 4x + 8} dx.$$

Перший інтеграл береться зразу, оскільки в чисельнику є похідна від знаменника. Другий інтеграл зводиться до табличного, якщо виділити в знаменнику повний квадрат і зробити заміною $x - 2 = t$:

$$I = \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 8) + 5 \int \frac{1}{(x-2)^2 + 2^2} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 8) + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx \rightarrow \frac{3}{2} \cdot \ln(x^2 - 4x + 8) + \frac{5}{2} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{1}{2} \cdot x - 1\right)$$

Розглянемо інтегрування раціонального дробу IV типу. Тобто треба знайти $\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} dx$, де $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Виділимо в чисельнику похідну від квадратного тричлена, який знаходиться у знаменнику:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x + p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2 + px + q)^n} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{(2x + p)}{(x^2 + px + q)^n} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx. \end{aligned}$$

Перший інтеграл в правій частині рівності знаходиться за допомогою заміни $x^2 + px + q = t$, $(2x + p) = dt$, а другий перетворимо так, виділивши в знаменнику повний квадрат:

$$\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx = \int \frac{1}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]^n} dx.$$

Ввівши заміну $x + \frac{p}{2} = z$, $dx = dz$ і позначення $q - \frac{p^2}{4} = a^2$, одержимо

$$\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx = \int \frac{1}{(z^2 + a^2)^n} dz.$$

Зауваження. Для інтеграла $I_n = \int \frac{1}{(z^2 + a^2)^n} dz$, де n – ціле додатне число, має місце наступна рекурентна формула:

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{z}{(z^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{n-1}.$$

Ця формула дає можливість після $(n-1)$ -кратного застосування звести даний інтеграл I_n до табличного інтегралу $I_1 = \int \frac{1}{z^2 + a^2} dz$.

Приклад 9. Знайти інтеграл $I = \int \frac{3x+2}{(x^2 + 2x+10)^2} dx$.

Маємо

$$I = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2) + (2-3)}{(x^2 + 2x+10)^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2 + 2x+10)^2} dx - \int \frac{1}{[(x+1)^2 + 9]^2} dx.$$

У першому інтегралі зробимо заміну $x^2 + 2x+10 = t$, $(2x+2)dx = dt$, а у другому інтегралі покладемо $x+1 = z$, $dx = dz$. Тоді

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{2} \int \frac{1}{t^2} dt - \int \frac{1}{(z^2 + 9)^2} dz = \frac{3}{2} \int t^{-2} dt - \int \frac{1}{(z^2 + 9)^2} dz = \\ &= -\frac{3}{2} t^{-1} - \left[\frac{1}{2 \cdot 9 \cdot (2-1)} \cdot \frac{z}{(z^2 + 9)^{2-1}} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} \cdot \int \frac{1}{z^2 + 9} dz \right] = \\ &= -\frac{3}{2t} - \frac{1}{18} \cdot \frac{z}{z^2 + 9} - \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{z}{3} + C. \end{aligned}$$

Повертаючись до старих змінних, одержимо

$$\begin{aligned} I &= -\frac{3}{2(x^2 + 2x+10)} - \frac{1}{18} \cdot \frac{x+1}{x^2 + 2x+10} - \frac{1}{54} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C = \\ &= -\frac{1}{18} \cdot \frac{x+28}{x^2 + 2x+10} - \frac{1}{54} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C. \end{aligned}$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{3x+2}{(x^2 + 2x+10)^2} dx \rightarrow \frac{1}{36} \cdot \frac{(-2 \cdot x - 56)}{(x^2 + 2 \cdot x + 10)} - \frac{1}{54} \cdot \operatorname{atan} \left(\frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \right)$$

6.1.2. Інтегрування раціональних дробів за допомогою розкладу на найпростіші дроби

Якщо підінтегральний дріб неправильний, то необхідно з нього спочатку виділити цілу частину, а потім правильний раціональний дріб розкласти на найпростіші дроби.

Приклад 10. Знайти інтеграл $I = \int \frac{1}{x^5 - x^2} dx$.

Розкладемо знаменник на множники:

$$x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1).$$

Тоді

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = \frac{1}{x(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + E}{x^2 + x + 1}.$$

Звільнившись від знаменника, дістанемо:

$$1 = Ax(x-1)(x^2 + x + 1) + B(x-1)(x^2 + x + 1) + Cx^2(x^2 + x + 1) + (Dx + E)x^2(x-1).$$

При $x=0$ маємо $1 = -B$, тобто $B = -1$; при $x=1$ маємо $1 = 3C$, тобто $C = \frac{1}{3}$.

Перепишемо попередню рівність у вигляді

$$1 = (A + C + D) \cdot x^4 + (C + B + E - D) \cdot x^3 + (-E + C) \cdot x^2 - Ax - B.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при x^2 , x^3 , x^4 , одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} C - E = 0, \\ B + C - D + E = 0, \\ A + C + D = 0, \end{cases}$$

з якої знаходимо: $E = \frac{1}{3}$, $D = -\frac{1}{3}$, $A = 0$. Таким чином,

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2 + x + 1)}.$$

Підставивши в інтеграл, дістанемо:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^5 - x^2} dx &= -\int \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2 + x + 1} dx = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{6} \int \frac{2x+1-3}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{1}{x^5 - x^2} dx \rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \ln(-1 + x) - \frac{1}{6} \cdot \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{atan} \left[\frac{1}{3} \cdot (2 \cdot x + 1) \cdot \sqrt{3} \right]$$

6.2. Інтегрування раціональних виразів, що містять тригонометричні функції

Інтеграл вигляду $\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) dx$, де R є раціональною функцією від $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, яка називається *універсальною тригонометричною підстановкою*, зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно нової змінної t , а отже, виражається через елементарні функції.

Дійсно,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}, \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}, x = 2 \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2}{1+t^2} dt,$$

тому

$$\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}, \frac{1-t^2}{2t}\right) \frac{2}{1+t^2} dt = \int R_1(t) dt,$$

де $R_1(t)$ – раціональна функція від t .

Приклад 11. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx$.

Підінтегральна функція є раціональна відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Використавши універсальну підстановку, дістанемо:

$$I = \int \frac{1}{4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t^2 + 4t + 4} dt = \int \frac{1}{(t+2)^2} dt = -\frac{1}{t+2} + C.$$

Повертаючись до старої змінної, одержимо

$$I = \int \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} + C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{1}{4 \sin(x) + 3 \cos(x) + 5} dx \rightarrow \frac{-1}{\left(\tan\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) + 2\right)}$$

Приклад 12. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

Використавши універсальну підстановку, дістанемо

$$I = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = -2 \int \frac{1}{t^2 - 2t - 1} dt.$$

Квадратний тричлен $t^2 - 2t - 1$ має корені $1 - \sqrt{2}$ та $1 + \sqrt{2}$. Тому

$$\frac{1}{t^2 - 2t - 1} = \frac{A}{t - (1 - \sqrt{2})} + \frac{B}{t - (1 + \sqrt{2})} = \frac{A(t - (1 + \sqrt{2})) + B(t - (1 - \sqrt{2}))}{t^2 - 2t - 1}.$$

Надаючи змінній t значення $1 - \sqrt{2}$ та $1 + \sqrt{2}$, дістанемо: $-2\sqrt{2}A = 1$, $2\sqrt{2}B = 1$. Звідки отримуємо: $A = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $B = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Отже,

$$I = -2 \int \frac{1}{t^2 - 2t - 1} dt = -2 \left(\int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}}{t - (1 - \sqrt{2})} dt + \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{t - (1 + \sqrt{2})} dt \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\ln|t - (1 - \sqrt{2})| - \ln|t - (1 + \sqrt{2})| \right) + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}} \right| + C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)} dx \rightarrow \sqrt{2} \cdot \operatorname{atanh} \left[\frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \tan \left(\frac{1}{2} \cdot x \right) - 2 \right) \cdot \sqrt{2} \right]$$

Зауваження 1. При знаходженні інтегралів за допомогою програми Mathcad часто первісна (результат) виражається через обернені гіперболічні функції (див. лістинг останнього прикладу). Щоб уникнути обернених гіперболічних формул можна скористатись явним вираженням обернених гіперболічних функцій через логарифмічні функції:

$$y = \operatorname{arcsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad y = \operatorname{arcch}(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}), \quad \text{для } x \geq 1 \quad \text{і} \\ -\infty < y \leq 0;$$

$$y = \operatorname{arcch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \text{для } x \geq 1 \quad \text{і } 0 \geq y < +\infty;$$

$$y = \operatorname{arcth}(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad \text{для } |x| < 1;$$

$$y = \operatorname{arccth}(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad \text{для } |x| > 1.$$

Зауваження 2. На практиці універсальну тригонометричну підстановку використовують, якщо $\sin x$ і $\cos x$ входять у невисокому степені (інакше розрахунки будуть дуже складні).

Разом з тим, в окремих випадках, для знаходження інтеграла вигляду $I = \int R(\sin x, \cos x) dx$ можна обійтися без універсальної тригонометричної підстановки.

1⁰. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є непарною відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тоді можна скористатись підстановкою $\cos x = t$, $-\sin x dx = d \cos x = dt$.

2⁰. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є непарною відносно $\cos x$, тобто $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тоді можна скористатись підстановкою $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$.

3⁰. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є парною відносно $\sin x$ і $\cos x$ сукупно, тобто: $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тоді можна скористатись підстановкою $tg x = t$ або $ctg x = t$. У цьому випадку: $tg x = t$, $x = \arctg t$, $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$, $\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$.

Приклад 13. Знайти інтеграл $I = \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$.

Підінтегральна функція є непарною відносно $\sin x$, тому можна скористатись підстановкою $\cos x = t$, $-\sin x dx = d \cos x = dt$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(1 + \sin^2 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} \cdot \sin x dx = - \int \frac{2 - \cos^2 x}{2 \cos^2 x - 1} d(\cos x) = \\ &= - \int \frac{2 - t^2}{2t^2 - 1} dt = \int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t^2 - 4}{2t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int dt - \frac{3}{2} \int \frac{1}{2t^2 - 1} dt = \\ &= \frac{1}{2} t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{1}{(\sqrt{2}t)^2 - 1^2} d(\sqrt{2}t) = \frac{1}{2} t - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}t - 1}{\sqrt{2}t + 1} + C = \\ &= \frac{1}{2} t - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}t - 1}{\sqrt{2}t + 1} + C = \frac{1}{2} t + \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}t + 1}{\sqrt{2}t - 1} + C. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$I = \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx = \frac{1}{2} \cos x + \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2} \cos x + 1}{\sqrt{2} \cos x - 1} + C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{\sin(x) + \sin(x)^3}{\cos(2x)} dx \rightarrow \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \operatorname{atanh}(\cos(x) \cdot \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \cdot \cos(x)$$

Щоб одержати результат, який не містить обернену гіперболічну функцію, потрібно зробити заміну за наведеною вище формулою.

Приклад 14. Знайти інтеграл $I = \int \cos^3 x \sin^2 x dx$.

Підінтегральна функція є непарною відносно $\cos x$, тому скористаємось підстановкою $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$.

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x d \sin x = \\ = \int (1 - t^2) \cdot t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \cos(x)^3 \cdot \sin(x)^2 dx \rightarrow \frac{-1}{5} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)^4 + \frac{1}{15} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)^2 + \frac{2}{15} \cdot \sin(x)$$

Одержаний результат відрізняється за формою від результату, одержаному традиційним методом.

Щоб одержати результат у потрібному вигляді, спочатку виконаємо підготовчу роботу і зробимо заміну в „ручному режимі”, а потім знайдемо інтеграл за допомогою програми Mathcad і виконаємо підстановку

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x d \sin x = \int (1 - t^2) t^2 dt.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int (1 - t^2) \cdot t^2 dt \rightarrow \frac{-1}{5} \cdot t^5 + \frac{1}{3} \cdot t^3 \text{ substitute, } t = \sin(x) \rightarrow \frac{-1}{5} \cdot \sin(x)^5 + \frac{1}{3} \cdot \sin(x)^3$$

Приклад 15. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

Підінтегральна функція є парною відносно $\sin x$ і $\cos x$ сукупно, а тому можна скористатись підстановкою $tg x = t$.

$$I = \int \frac{(1+t^2)^2(1+t^2)}{t^4(1+t^2)} dt = \int \left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1 \right) dt = -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = \\ = -\frac{1}{3tg^3 x} - \frac{2}{tg x} + tg x + C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{1}{\sin(x)^4 \cdot \cos(x)^2} dx \rightarrow \frac{-1}{3 \cdot \sin(x)^3 \cdot \cos(x)} + \frac{4}{3 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)} - \frac{8}{3 \cdot \sin(x)} \cdot \cos(x)$$

Одержаний результат відрізняється від результату, одержаним традиційним методом.

Щоб одержати результат у потрібному вигляді, спочатку, за допомогою програми Mathcad, спростимо підінтегральну функцію, виконавши формальні

заміни, а потім знайдемо інтеграл від спрощеної функції за допомогою програми Mathcad і виконаємо підстановку.

Лістинг запланованих робіт має вигляд:

$$\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \quad x = \operatorname{arctg} t \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \int \frac{1}{\sin(x)^4 \cdot \cos(x)^2} dx \quad \frac{1}{\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+t^2}} \operatorname{simplify} \rightarrow \frac{1}{t^4} \cdot (1+t^2)^2 \\ \int \frac{1}{t^4} \cdot (1+t^2)^2 dt \rightarrow t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3 \cdot t^3} \operatorname{substitute}, t = \tan(x) \rightarrow \tan(x) - \frac{2}{\tan(x)} - \frac{1}{3 \cdot \tan(x)^3} \end{array}$$

Результати співпадають.

6.3. Інтегрування деяких типів функцій, що містять ірраціональності

Інтеграл вигляду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{l}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$ за допомогою підста-

новки $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ при $ad \neq bc$, де n спільний знаменник дробів $\frac{m}{l}, \dots, \frac{r}{s}$ зводиться до інтеграла від раціональної функції від t .

Зокрема, при $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$ інтеграл і підстановка мають

вигляд: $\int R\left(x, x^{\frac{m}{l}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$, $t^n = x$.

Приклад 16. Знайти інтеграл $I = \int \frac{1}{(2x+1)^{\frac{2}{3}} + (2x+1)^{\frac{1}{2}}} dx$.

Оскільки спільним знаменником дробів $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ є число $n=6$, то виконаємо підстановку $2x+1 = t^6$, $dx = 3t^5 dt$. Отже,

$$I = \int \frac{3t^5 dt}{t^4 + t^3} = 3 \int \frac{t^2 dt}{t+1} = 3 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t+1} dt = 3 \int \left(t + 1 + \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{3}{2} t^2 + 3t + 3 \ln|t+1| + C. \text{ Пове}$$

рнемося до старої змінної. Оскільки $t = \sqrt[6]{2x+1} = (2x+1)^{\frac{1}{6}}$, то

$$I = \frac{3}{2} (2x+1)^{\frac{1}{3}} + 3(2x+1)^{\frac{1}{6}} + 3 \ln \left((2x+1)^{\frac{1}{6}} - 1 \right) + C.$$

Звертаємо увагу на те, що безпосереднє застосування програми Mathcad для знаходження інтегралів даного типу дає дуже довгий аналітичний вираз, який не піддається копіюванню, а тому не зручний для використання (у цьому легко пересвідчитись). Тому, при знаходженні інтегралів даного типу, пропонується зробити заміну в ручному режимі, потім, за допомогою команди substitute, повернутись до старої змінної.

Лістинг запланованих робіт може мати вигляд:

$$I(x) := \int \frac{1}{(2 \cdot x + 1)^{\frac{2}{3}} - (2 \cdot x + 1)^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$2x + 1 = t^6 \quad x = \frac{1}{2} \cdot (t^6 - 1) \quad dx = 3t^5 dt \quad t := \sqrt[6]{2x + 1}$$

$$I(t) := \int \frac{3t^5}{t^4 - t^3} dt \rightarrow 3 \cdot t + \frac{3}{2} \cdot t^2 + 3 \cdot \ln(t - 1)$$

$$I(t) \text{ substitute, } t = \sqrt[6]{2 \cdot x + 1} \rightarrow 3 \cdot (2 \cdot x + 1)^{\frac{1}{6}} + \frac{3}{2} \cdot (2 \cdot x + 1)^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot \ln \left[-1 + (2 \cdot x + 1)^{\frac{1}{6}} \right]$$

Одержані результати співпадають.

Приклад 17. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$.

Перетворимо квадратний тричлен до вигляду $x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 1$ і зробимо заміну $x - 3 = t$, $dx = dt$. Тоді

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) + C = \ln(x - 3) + \sqrt{x^2 - 6x + 8} + C.$$

Лістинг запланованих робіт може мати вигляд:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}} dx \rightarrow \ln \left[x - 3 + \left(x^2 - 6x + 8 \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Завдання для самостійної роботи

1. Користуючись методом безпосереднього інтегрування, обчислити невизначені інтеграли.

1) $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}} dx$, 2) $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$, 3) $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$, 4) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$.

2. Користуючись інваріантністю формули інтегрування (підведення під знак диференціала), обчислити інтеграли.

$$1) \int (x+9)^{15} dx, \quad 2) \int \frac{dx}{(3x-2)^7}, \quad 3) \int \sqrt{3-2x} dx, \quad 4) \int \frac{x^4}{\sqrt{3+2x^5}} dx.$$

3. Застосовуючи потрібну заміну змінної, обчислити інтеграли.

$$1) \int \frac{\sqrt{x}}{x+3} dx, \quad 2) \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx, \quad 3) \int \frac{e^{2x}}{e^x+5} dx, \quad 4) \int \frac{1}{\sqrt{3+e^x}} dx.$$

4. Застосовуючи інтегрування частинами, обчислити інтеграли.

$$1) \int x \sin 2x dx, \quad 2) \int x \cos^2 x dx, \quad 3) \int \frac{x}{\cos^2 x} dx, \quad 4) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx.$$

5. Обчислити інтеграли, що містять дробово-раціональні функції.

$$1) \int \frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)} dx, \quad 2) \int \frac{x^3}{x^2-4} dx, \quad 3) \int \frac{1}{x^2(x-1)} dx, \quad 4) \int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx, \\ 5) \int \frac{1}{x(x^2+2)} dx, \quad 6) \int \frac{x}{x^3-1} dx, \quad 7) \int \frac{1}{x^4+2x^2+1} dx.$$

6. Обчислити інтеграли від тригонометричних функцій.

$$1) \int \cos^3 x \sin x dx, \quad 2) \int \sin^3 x dx, \quad 3) \int \frac{1}{\sin^3 x} dx, \quad 4) \int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} dx, \\ 5) \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx, \quad 6) \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx, \quad 7) \int \frac{1}{3+2\sin x+\cos x} dx.$$

7. Обчислити інтеграли від ірраціональних функцій.

$$1) \int \frac{\sqrt{x}}{3x-\sqrt[3]{x^2}} dx, \quad 2) \int \frac{1}{x(\sqrt{x}-\sqrt[5]{x})} dx, \quad 3) \int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1} dx, \quad 4) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} dx.$$

Індивідуальні завдання

Користуючись програмою Mathcad обчислити інтеграли наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

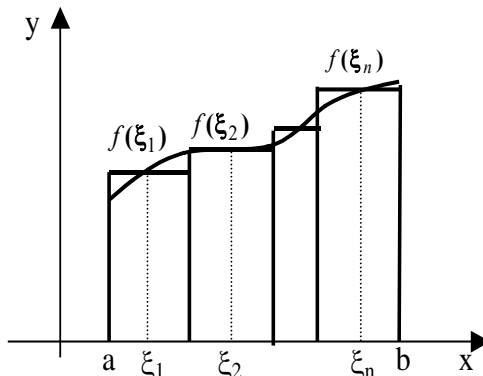
№	Внесення під знак диференціалу	Інтегрування частинами	Розклад на прості дроби	Інтегрування тригонометричних функцій	Інтегрування ірраціональних функцій
1	$\int 3^{2x} dx$	$\int \ln(x^2 + 1) dx$	$\int \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)}$	$\int \sin 3x \cos x dx$	$\int \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$
2	$\int e^{2-x^3} x^2 dx$	$\int x e^{3x} dx$	$\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 5}$	$\int \cos^2 3x dx$	$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1} + 1} dx$
3	$\int \cos(2x - 3) dx$	$\int x \sin 2x dx$	$\int \frac{x^3 dx}{x^2 - 4}$	$\int \sin^2 x dx$	$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$
4	$\int e^x \sin(e^x) dx$	$\int x 3^x dx$	$\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$	$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$	$\int \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1} - 1} dx$
5	$\int \sin^5 x \cos x dx$	$\int x \arctg x dx$	$\int \frac{dx}{x^2 - 8x}$	$\int \sin 3x \sin x dx$	$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx$
6	$\int \sin(4 - 5x) dx$	$\int x e^x dx$	$\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$	$\int \cos^5 x dx$	$\int \frac{\sqrt{x}}{3x - \sqrt[3]{x^2}} dx$
7	$\int 2e^{-3x} dx$	$\int x \cos 5x dx$	$\int \frac{x^3}{x-1} dx$	$\int \sin^3 x dx$	$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx$
8	$\int \frac{1}{e^x x^{-2}} dx$	$\int x e^{-x} dx$	$\int \frac{(x-4) dx}{(x-2)(x-3)}$	$\int \sin^4 x dx$	$\int \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}} dx$
9	$\int x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3 + 2} dx$	$\int \arccos x dx$	$\int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} dx$	$\int \sin^3 x \cos^2 x dx$	$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$
10	$\int (1-x^2)^7 x dx$	$\int x e^{\frac{x}{3}} dx$	$\int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx$	$\int \cos^3 x \sin x dx$	$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$
11	$\int \cos^3 x \sin x dx$	$\int \sqrt{x} \ln x dx$	$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$	$\int \cos^3 x dx$	$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx$
12	$\int \frac{1}{x \ln^3 x} dx$	$\int (2x+1) \sin x dx$	$\int \frac{(3x^2 + 2x - 3) dx}{x^3 - x}$	$\int \cos^7 x dx$	$\int \frac{\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt[6]{x^7} + \sqrt[4]{x^3}} dx$
13	$\int (x+19)^{19} dx$	$\int x^3 \ln x dx$	$\int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2} dx$	$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$	$\int \frac{\sqrt{x+4} + 1}{\sqrt[3]{x}} dx$

VII. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

1. Обчислення визначеного інтеграла

Нехай на відрізку $[a, b]$ визначена неперервна функція $y = f(x)$ така, що $f(x) \geq 0$ для усіх $x \in [a, b]$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n частин: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Довжина цих частин $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Виберемо точки ξ_k такі, що $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ і обчислимо $f(\xi_k)$. Інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ називається сума вигляду

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (1)$$



Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ називається границя інтегральної суми (1) при умові, що довжина найбільшого із елементарних відрізків прямує до нуля

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (2)$$

Геометрично інтегральна сума або визначений інтеграл (у даному випадку) виражають площу криволінійної трапеції.

2. Основні властивості визначеного інтеграла

$$1. \int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx;$$

$$2. \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$3. \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx;$$

$$4. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad c \in [a, b];$$

6. Якщо m та M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ ($a < b$), тобто $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

7. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, де $a < b$ то знайдеться таке значення $\xi \in [a, b]$, що виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Число $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ називається середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

3. Правила обчислення визначеного інтеграла

Формула Ньютона-Лейбніца. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то визначений інтеграл обчислюється за формулою

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (3)$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. Зробимо підстановку $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна разом з своєю похідною $\varphi'(t)$ на $\alpha \leq t \leq \beta$, $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$. Тоді, якщо складна функція $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha, \beta]$, то має місце рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (4)$$

Інтегрування частинами. Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a, b]$. Тоді має місце формула

$$\int_a^b u dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (5)$$

4. Невласні інтеграли

Невласними інтегралами називаються: інтеграли з нескінченими межами; інтеграли від необмежених функцій.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена й інтегровна на довільному відрізку $[a, t]$, Якщо існує скінчена границя $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx$, то її називають *невласним інтегралом першого роду* від функції $f(x)$ на інтервалі $[a, +\infty]$ і позначають $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Якщо границя існує і скінчена, то невластний інтеграл називається *збіжний*, у протилежному випадку – *розбіжний*.

Аналогічно визначаються невластні інтеграли на інтервалах $(-\infty, b]$ і $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^c f(x)dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_c^t f(x)dx.$$

Точку $x = b$ називають *особливою точкою функції $f(x)$* , якщо $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow b-0$.

Нехай функція неперервна на відрізку $[a, b - \delta]$ при довільному $\delta > 0$ такому, що $b - \delta > a$. Тоді, якщо існує скінчена границя $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx$, то

її називають *невласним інтегралом другого роду* і записують:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx.$$

Аналогічно, якщо особливою точкою є точка $x = a$, то невластний інтеграл визначається так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Якщо вказані границі скінчені, то кажуть, що інтеграли збігаються.

Якщо вказані границі нескінченні або не існують, то інтеграли також називаються невластними інтегралами, але розбіжними.

5. Обчислення визначеного інтеграла в програмі Mathcad

В програмі Mathcad для обчислення визначених інтегралів є оператор

$$\int_a^b f(x) dx$$

Для введення визначеного інтеграла потрібно на полиці **Calculus** клацнути ЛКМ на відповідній кнопці, у відповідні знакомісця ввести функцію, ім'я змінної інтегрування та межі інтегрування. Після введення визначеного інтеграла його можна обчислити точно або наближено (із певною кількістю десяткових знаків після коми).

Для *точного* обчислення визначеного інтеграла потрібно, після його введення, клацнути на кнопці символічного знаку дорівнює "→" і натиснути клавішу "Enter".

Для *наближеного* обчислення інтеграла потрібно, після його введення, натиснути клавішу "=".

Зауваження 1. У випадку, коли результат є скінчене десяткове число, результати, одержані обома способами, співпадають.

Зауваження 2. Для одержання результату із потрібною кількістю знаків після коми потрібно у головному меню ЛКМ клацнути на кнопці **Формат**, а далі у випадаючому меню – на кнопці **Результат...** Після цього з'явиться вікно **Формат результату**, в якому вибрати формат **Decimal** і встановити потрібну кількість десяткових знаків (максимальна кількість знаків після коми – 15).

Приклад 1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_2^3 3x^2 dx, \quad \text{б) } \int_0^\pi \sin x dx, \quad \text{в) } \int_1^{\ln 2} x e^x dx, \quad \text{г) } \int_0^\pi x^4 \sin \frac{x}{2} dx.$$

Лістинг для знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int_2^3 x^2 dx \rightarrow \frac{19}{3} \quad \int_2^3 x^2 dx = 6.33 \quad \int_2^3 x^2 dx = 6.33333 \quad \int_2^3 x^2 dx = 6.33333333333333$$

$$\int_0^\pi \sin(x) dx \rightarrow 2 \quad \int_0^\pi \sin(x) dx = 2$$

$$\int_1^{\ln(2)} x \cdot \exp(x) dx \rightarrow 2 \cdot \ln(2) - 2 \quad \int_1^{\ln(2)} x \cdot \exp(x) dx = -0.61371$$

$$\int_0^\pi x^4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx \rightarrow 16 \cdot \pi^3 - 384 \cdot \pi + 768 \quad \int_0^\pi x^4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = 57.7288$$

$$\int_1^2 x^3 \exp(2x) dx \rightarrow \frac{17}{8} \cdot \exp(4) - \frac{1}{8} \cdot \exp(2) \quad \int_1^2 x^3 \exp(2x) dx = 115.0974$$

Як правило, програма Mathcad визначені інтеграли обчислює без проблем. Однак, у деяких випадках, точні значення можуть отримуватись у вигляді довгих виразів, якими не дуже зручно користуватись. У цьому випадку доцільно виконати заміну змінної.

Приклад 2. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 \frac{\sqrt[6]{x} + 10}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$.

Даний інтеграл містить ірраціональність, якої можна уникнути, зробивши підстановки: $x = t^6$; $dx = 6t^5 dt$; при $x = 1$, $t = 1$; при $x = 2$, $t = \sqrt[6]{2}$.

Після цього інтеграл набуде вигляду $\int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{t + 10}{t^3 + t^2} \cdot 6t^5 dt$, який обчислюється

значно простіше.

Лістинг для знаходження вихідного і перетвореного інтеграла має вигляд:

Результат обчислення інтеграла за допомогою символічного знака дорівнює ■ →

$$\int_1^2 \frac{\sqrt[6]{x} + 10}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$$

$$-18 \cdot \operatorname{Re}(\operatorname{atanh}(\sqrt{2})) + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{2^2} + 18 \cdot \ln(-1 + \sqrt[6]{2}) + 54 \cdot \sqrt[6]{2} - 9 \cdot \ln(\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{2} + 1) + \blacksquare$$

$$\blacksquare + 18 \cdot \sqrt{2} - 18 \cdot \ln(1 + \sqrt[6]{2}) + 9 \cdot \ln(\sqrt[3]{2} - \sqrt[6]{2} + 1) - 27 \cdot \sqrt[3]{2} - 18 \cdot \ln(-1 + \sqrt[3]{2}) + \blacksquare$$

$$\blacksquare + 9 \cdot \ln(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1) + 54 \cdot \ln(2) - \frac{93}{2}$$

Результат обчислення перетвореного інтеграла за допомогою символічного знака дорівнює

$$\int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{t+10}{t^3+t^2} \cdot 6t^5 dt \rightarrow \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{2^2} + 18 \cdot \sqrt{2} - 27 \cdot \sqrt[3]{2} + 54 \cdot \sqrt[6]{2} - 54 \cdot \ln(1 + \sqrt[6]{2}) - \frac{93}{2} + 54 \cdot \ln(2)$$

Результат обчислення вихідного і перетвореного інтеграла за допомогою клавіші дорівнює "="

$$\int_1^2 \frac{\sqrt[6]{x} + 10}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx = 4.7228 \qquad \int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{t+10}{t^3+t^2} \cdot 6t^5 dt = 4.7228$$

Зауважимо, що при обчисленні вихідного інтеграла за допомогою символічного знака дорівнює, із за значної довжини результату, останній довелось розірвати на три частини.

6. Обчислення невластних інтегралів

Обчислення невластних інтегралів здійснюється аналогічно, як і обчислення визначених інтегралів.

Приклади обчислення невластних інтегралів першого та другого роду проілюстровано на нижче наведеному лістингу

Невластні інтеграли першого роду

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = 0.5 \qquad \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \rightarrow \pi \qquad \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x} dx \rightarrow \infty$$

Невластні інтеграли другого роду

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \qquad \int_0^1 \frac{1}{x} dx \rightarrow \infty \qquad \int_2^4 \frac{1}{(x-3)^2} dx \rightarrow \infty \qquad \int_2^3 \frac{1}{(x-3)^2} dx + \int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2} dx \rightarrow \infty$$

7. Обчислення площ плоских фігур

1. Площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x) \geq 0$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx. \qquad (7)$$

Приклад 3. Знайти площу фігури, обмежену параболою $y = 4x - x^2$ і віссю Ox .

Парабола перетинає вісь Ox в точках $O(0,0)$ і $M(4,0)$, тому площу фігури можна знайти за формулою (7). Лістинг має вигляд

$$S := \int_0^4 (4 \cdot x - x^2) dx \rightarrow \frac{32}{3}$$

2. Площа фігури, обмеженої лініями $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ ($f_2(x) \geq f_1(x)$), $x = a$, $x = b$, знаходиться за формулою

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (8)$$

Приклад 4. Знайти площу фігури, обмежену параболою $y = (x-1)^2$ і гіперболою $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.

Для обчислення площі фігури спочатку потрібно знайти межі інтегрування. Для цього потрібно знайти абсциси точок перетину параболи і гіперболи, тобто розв'язати рівняння $x^2 - \frac{(x-1)^4}{2} = 1$ або систему рівнянь:

$y = (x-1)^2$, $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$. Таким чином, межами інтегрування є: $a = x_1 = 1$, $b = x_2 = 3$. Після цього площу фігури можна знайти за формулою (8). Лістинг розв'язання задачі має вигляд

$x^2 - \frac{(x-1)^4}{2} = 1$ solve, x \rightarrow $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$

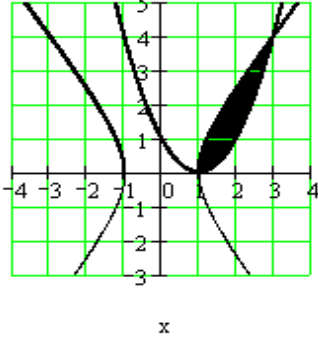
або

Given $y = (x-1)^2$ $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ Find(x,y) \rightarrow $\begin{pmatrix} 1 & 3 & i & -i \\ 0 & 4 & -2i & 2i \end{pmatrix}$

$\int_1^3 \sqrt{2 \cdot (x^2 - 1)} - (x-1)^2 dx = 2.087$

або

$S := \int_1^3 \sqrt{2 \cdot (x^2 - 1)} - (x-1)^2 dx \rightarrow \frac{10}{3} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \ln(3 \cdot \sqrt{2} + 4) + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \ln(2)$ S = 2.087

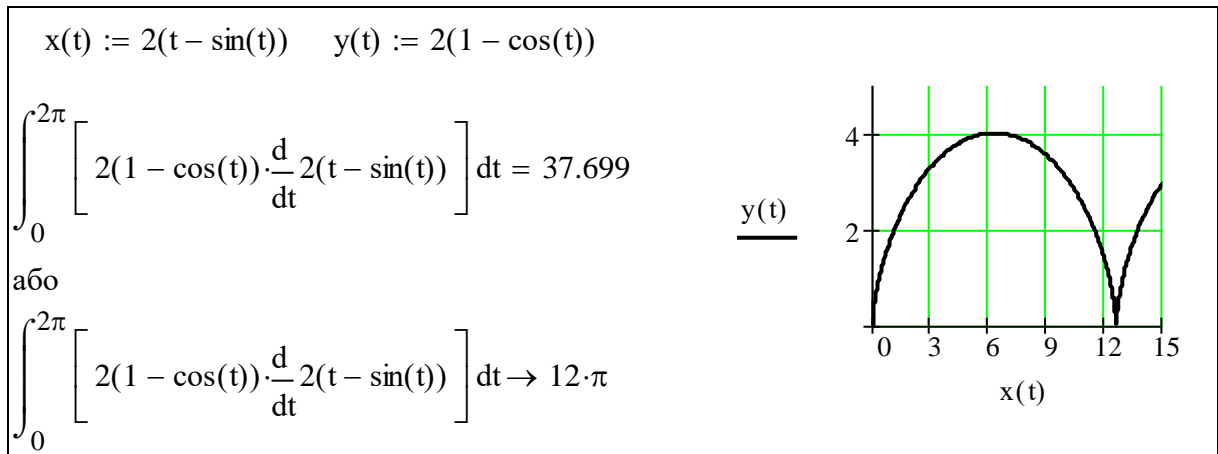


3. Якщо лінія задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією лінією, віссю Ox та прямими $x = a$, $x = b$, знаходиться за формулою

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt. \quad (9)$$

Приклад 5. Знайти площу фігури, обмежену однією аркою циклоїди $x(t) = 2(t - \sin(t))$, $y(t) = 2(1 - \cos(t))$ і віссю Ox .

У цьому випадку площу фігури можна знайти за формулою (9), де $x'(t) = 2(1 - \cos(t))$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$. Лістинг розв'язання задачі має вигляд

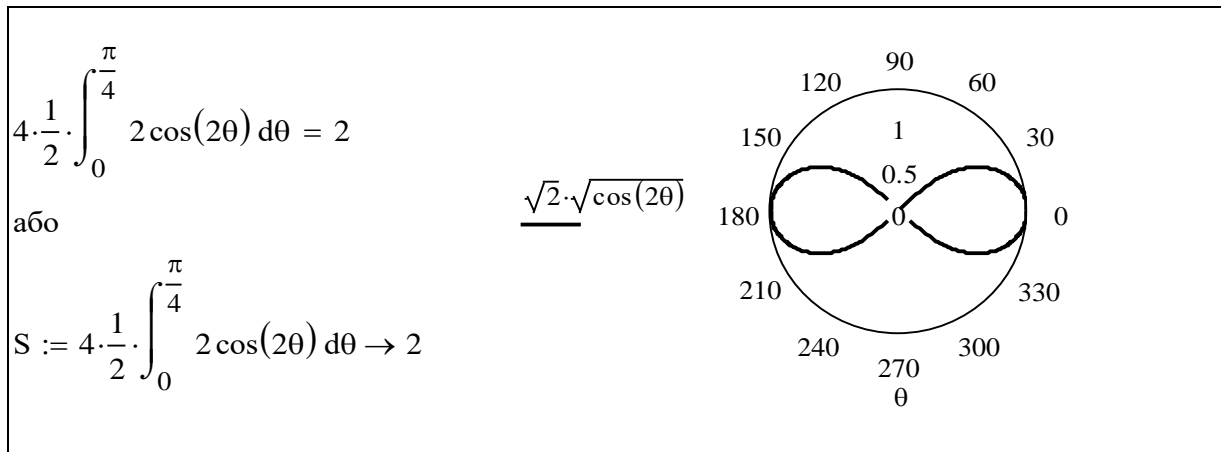


4. Площа криволінійного сектора, обмеженого кривою, заданою в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\theta)$ і двома полярними кутами $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ ($\theta_1 < \theta_2$), обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta) d\theta. \quad (10)$$

Приклад 6. Знайти площу фігури, обмежену лемніскатою $\rho^2 = 2 \cos 2\theta$.

У цього випадку площу фігури можна знайти за формулою (10). Четвертій частині шуканої площі відповідає зміна θ від 0 до $\frac{\pi}{4}$. Лістинг розв'язання задачі має вигляд



8. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

1. Якщо крива задана явно $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, тоді її довжина обчислюється за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (11)$$

Приклад 7. Знайти довжину дуги кривої $y^2 = x^3$ від $x=0$ до $x=1$ ($y \geq 0$).

З рівняння кривої знаходимо: $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Довжину дуги знаходимо за формулою (11). Лістинг розв'язання задачі має вигляд

$$L := \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4} \cdot x} dx \rightarrow \frac{13}{27} \cdot \sqrt{13} - \frac{8}{27} \quad \text{або} \quad \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4} \cdot x} dx = 1.44$$

2. Якщо крива задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, тоді її довжина обчислюється за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (12)$$

Приклад 8. Знайти довжину дуги кривої $x = \cos^5 t$, $y = \sin^5 t$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Знайдемо похідні за параметром: $x' = -5\cos^4 t \sin t$, $y' = 5\sin^4 t \cos t$. Довжину дуги знаходимо за формулою (12). Якщо знайдені похідні підставити у формулу (12), то одержимо результат, наведений на наступному лістингу

$$L := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-5\cos(t)^4 \cdot \sin(t))^2 + (5\sin(t)^4 \cdot \cos(t))^2} dt \rightarrow \frac{5}{8} \cdot \sqrt{4} + \frac{5}{48} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{Re} \left(\operatorname{atanh} \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \right) \right)$$

$$\text{або} \quad \frac{5}{8} \cdot \sqrt{4} + \frac{5}{48} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{Re} \left(\operatorname{atanh} \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \right) \right) = 1.725$$

Виконаємо перетворення підкореневого виразу

$$\begin{aligned} (-5 \cdot \cos(t)^4 \cdot \sin(t))^2 + (5 \cdot \sin(t)^4 \cdot \cos(t))^2 &= 25 \cdot \sin(t)^2 \cdot \cos(t)^8 + 25 \cdot \cos(t)^2 \cdot \sin(t)^8 = \blacksquare \\ 25 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin(2 \cdot t)^2 \cdot (\cos(t)^6 + \sin(t)^6) &= 25 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin(2 \cdot t)^2 \cdot (\cos(t)^4 - \cos(t)^2 \cdot \sin(t)^2 + \sin(t)^4) = \blacksquare \\ 25 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin(2 \cdot t)^2 \cdot [(\cos(t)^4 + 2 \cdot \cos(t)^2 \cdot \sin(t)^2 + \sin(t)^4) - 3 \cos(t)^2 \sin(t)^2] &= \blacksquare \\ 25 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin(2 \cdot t)^2 \cdot (1 - 3 \cdot \cos(t)^2 \cdot \sin(t)^2) &= 25 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin(2 \cdot t)^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \sin(2t)^2 \right) \end{aligned}$$

Тоді одержимо результат, наведений на наступному лістингу

$$L := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{2} \cdot \sin(2 \cdot t) \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{3}{4} \cdot \sin(2 \cdot t)\right)^2} dt \rightarrow \frac{5}{4} + \frac{5}{96} \cdot \sqrt{3} \cdot \ln(3) - \frac{5}{48} \cdot \sqrt{3} \cdot \ln(7 \cdot \sqrt{3} - 12)$$

або $\frac{5}{4} + \frac{5}{96} \cdot \sqrt{3} \cdot \ln(3) - \frac{5}{48} \cdot \sqrt{3} \cdot \ln(7 \cdot \sqrt{3} - 12) = 1.725$

Чисельне обчислення інтеграла від спрощеного виразу дає той самий результат

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{2} \cdot \sin(2t) \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin(2t)^2} dt = 1.725$$

3. Нехай гладка крива задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ у полярних координатах, $\alpha \leq t \leq \beta$, тоді її довжина обчислюється за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi. \quad (13)$$

Приклад 9. Знайти довжину дуги кривої $\rho = \sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$, від $\theta_1 = 0$ до $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

Знайдемо похідну $\rho = \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$. Довжину дуги знаходимо за формулою (13). Результат обчислень наведено на наступному лістингу

$$L := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^6\left(\frac{\theta}{3}\right) + \left(\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)^2} d\theta \rightarrow \frac{1}{32} \cdot \frac{(-36 - 14\pi + 21\sqrt{3} + 8\pi\sqrt{3})}{(-7 + 4\sqrt{3})} \cdot \sqrt{16} \quad L = 0.136$$

Якщо виконаємо перетворення підінтегрального виразу, то одержимо результат

$$L := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d\theta \rightarrow \frac{-3}{8} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{4} \cdot \pi \quad L = 0.136$$

9. Об'єм тіла обертання

Об'єм тіла, що утворене обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямими $x = a$ і $x = b$ та віссю Ox ($y = 0$), обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (14)$$

Якщо фігура, обмежена кривими $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$ ($0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$) і прямими $x = a$ і $x = b$, обертається навколо осі Ox , то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx. \quad (15)$$

Приклад 10. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лінією $y = \sqrt{(x-1)^3}$ і прямою $x = 2$.

Скориставшись формулою (14), дістанемо

$$V := \pi \cdot \int_1^2 (x-1)^3 dx \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \pi$$

10. Обчислення площі поверхні обертання

Нехай крива задана неперервною функцією $y = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, обертається навколо осі Ox . Тоді площа поверхні, яка утворюється при обертанні графіка функції $y = f(x)$ навколо осі Ox , обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (16)$$

Приклад 11. Обчислити поверхню тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox дуги синусоїди $y = \sin 2x$ від $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

Знаходимо $f'(x) = 2 \cos 2x$. Тоді, скориставшись формулою (16), одержимо

$$S := 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cdot \sqrt{1 + 4 \cos^2(2x)} dx \rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{4} \cdot \ln(2 + \sqrt{5}) \right) \quad S = 9.292$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_1^3 x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx, \quad 2) \int_0^1 \frac{x dx}{1 + x^4}, \quad 3) \int_1^2 x^3 e^{2x} dx, \quad 4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx, \quad 5) \int_1^{\ln 2} x e^x dx,$$

$$6) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}, \quad 7) \int_0^1 \frac{x + \arctg x}{1 + x^2} dx, \quad 8) \int_3^6 \frac{x + 1}{x \sqrt{x - 2}} dx, \quad 9) \int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2 - 7x + 10},$$

$$10) \int_{-1}^1 \arccos x dx, \quad 11) \int_0^3 \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad 12) \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^3}}.$$

2. Обчислити невласні інтеграли першого роду:

$$1) \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx, \quad 2) \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx, \quad 3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx, \quad 4) \int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx,$$

$$5) \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \quad 6) \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx, \quad 7) \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}, \quad 8) \int_{-\infty}^1 \frac{x dx}{(x^2+1)^2}, \quad 9) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5},$$

$$10) \int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}, \quad 11) \int_{-\infty}^1 \frac{x dx}{1+x^4}, \quad 12) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+8}.$$

3. Обчислити невласні інтеграли другого роду:

$$1) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}, \quad 2) \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}, \quad 3) \int_{0.5}^2 \frac{x dx}{\sqrt{2x-1}}, \quad 4) \int_2^4 \frac{dx}{(x-3)^2}; \quad 5) \int_{-3}^2 \frac{dx}{(x-1)^2};$$

$$6) \int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}; \quad 7) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}; \quad 8) \int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}; \quad 9) \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}; \quad 10) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}};$$

$$11) \int_0^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}; \quad 12) \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}.$$

4. Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

$$1) y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1, x = 4; \quad 2) y = -x^2, x + y + 2 = 0;$$

$$3) y^2 = 4x^3, y = 2x^2; \quad 4) y = \sqrt{x}, y = 0, y = \frac{1}{x^2};$$

$$5) y = e^x - 1, y = e^{2x} - 3, x = 0; \quad 6) y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0$$

$$7) y = x^2 + 2x, y = x + 2; \quad 8) y = \arcsin x, x = 0, y = \frac{\pi}{4}; \quad 9) y^2 = 4x, 4y = x^2;$$

$$10) y = e^x, y = e^{-x}, x = 1; \quad 11) y = 2x - x^2, y = -x;$$

$$12) y^2 + 8x = 16, y^2 - 24x = 48.$$

5. Знайти площу фігури, обмежену трипелюстковою трояндою $\rho = \sin 3\theta$.

Вказівка. Межі інтегрування взяти від $\theta = 0$ до $\theta = \frac{\pi}{6}$, а одержану площу помножити на шість. Побудувати рисунок.

6. Обчислити площу фігури, яка обмежена параболою $y = -x^2 + 4x - 3$ і дотичними до неї в точках $(0; -3)$ і $(3; 0)$. Побудувати рисунок.

7. Обчислити довжини дуг кривих:

- 1) $y = \frac{x^2}{2}$ від $x=0$ до $x=1$; 2) $y = 1 - \ln \cos x$ від $x=0$ до $x = \frac{\pi}{6}$;
 3) $x = \frac{t^3}{3} - t$, $y = t^2 + 2$ від $t=0$ до $t=3$; 4) $\rho = \theta^2$ від $\theta=0$ до $\theta = \pi$;
 5) $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ між точками її перетину з віссю абсцис;
 6) $y = \frac{2}{\pi} \ln \sin \frac{\pi x}{2}$ від $x = \frac{1}{2}$ до $x = \frac{3}{2}$; 7) $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{1}{4}t^4$ від $t=0$ до $t = \sqrt[4]{8}$;
 8) $y = \ln(1-x^2)$ від $x=0$ до $x = \frac{1}{2}$; 9) $y = \ln x$ від $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$;
 10) $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$ від $t=0$ до $t = \frac{\pi}{2}$;
 11) $x = R(\cos t + t \sin t)$, $y = R(\sin t - t \cos t)$ від $t=0$ до $t = \pi$;
 12) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ від $t=0$ до $t=1$.

8. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями:

- 1) $y = \arcsin x$, $x=1$, $y=0$; 2) $y = \sin x$, $x=0$, $x = \frac{\pi}{2}$; 3) $y = \frac{\ln x}{x}$, $x=1$,
 $x=e$; 4) $y = e^x + 6$, $y = e^{2x}$, $x=0$; 5) $y = 4x - x^2$, $y=0$; 6) $y = e^x$,
 $x=0$, $y=0$; 7) $y = \operatorname{arctg} x$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$; 8) $y = xe^x$, $y=0$, $x=1$;
 9) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$; 10) $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$, $x=0$;
 11) $2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$; 12) $y = \ln x$, $x=e$, $x=e^2$.

9. Обчислити площу поверхні тіла, яке утворюється при обертанні навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями:

- 1) $x^2 + y^2 = R^2$ 2) $y^2 = 4ax$, $x=3a$; 3) $y = 2ch\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in [0; 2]$;
 4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 5) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$;
 6) $x = \frac{t^3}{3} - t$, $y = t^2 + 2$, $t \in [0; 2]$; 7) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $t \in [0; \pi]$;
 8) $y = \frac{1}{3}x^3$, $x=0$, $x=a$; 9) $y = e^x$, $x=0$, $x=1$; 10) $y = \cos x$, $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi]$;
 11) $y = \sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$; 12) $y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник.– К: А.С.К., 2006. – 648 с.
2. Вища математика: підручник. У 2 кн.– Кн.1. Основні розділи / Г.Й. Призва та ін. – К.: Либідь, 2003. – 400 с.
3. Вища математика: підручник. У 2 кн.– Кн. 2. Спеціальні розділи / Г.Л. Кулініч та ін. – К.: Либідь, 2003. – 400 с.
4. Вища математика: збірник задач / В.П. Дубовик та ін.– Київ: Вища шк., 1999. – 480 с.
5. Вища математика: збірник задач / П.П. Овчинников та ін. У 2 чт. – Ч. 1. – К.: Техніка, 2004.– 376с.
6. *Король І. Ю.* Методичні вказівки і завдання до лабораторних робіт з курсу „Математичний аналіз. Основні розділи” для студентів 1-го курсу інженерно-технічного факультету, спеціальність „Комп’ютерні системи та мережі” / Король І. Ю., Горват П. П., Гапак О. М., Мигалина С. І. – Ужгород: Видавництво УжНУ „Говерла”, 2007. – 119 с.
7. Овчинников П.П. Вища математика: підручник. У 2 ч. – Ч. 1. – К.: Техніка, 2000.– 792 с.
8. Овчинников П.П. Вища математика: підручник. У 2 чт. – Ч. 2. – К.: Техніка, 2000.– 792 с.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
I. Побудова графіків функції	4
II. Границя та неперервність функції.....	14
III. Похідні та диференціали функції однієї змінної.....	21
IV. Застосування диференціального числення до розкриття невизначеностей. Правило Лопіталю.....	27
V. Застосування похідних до дослідження функції	32
VI. Раціональні та дробово-раціональні функції.....	48
VII. Обчислення невизначеного інтегралу	57
VIII.Визначений інтеграл та його застосування.....	74
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	86

Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний.
Формат видання 60x84/16.
Умов. друк. арк.3.54 Зам. № 22. Наклад 50 прим.
Видруковано ПП «АУТДОР - ШАРК»
88000, м. Ужгород, пл. Жупанатська, 15/1. Тел.: 3-51-25.
E-mail: office@shark.com.ua
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції
Серія 3т № 40 від 29 жовтня 2012 року