ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КОМП’ЮТЕРНИХ СИСТЕМ ТА МЕРЕЖ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Лінійна алгебра та аналітична геометрія

Методичні вказівки та завдання
до практичних занять та самостійної роботи студента
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
інженерно-технічного факультету спеціальностей:
G5 Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка
G7 Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка
G9 Прикладна механіка
G19 Будівництво та цивільна інженерія

Ужгород – 2025

Укладачі: С.І. Балога, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
О.М. Гапак, канд. пед. наук, доцент;
Г.С. Тютюнникова, ст. викладач.

Рецензент: Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, зав. кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу, доцент.

Вища математика. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Методичні вказівки і завдання до практичних занять та самостійної роботи для студентів інженерно-технічного факультету спеціальностей: G5 «Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка», G7 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровні технології та робототехніка», G9 «Прикладна механіка» та G19 «Будівництво та цивільна інженерія» / уклад.: С.І. Балога, О.М. Гапак, Г.С. Тютюнникова. – Ужгород: 2025. – 56 с.

Методичні вказівки розглянуто та схвалено на засіданні кафедри комп'ютерних систем та мереж, протокол № 13 від 25 червня 2025 р. та методичної комісії інженерно-технічного факультету, протокол № 6 від 27 червня 2025 р.

Містить приклади розв'язання типових завдань з детальними поясненнями тем «Лінійної алгебри» та «Аналітичної геометрії» й варіанти завдань для практичних занять та самостійної роботи здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю G5 «Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка», G7 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровні технології та робототехніка», G9 «Прикладна механіка» та G19 «Будівництво і цивільна інженерія».

ВСТУП

Підготовка інженера сьогодні передбачає не лише ґрунтовне опанування основних математичних дисциплін і навички їх традиційного використання, але й вміння застосовувати здобуті знання за допомогою сучасних комп'ютерних технологій.

Досвід викладання курсів «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» і «Математичний аналіз» для інженерів показав, що найкращих результатів у навчанні можна досягти за умови інтеграції інформатики та математики. Поєднання цих напрямів стимулює зацікавленість студентів і сприяє активнішому засвоєнню матеріалу завдяки можливості швидко експериментувати та творчо підходити до вирішення завдань.

Сьогодні існує велика кількість програмних пакетів, які дозволяють оперативно виконувати складні обчислення, аналітичні перетворення та будувати графіки. Це дає змогу зосередитись на формулюванні задач, побудові математичних моделей і дослідженні результатів, що особливо важливо для майбутніх інженерів.

Для підтримки навчання математики рекомендуємо універсальне математичне середовище Mathcad, яке вирізняється простотою використання та широкими можливостями. Mathcad об'єднує текстовий, математичний та графічний редактори, підтримує введення формул у загальноприйнятій нотації, дозволяє виконувати алгебраїчні перетворення, розв'язувати рівняння, знаходити границі та похідні функцій, інтеграли, а також використовувати вбудовану мову програмування для спеціалізованих задач. Крім Mathcad, можна також застосовувати й інші математичні пакети для інженерних обчислень.

Методичні вказівки призначені для використання на практичних заняттях та допомогти студенту у самостійному розв'язуванні задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

Для кожної теми подано короткі теоретичні відомості, приклади розв'язків у середовищі Mathcad і традиційним способом, а також завдання для самостійної роботи.

I. ПОЧАТКОВЕ ЗНАЙОМСТВО З РОБОТОЮ ПРОГРАМИ MATHCAD. СИМВОЛЬНІ ОБЧИСЛЕННЯ

I. Робоче вікно Mathcad.

Вигляд робочого вікна Mathcad після таких операцій показано на рис. 1.

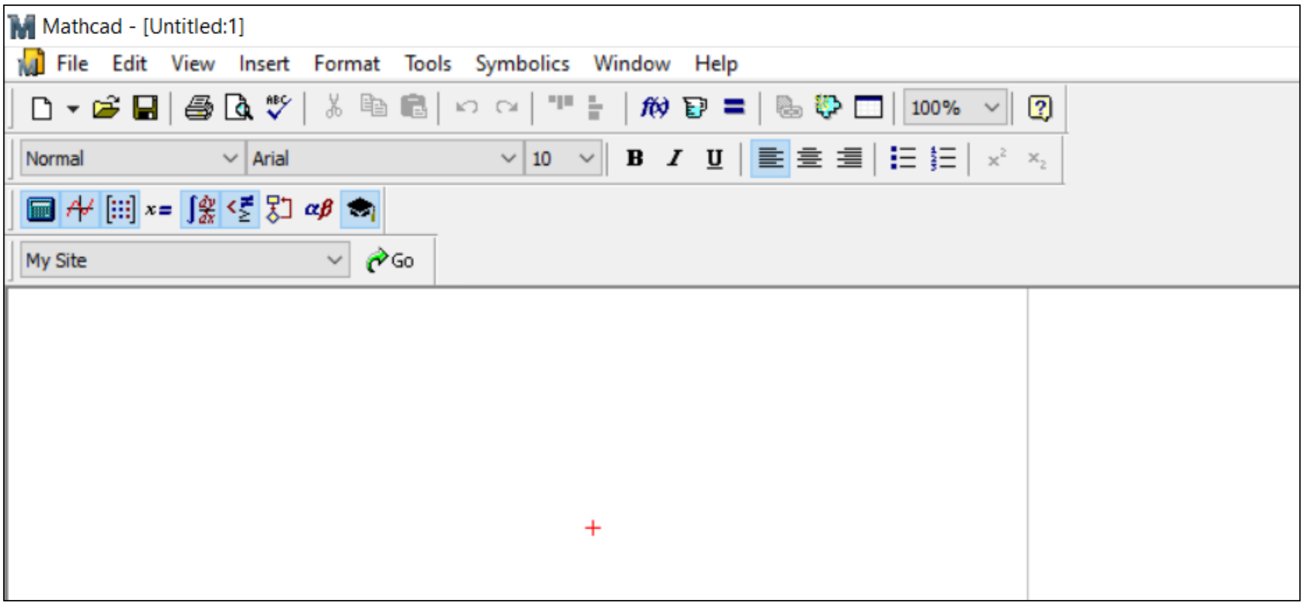


Рисунок 1 – Робоче вікно

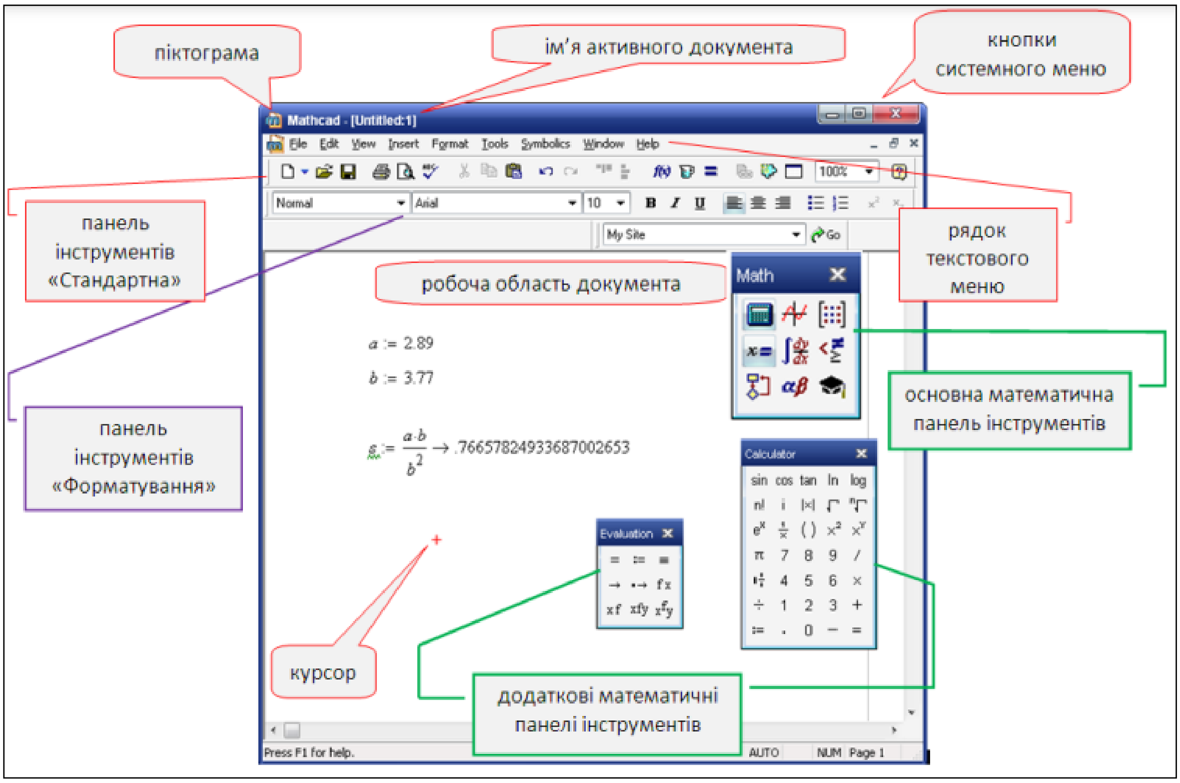


Рисунок 2 – Структура робочого вікна програми

2. Головне меню. Головне меню Mathcad займає верхній рядок робочого вікна (рис. 2.)

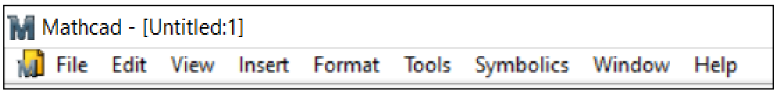


Рисунок 3– Головне вікно

Використовуючи команди цього меню та елементи керування діалогових вікон, які при цьому відкриваються, можна виконати будь-які дії. Нижче перераховані пункти меню Mathcad. Номери пунктів відповідають рис. 2.

1. Кнопка розкриття системного меню робочого вікна Mathcad.
2. File – команди, які використовуються для створення, відкриття, збереження, передачі, друку файлів та інше.
3. Edit – команди, які відносяться для редагування тексту (копіювання, вставка, вилучення фрагментів тексту і т.д.).
4. View – команди, які керують зовнішнім виглядом документу в робочому вікні Mathcad, а також створення файлів анімації.
5. Insert – команди вставки різних об’єктів в документ.
6. Format – команди форматування тексту, формул, графіків тощо.
7. Tools – сервіси.
8. Symbolics – команди символьних обчислень.
9. Window – команди розташування вікон з різними документами на екрані.
10. Help– команди виклику довідкової інформації і доступ до Центра документації.

Зауважимо, що при наведені курсора миші на пункт меню на екрані появляється випадаюче меню з командами даного вікна, які викликаються шляхом натискування лівої клавіші миші.

3. Полички інструментів. Полички інструментів використовуються для швидкого виконання команд, які часто використовуються. В програмі Mathcad є три таких полички: стандартна, інструментів форматування та математична (рис. 4).

- Стандартна (Standart) – дії з файлами, редагування документів, вставка документів тощо.
- Форматування (Formatting) – Фоматування текстів і формул.
- Математична (Math) – вставка математичних символів і операторів в документи.

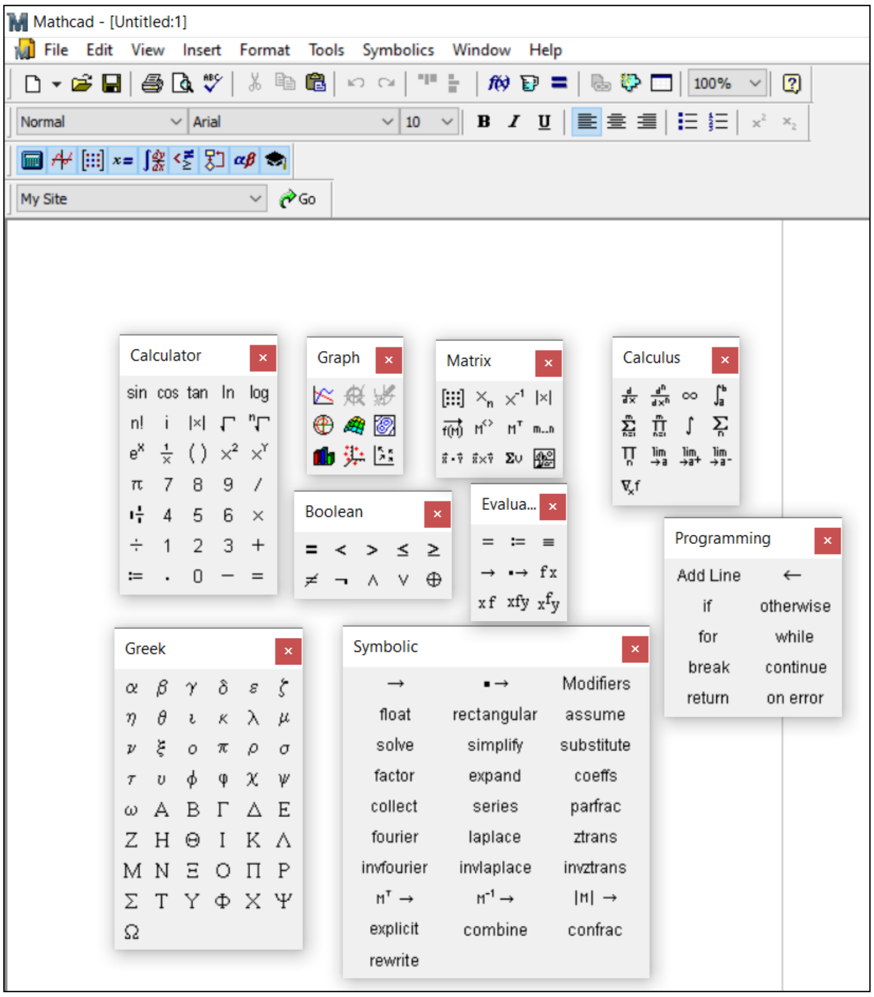


Рисунок 4 – Математична панель інструментів

4. Символьні обчислення та способи їх реалізації. Символьний процесор Mathcad дає можливість розв’язувати багато задач математики аналітично, без застосування чисельних методів і, природно, без похибок обчислень. Зокрема, Mathcad дозволяє проводити основні алгебраїчні перетворення, матричні операції, основні операції математичного аналізу тощо.

Символьні обчислення в Mathcad можна виконувати двома різними способами:

- з допомогою команд меню;
- з допомогою оператора символьного виведення →, зарезервованих слів символьного процесора і звичайних формул (символьних обчислень в реальному часі – live symbolic evaluation).

Перший спосіб більш зручний, коли потрібно швидко одержати який-небудь аналітичний результат для разового використання, не зберігаючи сам хід обчислень.

Другий спосіб більш наглядний, оскільки дає можливість записувати вирази в традиційній математичній формі і зберігати символьні обчислення в документах Mathcad.

Крім того, математичні перетворення, виконувані за першим способом (через меню), відносяться тільки до одного, виділеного в даний момент, виразу. Відповідно, на них не впливають формули, які знаходяться в документі Mathcad вище виділеного виразу. Оператор символьного виведення, навпаки, враховує всі дані документу, що знаходиться вище і видає результат з їх врахуванням.

Для символьних обчислень за допомогою команд призначено головне меню Simbolycs, в якому об'єднані математичні операції, які Mathcad може виконувати аналітично (рис. 6).

Приклад 1. Розкласти на множники вираз $a^3 - b^3$.

Потрібно ввести вираз $a^3 - b^3$ і на поличці **Symbolic** натиснути кнопку **factor**. В результаті таких дій на екрані з'явиться вираз, вигляд якого наведено в другому рядку. Для одержання результату з одержаного виразу потрібно натиснути клавішу $\boxed{\text{Enter}}$.

$$a^3 - b^3 \text{ factor } \rightarrow (a-b)\cdot\left(a^2 + a\cdot b + b^2\right)$$

Приклад 2. Розкласти на множники вираз $sin(\,2x)$.

Набираємо вираз і на поличці **Symbolic** натискамо кнопку **expand**. У результаті таких дій на екрані з'явиться вираз і натискаємо клавішу $\boxed{\text{Enter}}$

Вигляд одержаного результату наведено в другому рядку.

$$\sin(2\cdot x)\ expand \rightarrow 2\cdot\cos\,(x)\cdot\sin\,(x)$$

5. Спрощення виразів (Simplify). Символьний процесор Mathcad може виконувати основні алгебраїчні перетворення такі, як спрощення виразів, розклад їх на множники, символьне додавання і множення. Символьні перетворення виразів можна здійснювати як з допомогою меню, так і за допомогою кнопок полички **Symbolic**.

Символьний процесор Mathcad намагається так перетворити вираз, щоб він мав більш простий вигляд. Для цього використовуються різні арифметичні формули, зведення подібних членів, тригонометричні тотожності, перерахунок обернених функцій і ін. Спрощувати можна як весь вираз, так і його частини. Приклади використання кнопки (команди) **Simplify** наведено на лістингу.

$$e^{3\ln(x)} \text{ simplify } \rightarrow x^3$$

$$a^{2\log(x,a)} \text{ simplify } \rightarrow x^2$$

$$5^{4\log(2,5)} \text{ simplify } \rightarrow 16$$

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} + 4x - 5 \text{ simplify } \rightarrow 5\cdot x - 6$$

$$\frac{3}{190} + \frac{47}{93} \text{ simplify } \rightarrow \frac{9209}{17670}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{3}\cdot n^3 + \frac{1}{2}\cdot n^2 + \frac{1}{6}\cdot n$$

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 \text{ simplify } \rightarrow 385$$

6. Розкладання виразів (Expand). Операція символьного розкладання (розширення) протилежна за змістом операції спрощення. В процесі розкладання розкриваються усі суми і добутки, а складні тригонометричні залежності розкладаються за допомогою тригонометричних тотожностей. Розкладання виразів здійснюється за допомогою команди Expand показано на наступному лістингу.

Розкладання другої суми здійснюється при заданих числових значеннях змінних *m* та *y* і вказівкою змінної, за якою відбувається розкладання.

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^i \text{ expand}, x \rightarrow \frac{-x}{(x-1)} \qquad \sin(5x) \text{ expand} \rightarrow 16\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)^4 - 12\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)^2 + \sin($$

$$m := 4 \qquad y := 2 \qquad \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!\,(m-k)!} x^k y^{3-k} \text{ expand}, x \rightarrow 8 + 16\cdot x + 12\cdot x^2 + 4\cdot x^3 + \frac{1}{2}\cdot x^4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \text{ expand}, n \rightarrow 2\cdot\cos(x)^2 - 2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ expand}, n \rightarrow \sinh(x)$$

7. Розкладання на множники (Factor). Розкладання виразів на множники здійснюється або за допомогою команди Factor і символьного знака рівності "→". Ця операція дає можливість розкласти цілі числа на прості множники, поліноми у вигляді добутку більш простих поліномів, а дроби об'єднує в один дріб.

Приклади використання операції **Factor,** наведено на лістингу.

$$2968 \text{ factor} \rightarrow 2^3\cdot 7\cdot 53 \qquad 1\frac{1}{6} + \left(4\frac{5}{7}\right) + \frac{3}{5} \text{ factor} \rightarrow 6\frac{101}{210}$$

$$4\cdot x^4 - 16\cdot x^3 + 3x^2 + 4x - 1 \text{ factor} \rightarrow (2\cdot x+1)\cdot(2\cdot x-1)\cdot\left(x^2 - 4\cdot x + 1\right)$$

8. Символьне розв'язування алгебраїчних рівнянь і нерівностей за допомогою команди Solve.

Звернемо увагу на те, що при введенні в рівняння знаку «=» (дорівнює) і нуль вводити не потрібно, а знаки нерівностей вводяться з полички **Boolean.** Лістиг розв'язання даної задачі має вигляд

$$x^3 - 6x^2 - 39x - 10 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -2+\sqrt{3} \\ -2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$x^3 - 6x^2 - 39x - 10 \ge 0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix} \left(-2-\sqrt{3} \le x\right)\cdot\left(x \le -2+\sqrt{3}\right) \\ 10 \le x \end{bmatrix}$$

9. Символьне розв'язування деяких рівнянь та їх систем за допомогою обчислювального блоку.

Деякі типи алгебраїчних рівнянь та їх систем можна розв'язати точно за допомогою обчислювального блоку **Given – Find** і символьного знаку рівності "→".

Приклади розв'язання рівняння з одним невідомим і системи двох рівнянь з двома невідомими наведено на лістингу.

Given $x^2 - 39x + 74 = 0$ $\mathrm{Find}(x) \rightarrow (2 \quad 37)$	Given $\frac{2}{x} + \frac{y}{3} = 3$ $\frac{x}{2} + \frac{3}{y} = \frac{3}{2}$ $\mathrm{Find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Користуючись засобами Mathcad виконати наступні завдання: спрощення виразів за допомогою операції **Simplify**; розкладання складних виразів за допомогою операції **Expand**; розкладання на множники за допомогою операції **Factor**. Варіанти індивідуальних завдань наведено в табл.1. Номер варіанту за списком.

Таблиця 1

N п/п	**Simplify**	**Expand**	**Factor**
1	$e^{4\ln x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \cdot \ln 3)^n}{n!}$	$x^2 - 4x + 4$; 3242
2	$3^{3\log_3 x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$2x^2 - 12x + 10$; 840
3	$\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$x^3 + 3x^2 - 60x - 224$; 2574
4	$\log_2 2^x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}(2n+1)}{n!}$	$8x^2 - 16x - 24$; 2772
5	$\frac{23}{12} + \frac{34}{23}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x^3 + 15x^2 + 47x - 63$; 1188
6	$\frac{x^2 - y^2}{x - y}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$11x^2 - 22x - 165$; 7560
7	$(x+2)^2 - x^2 - 2x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$	$x^3 - 12x^2 + 47x - 60$; 1400
8	$\frac{12}{64} + \frac{13}{16}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$	$3x^2 - 6x - 72$; 6468
9	$\log_{2^x} 2$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$	$2x^2 - 2x - 12$; 13464

Таблиця 1

N п/п	**Simplify**	**Expand**	**Factor**
10	$5^{log_5 3x}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$	$10x^2 + 83x - 63$; 728
11	$e^{4\,ln\,x^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n (n^2+1)}{n!}$	$x^2 + 24x - 385$; 1989
12	$\frac{x^3-8}{x-2}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+1)}{2^n}$	$x^3-6x^2+12x-8$; 17842
13	$\frac{10x^2 + 83x - 63}{x+9}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$	x^4-2x^2-8; 37890
14	$\frac{112}{64}+\frac{13}{116}$	$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$	$x^4-x^3-11x^2+9x+18$; 25252
15	$\frac{x^4-2x^2-8}{x-2}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$	$x^2-2003x-2004$; 5448

Завдання 2. Користуючись засобами Mathcad, виконати наступні завдання: за допомогою **Solve** розв’язати задані рівняння та нерівності; за допомогою блоку **Given – Find** розв’язати задані рівняння та системи рівнянь. Варіанти індивідуальних завдань наведено в табл.2. Номер варіанту за списком.

Таблиця 2

1	$x^2+\frac{9x^2}{(x-3)^2}=40;$ $7^{x+2}+4\cdot 7^{x-1}=347$	$2x^2-12x+10\le 0$	$\begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=8\\ \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=6\end{cases}$
2	$x^3-6x^2+11x-6=0;$ $\frac{lg\,x}{lg(\,x+1)}=-1$	$x^3-6x^2+11x-6\ge 0$	$\begin{cases}\frac{2}{x-y}+\frac{8}{x+y}=2\\ \frac{6}{x-y}-\frac{16}{x+y}=1\end{cases}$
3	$2x^2-12x+10=0;$ $lg(\,152+x^3)-3\,lg(\,x+2)=0$	$2x^2-7x+6>0$	$\begin{cases}\frac{2}{x-y}+\frac{8}{x+y}=2\\ \frac{6}{x-y}+\frac{1}{x+y}=2\end{cases}$
4	$x^2+25x+84=0;$ $\frac{3}{lg\,x-1}-(lg\,x+1)=0$	$25x^2+30x+9>0$	$\begin{cases}x+y=15\\ x^2-y^2=31\end{cases}$
5	$x^3+15x^2+47x-63=0;$ $\frac{1}{5-lg\,x}+\frac{2}{1+lg\,x}=1$	$4x^2-12x+9\le 0$	$\begin{cases}x+y=3\\ x^3+y^3=9\end{cases}$
6	$11x-5x^2+6=0;$ $lg\sqrt{5x-4}+lg\sqrt{x+1}=2+lg\,0.18$	$11x-5x^2+6<0$	$\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{10}{3}\\ x^2-y^2=8\end{cases}$

7	$x^2+3.1x+0.3=0;$ $log_5(3x-11)+log_5(x-27) = 3+log_5 8$	$x^3+15x^2+47x-63<0$	$\begin{cases}\frac{7}{x}+\frac{y}{5}=28\\ \frac{x}{7}+\frac{5}{y}=5\end{cases}$
8	$5x^2+34x-7=0;$ $lg\sqrt{x+3}=1-\frac{1}{2}lg(x+4)$	$3x^2+5x-2\geq 0$	$\begin{cases}\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=8\\ \frac{1}{x}+\frac{4}{y}=6\end{cases}$
9	$x^3+8x^2-91x-98=0;$ $\frac{lg(9-x^3)}{lg(3-x)}=3$	$x^3+6x^2+11x+6>0$	$\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=8\\ x+y=5\end{cases}$
10	$x^3+9x^2+26x+24=0$ $lg(5-x)-\frac{1}{3}lg(35-x^3)=0$	$x^3+4x^2-39x+54<0$	$\begin{cases}x+y=5\\ x^2+y^2=25\end{cases}$
11	$x^3+4x^2-39x+54=0$ $lg(10x)\,lg(0.1x)=lg(x^3)-1$	$x^3+9x^2+26x+24>0$	$\begin{cases}2x+y=1\\ x^2+y^2=3\end{cases}$
12	$5x^2+34x-7=0;$ $lg(x-5)^2+lg(x+6)^2=0$	$5x^2+34x-7>0$	$\begin{cases}2x-y=19\\ x-y=60\end{cases}$
13	$3x^2+5x-2=0;$ $lg(x-3)+lg(x-7)=8$	$x^3+8x^2-91x-98<0$	$\begin{cases}x+y=7\\ y=6-x\end{cases}$
14	$lg(3x-2)=2-lg\,2\,5;$ $x^3+6x^2+11x+6=0$	$x^2+3.1x+0.3\geq 0$	$\begin{cases}x^4+y^4=17\\ x^2+y^2=5\end{cases}$
15	$log_{(6-2x)}4=2;$ $(x-2)^4+(x-4)^4=16$	$3x^3+8x+7\leq 0$	$\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=5\\ x+y=6\end{cases}$

II. МАТРИЧНІ ОПЕРАЦІЇ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

1. Різновиди матриць

Матрицею називають прямокутну таблицю упорядкованих чисел або виразів, розташованих в m рядках та n стовпцях і записану у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Якщо матриця містить лише один рядок, то її називають ***матрицею-рядком*** або ***вектором-рядком***. Якщо матриця містить лише один стовпець, то її називають ***матрицею-стовпцем*** або ***вектором-стовпцем***.

Матрицю, в якої число рядків дорівнює числу стовпців ($m = n$), називається ***квадратною***.

Взагалі кажучи $a_{ij} \neq a_{ji}$, але існують матриці, для яких виконується умова $a_{ij} = a_{ji}\left(\forall i \in \overline{1,n}; j \in \overline{1,n}\right)$. Такі матриці називаються ***симетричними.***

У випадку квадратної матриці відрізок, який починається у лівому верхньому куті матриці й закінчується в правому нижньому, ***називається головною діагоналлю;*** іншу діагональ матриці називають ***побічною***.

Процес перетворення рядків матриці в стовпці і навпаки називають ***транспонуванням матриці***. Матрицю, транспоновану до матриці A, позначають A^T.

Квадратну матрицю називають ***діагональною***, якщо всі її елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю. Елементи головної діагоналі можуть бути як нульовими, так і відмінними від нуля.

Квадратну матрицю називають ***одиничною***, якщо вона є діагональною і всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці.

Квадратну матрицю називають ***верхньою трикутною***, якщо всі її елементи, які розташовані нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Нижче наведено приклади усіх, вище розглянутих, різновидів матриць:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ – прямокутна матриця; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ – матриця-рядок;

$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець; $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ – квадратна матриця;

$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ – діагональна матриця; $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця;

$F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ – верхня трикутна матриця; $R = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ – симетрична матриця.

2. Створення векторів та матриць

У пакеті Mathcad задати вектор або матрицю можна за допомогою наступної послідовності дій:

– ввести ім’я матриці, наприклад, A і оператор присвоєння "$:=$".

– на математичній поличці інструментів вибрати поличку Matrix,

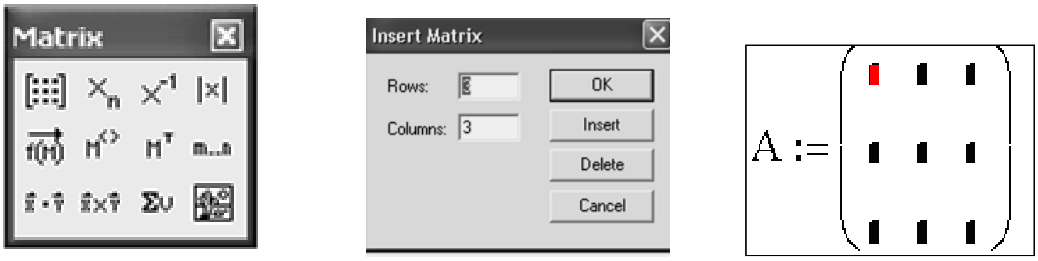


Рисунок 1– Створення матриці

на якій клацнути на кнопці “Вставити матрицю” (ліва верхня кнопка). В результаті такої дії відкриється вікно (рис.2), в якому потрібно ввести число рядків і число стовпців матриці (автоматично задається матриця 3×3) і клацнути на кнопці OK чи Enter. На екрані отримаємо шаблон матриці (рис.3), який потрібно заповнити числами або виразами. Заповнення шаблону можна здійснити безпосередньо, заносячи значення елементів у відведені клітини або з використанням дискретних змінних.

Дискретна змінна – це така змінна, яка приймає ряд числових значень, розташованих в порядку зростання або спадання. Дискретна змінна відіграє роль оператора циклу і широко застосовується при побудові таблиць з результатами розрахунків, графіків тощо. У загальному випадку дискретна змінна має вигляд

$$iz := a, a + \frac{b-a}{n} .. b,$$

де iz – ім’я змінної, a – перше число, $a + \frac{b-a}{n}$ – друге число, b – останнє число, n – число інтервалів, на яке розбитий відрізок від a до b. Перше, друге, і останнє число дискретної змінної задаються безпосередньо, або попередньо задавши числа a, b і n. Якщо крок зміни дискретної змінної дорівнює одиниці, то його можна не вказувати. Наприклад, якщо змінна x набуває ряд значень $x = 0,1,2,3,4,5,$ то її можна задати у вигляді:

$$x := 0..5 \text{ або } x := 0,1..5.$$

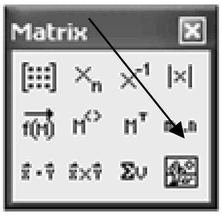


Рисунок 2 – Поличка Matrix

Звертаємо увагу на те, що знак діапазону (дві крапки) не дозволяється набирати з клавіатури, натискаючи два рази клавішу “.” (крапка). Для цього потрібно натиснути клавішу “;” (крапка з комою) або на поличці Matrix клацнути на кнопці, вказаній на рис.4.

Нумерація елементів матриці (вектора) може починатися з будь-якого цілого числа (додатного або від'ємного). Порядком нумерації елементів керує вбудована змінна ORIGIN. За замовчуванням ORIGIN=0.

Щоб нумерація елементів векторів і матриць починалася, наприклад, з 1, потрібно перед введенням матриці або на початку документа змінній ORIGIN присвоїти значення 1 (ORIGIN:=1).

На наведеному нижче лістингу показано способи задання матриць та нумерацію їх елементів у залежності відзначення параметра ORIGIN.

$$ORIGIN := 0 \qquad i := 0..3 \qquad j := 0..3 \qquad B_{i,j} := 1 + 2 \cdot i + j$$

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad B_{0,0} = 1 \qquad B_{1,3} = 6 \qquad C := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{0,0} = 6 \qquad A_{1,2} = 5 \qquad C_0 = 1 \qquad C_3 = 4 \qquad C_4 = \blacksquare$$

$$ORIGIN := 1$$

$$A_{0,0} = \blacksquare \qquad A_{1,2} = 2 \qquad C_0 = \blacksquare \qquad C_3 = 3 \qquad C_4 = 4$$

Звертання до елементів матриці здійснюється через ім'я матриці з двома індексами, а до елемента вектора – через ім'я з одним індексом.

Даний лістинг показує створення матриці A і B та вектора С, вказаними вище способами та значення елементів матриць (вектора) в залежності від значення змінної ORIGIN. Зокрема, у випадку ORIGIN=1, елементи з нульовими індексами невизначені, це елементи $A_{0,0} =, B_{0,0} =,$ і $C_0 =$.

3. Основні дії з матрицями та векторами

Система Mathcad дає можливість виконувати з матрицями основні арифметичні операції: множення матриці на число, додавання, віднімання і множення, а також операцію транспонування. Усі ці операції в Mathcad реалізовані у вигляді операторів. Для виконання тієї чи іншої матричної операції потрібно ввести відповідну формулу і натиснути знак = (дорівнює). Вектори є частинним випадком матриці розміру $n \times 1$ і, тому, для них справедливі всі ті операції, що і для матриць, за винятком тих операцій, які застосовуються лише для векторів (наприклад, скалярний і векторний добутки). Операції з векторами будуть розглянуті в наступній лабораторній роботі. Приклади виконання перерахованих вище операцій наведено на лістингу.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B \cdot C = \begin{pmatrix} 21 & 16 & 17 \\ 27 & 12 & 9 \\ 15 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \blacksquare \qquad A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 13 & 11 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad D^T \cdot D = (14) \qquad D \cdot D^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Звернемо увагу не те, що операцію А·В виконати неможливо, оскільки матриці А і В є неузгодженими.

4. Визначники та їх обчислення

Нехай задано квадратну матрицю.

Визначником (детермінантом) квадратної матриці A порядку n називається число, яке обчислюється за допомогою елементів матриці A за певним правилом. Визначник матриці A позначають через |А|.

Правило знаходження визначника матриці 2-го порядку: визначник матриці другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей, тобто

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}. \qquad (2)$$

Правило знаходження визначника матриці 3-го порядку: Визначник матриці третього порядку знаходять за формулою

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{32} \qquad (3)$$

Щоб ввести оператор знаходження визначника матриці, можна натиснути кнопку з полички Matrix (у правому верхньому кутку, рис. 4). В результаті виконання будь-якої з цих дій з'явиться заповнювач, в який потрібно ввести шаблон квадратної матриці відповідного порядку, заповнити його числами і натиснути клавішу "=" або ввести ім'я, присвоїти йому квадратну матрицю, а потім натиснути кнопку **обчислення визначника** і клавішу "=". Приклади обчислення визначників другого і третього порядків, наведено на лістингу.

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\right| = -14 \qquad A := \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad |A| = -14$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right| = 0 \qquad \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right| = 226$$

5. Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до квадратної матриці *A,* якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E - одинична матриця.

Обчислення оберненої матриці можливе, якщо вона невироджена, тобто її визначник відмінний від нуля. формула знаходження оберненої матриці наступна:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де $A_{i,j}$ – алгебраїчні доповнення до елементів матриці.

Для введення оператора обчислення оберненої матриці потрібно натиснути кнопку (X^{-1}) з полички Matrix. Приклад обчислення оберненої матриці та перевірка правильності її знаходження, наведено на лістингу.

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 6 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{26}{31} & \frac{-17}{31} & \frac{24}{31} \\ \frac{11}{31} & \frac{-6}{31} & \frac{3}{31} \\ \frac{18}{31} & \frac{-7}{31} & \frac{19}{31} \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.839 & -0.548 & 0.774 \\ 0.355 & -0.194 & 0.097 \\ 0.581 & -0.226 & 0.613 \end{pmatrix} \quad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими

Системою *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими називають систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad (4)$$

де a_{ij}, - коефіцієнти системи, x_i – невідомі, b_i – вільні члени, $i, j = 1..n$ – дискретні змінні.

7. Матричний метод розв'язання системи лінійних рівнянь.

Введемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

де A – основна матриця системи; X – матриця-стовпчик невідомих; B – матриця-стовпчик вільних членів. Тоді систему (4) запишемо у матричному вигляді

$$A \cdot X = B \qquad (5)$$

Якщо $|A| \neq 0$, то розв'язок системи (5) можна знайти за формулою

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (6)$$

8. Метод Крамера розв'язання системи лінійних рівнянь.

Введемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

де Δ – основний визначник; $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ – визначники, які отримують з Δ заміною відповідно 1,2, ...,n- го стовпчиків на стовпчик вільних членів.

Теорема (Крамера). Якщо основний визначник системи рівнянь $\Delta \neq 0$ то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} (i = 1,2, \cdots, n) \qquad (7)$$

Приклад. Розв'язати матричним методом та методом Крамера систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ x_1 + 2x_2 = 8; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$.

Послідовність операцій при розв'язанні матричним методом, наведено на лістингу.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad X := A^{-1} \cdot B \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

При розв'язуванні методом Крамера доцільно змінній ORIGIN присвоїти значення 1, а замість змінних з індексом $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ користуватись простими змінними $\Delta 1, \Delta 2, \Delta 3$, інакше визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ компілятором Mathcad сприймаються як елементи вектора. Послідовність операцій при розв'язанні матричним методом, наведено на лістингу.

$$\Delta := \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}\right| \quad \Delta = -3 \qquad \Delta 1 := \left|\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}\right| \quad \Delta 1 = -6$$

$$\Delta 2 := \left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right| \quad \Delta 2 = -9 \qquad \Delta 3 := \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\right| \quad \Delta 3 = 9$$

$$x_1 := \frac{\Delta 1}{\Delta} \quad x_1 = 2 \qquad x_2 := \frac{\Delta 2}{\Delta} \quad x_2 = 3 \qquad x_3 := \frac{\Delta 3}{\Delta} \quad x_3 = -3$$

9. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капелі

Рангом матриці називається максимальна кількість її лінійно незалежних стовпчиків (чи рядків). (Два вектори є лінійно незалежними, якщо один не може бути отримано з іншого шляхом елементарних перетворень, тобто додаванням та/або множенням на скаляр.)

Теорема Кронекера-Капелі (існування розв’язку системи лінійних рівнянь). Необхідною і достатньою умовою існування розв’язку системи лінійних рівнянь A x=B є умова рівності рангів матриці системи й розширеної матриці системи.

Перевіримо існування розв’язку системи лінійних рівнянь, що лежить в основі нашої задачі. Для цього виконаємо такі дії (див. рис.4):

1) запишемо матрицю системи A і вектор-стовпчик B правих частин системи;

2) потім за допомогою функції augment складемо розширену матрицю системи C;

3) використавши функцію rank, знайдемо ранги матриць A та C Як бачимо, ранги матриці системи й розширеної матриці системи лінійних рівнянь не є рівними, звідки витікає, що задача не має розв’язку в силу несумісності системи лінійних рівнянь, що лежить в основі її математичної моделі.

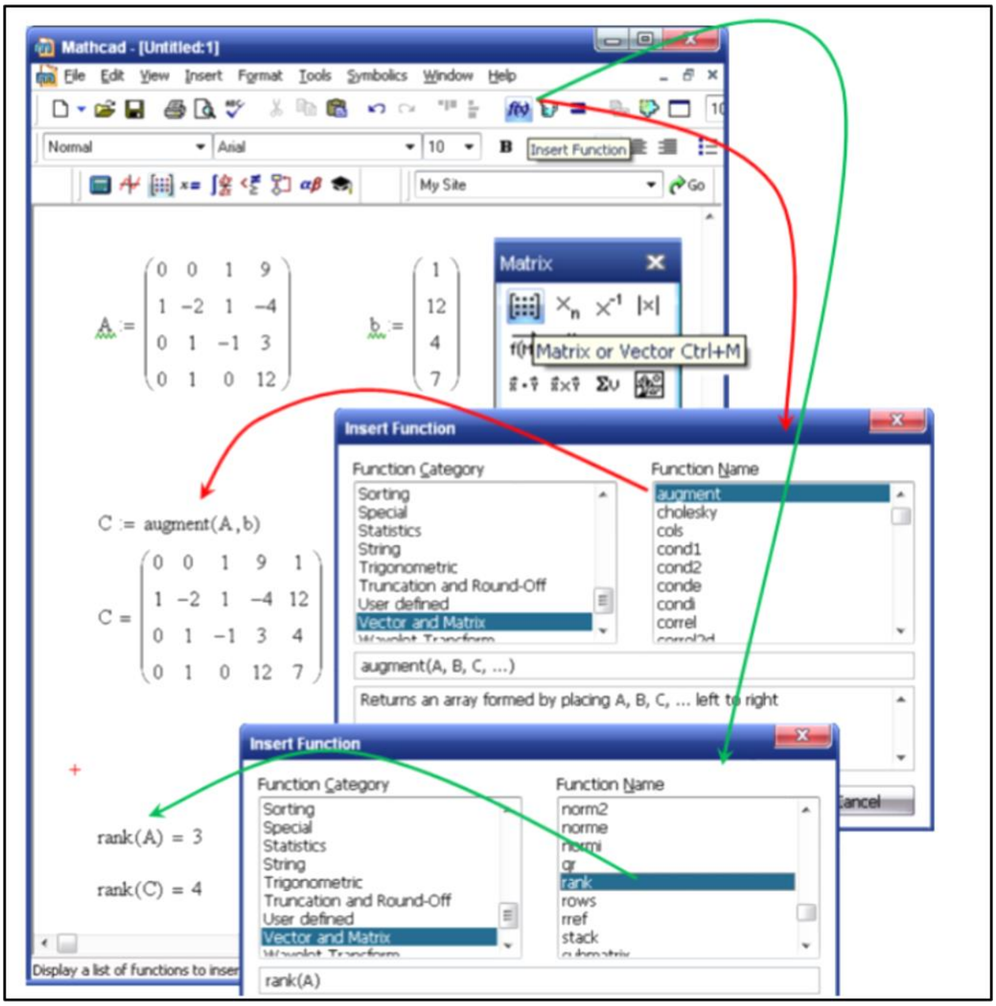


Рисунок 3 –Перевірка сумісності системи лінійних рівнянь

Як бачимо, на рисунку 5 система не має розв’язку, оскільки ранги матриць не є рівними.

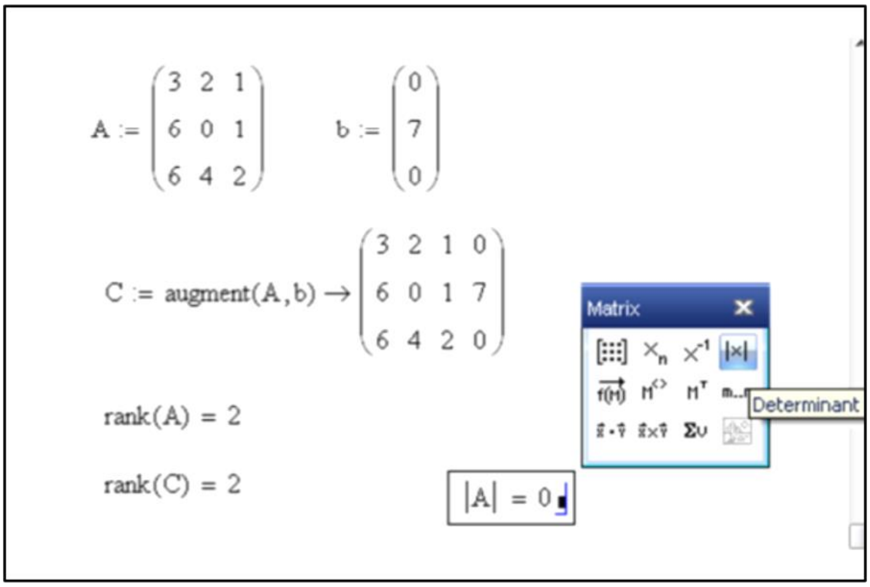


Рисунок 4 – Перевірка існування та єдиності розв’язку системи лінійних рівнянь

Як бачимо, розв’язок існує (ранги матриць A і C рівні), але він не єдиний (визначник матриці системи дорівнює нулю).

Усі розв’язки системи можна знайти, виразивши дві з невідомих через третю, наприклад, виразити x1 та x2 через x3. Для цього з усіх перелічених вище способів розв’язку систем лінійних рівнянь підійде лише блок розв’язку Given – Find. Його використання показано на рис.5.

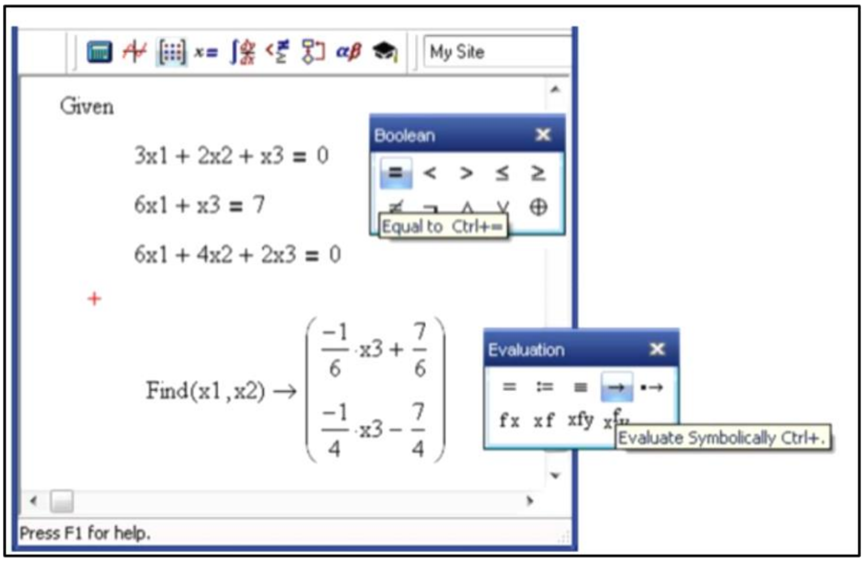


Рисунок 5 – Розв’язок системи лінійних рівнянь у випадку нескінченної множини розв’язків.

10. Символьні операції з матрицями

Символьні операції з матрицями в системі Mathcad можна виконувати аналогічно як звичайні операції з тією лише різницею, що замість звичайного знака дорівнює (=) треба набирати символьний знак рівності “→”, який знаходиться на поличці "Evaluation", після якого треба натиснути клавішу Enter. Символьний знак рівності можна ввести, натиснувши комбінацію клавіш Ctrl+**.** Приклади символьних операцій з матрицями наведено на наступному лістингу.

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \quad G := \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \cdot a & 3 \cdot b \\ 3 \cdot c & 3 \cdot d \end{pmatrix} \quad A + D \rightarrow \begin{pmatrix} a + p & b + q \\ c + r & d + s \end{pmatrix} \quad A - D \rightarrow \begin{pmatrix} a - p & b - q \\ c - r & d - s \end{pmatrix}$$

$$A \cdot D \rightarrow \begin{pmatrix} a \cdot p + b \cdot r & a \cdot q + b \cdot s \\ c \cdot p + d \cdot r & c \cdot q + d \cdot s \end{pmatrix} \quad A \cdot C \rightarrow \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot u & a \cdot y + b \cdot v & a \cdot z + b \cdot w \\ c \cdot x + d \cdot u & c \cdot y + d \cdot v & c \cdot z + d \cdot w \end{pmatrix} \quad C \cdot A \rightarrow$$

$$|A| \rightarrow a \cdot d - b \cdot c \quad C^T \rightarrow \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix} \quad G \cdot X = B \rightarrow \begin{pmatrix} g_{11} \cdot x_1 + g_{12} \cdot x_2 \\ g_{21} \cdot x_1 + g_{22} \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Звернемо увагу, що операція $C \cdot A \rightarrow$ не може бути виконана, оскільки матриці C і A не узгоджені. Щоб ввести змінну з індексами, треба після введення змінної натиснути клавішу **"["**.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Для заданого числа k та матриць A, B, C, D, X виконати наступні операції з матрицями: $k \cdot A$; $A + C$; $A - C$; $A \cdot C$; $A \cdot D$; $A \cdot X = B$; $|A|$; $A^{-1}, r(A), r(C), r(D)$.

Варіанти індивідуальних завдань наведено в табл.1.

Таблиця 1

№	k	A	B	C	D	X
1	2	3	4	5	6	7
1	3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
2	-2	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
3	4	$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
4	-3	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
5	-2	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -8 & 1 \\ 2 & -2 & 9 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \\ -6 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
6	5	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & -9 \\ 2 & -6 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -9 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 & -6 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ -5 & -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 9 \\ -2 & 2 & -3 \\ -4 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
7	2	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 9 & -2 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 9 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
8	3	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 9 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & -9 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
9	4	$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -5 & 1 \\ 8 & 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 & 5 \\ 3 & 9 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 6 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
10	-3	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & -2 \\ 1 & 9 & 5 & 1 \\ 9 & -1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 3 \\ 7 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

1	2	3	4	5	6	7
11	-1	$\begin{pmatrix}1 & -7 & 1 & -3\\ -2 & 3 & 7 & 2\\ 8 & 6 & -5 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\ 2\\ -3\\ 8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 3 & -5 & 7\\ 5 & 1 & 8 & 1\\ 1 & -2 & 4 & 4\\ 0 & -4 & 6 & 8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & -1 & 5\\ 2 & 3 & -3\\ -4 & 3 & 5\\ 2 & 9 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$
12	-2	$\begin{pmatrix}0 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 8 & -2\\ 5 & 4 & 5 & 9\\ 3 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}9\\ -2\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & -3 & -5 & 5\\ 3 & 1 & 2 & 7\\ 0 & -2 & 5 & 4\\ -1 & 4 & 6 & 8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 1 & 9\\ 2 & 5 & 3\\ -4 & 3 & 6\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$
13	3	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 9 & 3\\ 2 & 3 & 3 & -2\\ 1 & 4 & 5 & 8\\ 3 & -1 & 0 & 7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5 & 2 & -1 & 3\\ 7 & 8 & 6 & 9\\ 0 & -2 & 5 & 8\\ 2 & 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 4 & 7\\ 0 & 6 & 5\\ -3 & 3 & 1\\ 9 & 6 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$
14	4	$\begin{pmatrix}1 & -2 & 7 & 3\\ 2 & -3 & 3 & -2\\ 1 & -4 & 6 & 1\\ 5 & -1 & 0 & 8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\ 8\\ 3\\ 7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & 3 & 6 & 5\\ -3 & 1 & 2 & 9\\ 0 & -2 & 4 & 4\\ 1 & 4 & 7 & 6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3 & 1 & 6\\ 2 & -8 & 3\\ -4 & 3 & 4\\ 2 & 9 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$
15	-4	$\begin{pmatrix}1 & 8 & 1 & 3\\ 7 & 3 & 3 & -2\\ 1 & 4 & 6 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -3\\ 8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & -3 & -5 & 5\\ 3 & 8 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 9 & 4\\ -2 & 4 & 7 & 6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8 & 1 & 5\\ 2 & -1 & 3\\ -4 & 5 & 4\\ -9 & 4 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$

Завдання 2.

1. Розв’язати систему лінійних рівнянь матричним методом, методом Крамера у програмі MathCad. Перевірити правильність знайдених розв’язків за допомогою блоку **Given-find.** Варіанти завдань наведено в табл.2.

Таблиця 2

№	Система рівнянь	№	Система рівнянь	№	Система рівнянь
1	$\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3=1\\ x_2+5x_3=-1\\ 6x_1+x_2-3x_3=-19\end{cases}$	6	$\begin{cases}3x_1+2x_2+2x_3=5\\ x_1+3x_2+x_3=2\\ 5x_1+3x_2+4x_3=9\end{cases}$	11	$\begin{cases}5x_1+3x_2+2x_3=1\\ 4x_1+x_2+9x_3=23\\ 2x_1+6x_3=16\end{cases}$
2	$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=5\\ 4x_1+5x_2+2x_3=12\\ 3x_1-x_3=-1\end{cases}$	7	$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=4\\ 4x_1+5x_3=7\\ 3x_1+2x_2+4x_3=7\end{cases}$	12	$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2\\ 2x_1-3x_2-x_3=5\\ x_1+x_2-x_3=7\end{cases}$
3	$\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3=-3\\ 4x_1+3x_2-2x_3=12\\ 8x_1+x_2-5x_3=6\end{cases}$	8	$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\ x_1+x_2-x_3=0\\ 4x_1-x_2+5x_3=3\end{cases}$	13	$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\ 2x_1+3x_2+x_3=1\\ 2x_1+x_2+3x_3=11\end{cases}$
4	$\begin{cases}3x_1-2x_2-2x_3=-13\\ x_2+4x_3=11\\ 2x_1+x_2-5x_3=-11\end{cases}$	9	$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=8\\ x_1+4x_2+5x_3=18\\ 2x_2+x_3=2\end{cases}$	14	$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\ 2x_1+x_2-2x_3=1\\ x_1+x_2+3x_3=2\end{cases}$
5	$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=7\\ -x_1+x_2+x_3=-8\\ 3x_1+x_2+4x_3=3\end{cases}$	10	$\begin{cases}5x_1+8x_2+x_3=2\\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7\\ 2x_1+x_2-x_3=-5\end{cases}$	15	$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\ 2x_1+x_2+2x_3=1\\ x_1+3x_3=1\end{cases}$

Завдання 3.

1. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність за теоремою Кронекера-Капелі та розв'язати її методом Гауса. Перевірити правильність знайдених розв'язків за допомогою блоку **Given-find**. Варіанти індивідуальних завдань наведено в табл.3.

Таблиця 3

№	Система рівнянь	№	Система рівнянь	№	Система рівнянь
1	$\begin{cases} 2x-y-3z+t=1 \\ 3x+4y-5z-2t=3 \\ 3x+y+z-4t=-2 \\ 4x+6y-6z-7t=2 \end{cases}$	6	$\begin{cases} x-y+z-3t+d=5 \\ x+2y+z-3t-2d=-2 \\ 4x+3y-z-4t+3d=1 \\ 2x+2y-3z+2t+4d=4 \end{cases}$	11	$\begin{cases} 3y-2z=-3 \\ x+y-z=1 \\ x+2y+z=1 \\ x+3y+3z=0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x-y-z+2t=1 \\ 2x-y+2z-2t=-1 \\ 3x+y+z-4t=-2 \\ 4x+6y-6z-7t=-2 \\ x+5y-7z-3t=3 \end{cases}$	7	$\begin{cases} 2x-y-z+5t=2 \\ x+4y-z-2t=-1 \\ 3x+2y+z+t=-2 \\ x+3y+2z-4t=3 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 2x-y+z+5t=3 \\ x+3y-4t=1 \\ 3x+2y+z+t=-2 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x+y+z=3 \\ 4x+y+4z=-1 \\ x+y+z=-2 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 2x-y+z-t=1 \\ 3x+5y-2z+t=-2 \\ 2x-y+z-t=1 \\ x+6y-3z+2t=-3 \end{cases}$	13	$\begin{cases} 2x+y+z-3t+k=2 \\ x+2y+z+t-2k=1 \\ 3x-y+2z+t-k=-1 \\ x-2y+z+4t-2k=-3 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x-y+z-t=3 \\ 4x-2y-2z+3t=2 \\ 2x-y+5z-6t=1 \\ 2x-y-3z+4t=5 \end{cases}$	9	$\begin{cases} 4x-3y+z+5t=7 \\ x-2y-2z-3t=3 \\ 3x-y+2z=-1 \\ 2x+3y+2z-8t=-7 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 4x-3y+2z-t=8 \\ 3x-2y+z-3t=7 \\ 2x-y-5t=6 \\ 5x-3y+z-8t=1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x+7y+3z+t=5 \\ x+3y+5z-2t=3 \\ x+5y-9z+8t=1 \\ 5x+18y+4z+5t=12 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 2x+3y-z+t=1 \\ 8x+12y-9z+8t=3 \\ 4x+6y+3z-2t=3 \\ 2x+3y+9z-7t=3 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13 \end{cases}$

\

III. ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

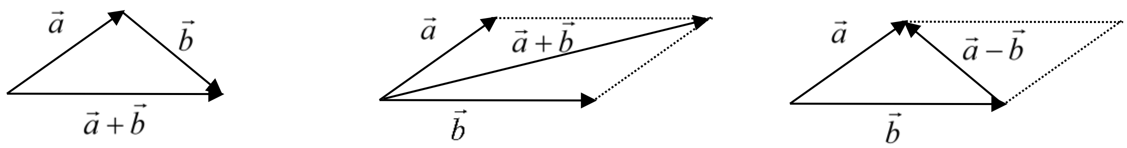
1. ***Вектором*** називається напрямлений відрізок. Якщо початок вектора знаходиться в точці A, а кінець вектора знаходиться в точці B, то позначають його $\overrightarrow{AB}$. Вектор позначають також малою буквою латинського алфавіту, наприклад $\vec{a}$.

Відстань між початком вектора і його кінцем називається ***довжиною*** або ***модулем вектора*** і позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$або $|\vec{a}|$.

Вектор, у якого початок збігається з кінцем, називається ***нульовим*** і позначається $\vec{0}$. ***Одиничним*** називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $|\vec{a}|$ називається ортом вектора $\vec{a}$ і позначається $\overrightarrow{a^0}$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***рівними***, якщо вони колінеарні, мають однакові довжини та однаково напрямлені. Вектор, колінеарний вектору$\vec{a}$, рівний йому за модулем, але протилежно з ним напрямлений, називається протилежним вектором і позначається $-\vec{a}$.

Операції над векторами вказані на рис.1.



а) б) в)

Рисунок 1 –Геометричне представлення операцій над векторами

На рис.1 а) та б) вказане додавання двох векторів, на в) – віднімання векторів.

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$на вісь u називається додатне число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ і вісь u мають однаковий напрям, в протилежному випадку проекцією буде від'ємне число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$.

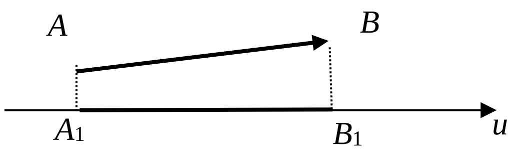


Рисунок 2 – Проекція вектора

Кутом між вектором і віссю u (або між двома векторами) називається найменший з кутів, на який потрібно повернути один вектор або вісь, щоб він збігався за напрямом з другим вектором або віссю ($0 \le \phi \le \pi$).

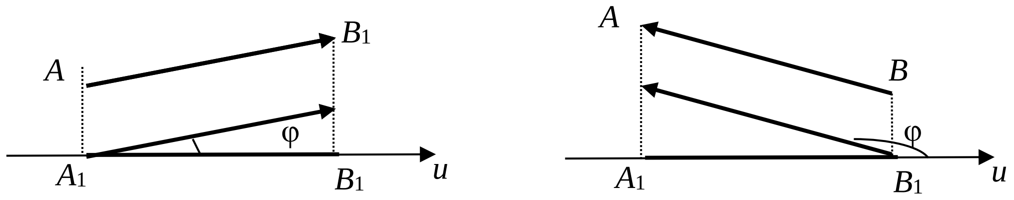


Рисунок 3 – Кут між векторами

Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано вектор $\vec{a}$. Це означає, що а ортонормованому базисі $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, який задає обрану систему координат, вектор $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$, де числа a_x, a_y, a_z – координати вектора $\vec{a}$ в цьому базисі.

Тому $a_x = np_{Ox}\vec{a},\ a_y = np_{Oy}\vec{a},\ a_z = np_{Oz}\vec{a}$.

Нехай маємо вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Сума, різниця та множення вектора на число k визначаються наступним чином:
$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z),\ k \cdot \vec{a} = (ka_x, ka_y, ka_z)$.

Довжина вектора визначається за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ або , якщо задані координати точок початку і кінця вектора $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Якщо два вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ колінеарні, то виконується умова $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ і навпаки.

Якщо два вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ рівні, то виконується умова $a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$ і навпаки.

2. ***Скалярним добутком*** двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi}$, **де** $\boldsymbol{\phi}$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Властивості скалярного добутку:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) $(\overrightarrow{\lambda a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

4) якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$, то $\cdot\ \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, коли кут ϕ гострий,
і $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$,коли кут ϕ тупий;

5) скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори взаємно-перпендикулярні.

6. $(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$

Якщо задано два вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то скалярний добуток запишеться так $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$.

Косинус кута між векторами знаходиться за формулою

$$cos\,\phi = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

3. ***Векторним добутком*** двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який визначається трьома умовами:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $|\vec{\boldsymbol{c}}| = |\vec{\boldsymbol{a}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{b}}| \cdot \boldsymbol{sin\,\phi}$, **де** $\boldsymbol{\phi}$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.

Векторний добуток позначається так: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

2) $\overrightarrow{\lambda a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;

3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

4) векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори колінеарні;

5) площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює модулю векторного добутку $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Якщо задано два вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то векторний добуток запишеться так $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

4. ***Змішаним добутком*** векторів $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ називається число $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ або $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Якщо задано три вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то змішаний добуток запишеться так $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Властивості змішаного добутку

1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$;

2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$;

3) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$;

4) модуль змішаного добутку $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$, віднесених до спільного початку: $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$;

5) якщо змішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ додатній, то вектори $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів, а якщо від'ємний, то ліву;

6) вектори $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній змішаний добуток дорівнює нулю.

Створення векторів у пакеті MathCad та основні операції над ними

У попередній роботі ми ознайомились як можна створити вектори, використовуючи поличку Matrix.

1. Основні дії з векторами

Із операціями додавання, віднімання та множення вектора на число ми вже знайомі. Приклади виконання перерахованих операцій наведено на лістингу.

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k := 3$$

$$k \cdot a = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad a - b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b + c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad k \cdot a + b - c = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Щоб знайти скалярний добуток векторів, використовують кнопку „**Скалярний добуток”** з полички Matrix, для векторного добутку використовують кнопку „**Векторний добуток**” з полички Matrix (рис.4).

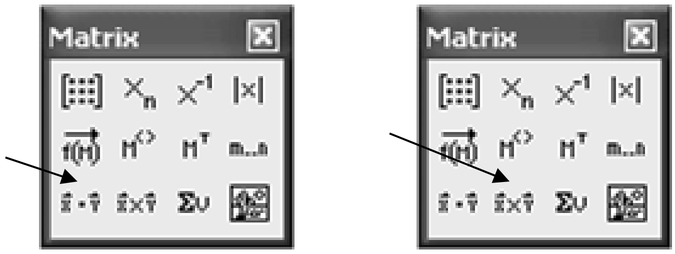


Рисунок 4 – Поличка

Приклади таких обчислень наведено на лістингу.

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a \cdot b = 12 \qquad a \times b = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad a \cdot (b \times c) = -8 \qquad |c| = 3.742 \qquad |a \times c| = 9.798$$

Приклад 1. Обчислити площу трикутника ABC, якщо A(1,0,2), B(1,2,0), C(0,1,2).

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, тоді площа трикутника дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Розв’язок задачі наведено на лістингу.

$$AB := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad AC := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S := \frac{|AB \times AC|}{2} \qquad S = 1.732$$

Приклад 2. Знайти об'єм піраміди з вершинами A(1,2,3), B(0,2,1), C(1,0,1), D(0,4,1).

Об'єм піраміди дорівнює 1/6 об'єму паралелепіпеда побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Розв'язок наведено на лістингу.

$$AB := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad AC := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad AD := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$V := \frac{|(AB \times AC) \cdot AD|}{6} \qquad V = 0.667$$

Приклад 3. Перевірити чи лежать чотири точки A(2,2,1), B(1,0,5), C(2,-1,1), D(1,2,3) в одній площині.

Для розв'язання даної задачі потрібно перевірити, чи вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ – компланарні, для цього необхідно знайти змішаний добуток цих векторів. Розв'язок представлено на лістингу, з одержаного результату робимо висновок, що вектори не компланарні.

$$AB := \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad AC := \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad AD := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$V := (AB \times AC) \cdot AD \qquad V = -2$$

Приклад 4. Дано вершини піраміди A(1,2,1), B(3,0,-2), C(5,2,7), (-6,-5,8). Знайти довжину висоти піраміди, опущеної з вершини D.

Розв'язок поставленої задачі вказано на лістингу нижче.

$$AB := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad AC := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad AD := \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$V := \frac{(AB \times AC) \cdot AD}{6} \qquad S := \frac{|AB \times AC|}{2}$$

$$V = 51.333 \qquad S = 14 \qquad h := 3\frac{V}{S} \qquad h = 11$$

Приклад 5. Дано вектори $\vec{a} = (1,0,2)$, $\vec{b} = (3,1,4)$, $\vec{c} = (1,-1,0)$. Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис на множині всіх векторів. Розкласти вектор $\vec{d} = (2,-3,5)$ за цим базисом.

Знайдемо змішаний добуток векторів$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (a \times b) \cdot c = -4$$

Так як змішаний добуток відмінний від нуля, то вектори лінійно-незалежні і утворюють базис.

Розклад вектора $\vec{d}$за цим базисом запишеться так $\vec{d} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c}$.

З останньої рівності отримаємо систему рівнянь та розв'яжемо цю систему матричним методом. Розв'язок системи $\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = -3 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 5 \end{cases}$ вказано на лістингу.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad X := A^{-1} \cdot B \quad X = \begin{pmatrix} 6 \\ -1.75 \\ 1.25 \end{pmatrix}$$

Отже, координати вектора в новому базисі: $\vec{d} = (6;\ -1.75;\ \ 1.25)$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Дано вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

1) Знайти $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 3 \cdot \vec{b} - \vec{c}, \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}, (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

2) Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

3) Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

4) Довести, що вони утворюють базис на множині всіх векторів. Розкласти вектор $\overrightarrow{d} = (20, -27,\ 35)$ за цим базисом.

Варіанти індивідуальних завдань наведено в таблиці 1. Номер варіанту за списком.

Таблиця 1

№	Вектори $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$	№	Вектори $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$
1	$\vec{a} = (3,-2,1), \vec{b} = (-1,1,-2), \vec{c} = (1,3,5)$	9	$\vec{a} = (4,-2,-3), \vec{b} = (0,1,3), \vec{c} = (-1,3,5)$
2	$\vec{a} = (2,3,-1), \vec{b} = (1,-2,3), \vec{c} = (-2,2,1)$	10	$\vec{a} = (-2,1,1), \vec{b} = (1,5,0), \vec{c} = (1,0,5)$
3	$\vec{a} = (4,-2,-4), \vec{b} = (6,-3,2), \vec{c} = (0,2,3)$	11	$\vec{a} = (3,-1,-2), \vec{b} = (1,2,-1), \vec{c} = (1,3,2)$
4	$\vec{a} = (3,-5,2), \vec{b} = (2,-5,-7), \vec{c} = (-2,1,2)$	12	$\vec{a} = (2,-2,1), \vec{b} = (2,3,6), \vec{c} = (1,0,-2)$
5	$\vec{a} = (3,-1,5), \vec{b} = (1,2,-3), \vec{c} = (2,3,1)$	13	$\vec{a} = (2,-3,1), \vec{b} = (1,-2,3), \vec{c} = (-1,-3,5)$
6	$\vec{a} = (5,2,5), \vec{b} = (2,-1,2), \vec{c} = (-2,1,3)$	14	$\vec{a} = (2,2,1), \vec{b} = (6,3,2), \vec{c} = (1,3,4)$
7	$\vec{a} = (5,0,-5), \vec{b} = (-2,1,2), \vec{c} = (2,-2,3)$	15	$\vec{a} = (2,-3,1), \vec{b} = (-1,3,2), \vec{c} = (1,0,4)$
8	$\vec{a} = (2,6,-1), \vec{b} = (2,0,-1), \vec{c} = (1,-2,3)$		

Завдання 2. Виконати завдання за варіантом**.** Номер варіанту за списком.

1. Вектори $\overrightarrow{AB} = (2; 6; 4)$ і $\overrightarrow{AC} = (4; 2; -2)$ співпадають із сторонами ΔABC. Знайти координати вектора $\overrightarrow{BN}$, який співпадає з медіаною, проведеною з вершини B.

2. Вектори $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 3), \overrightarrow{AD} = (-1; 0; 1)$ співпадають із сторонами паралелограма *ABCD*. Знайти координати і довжину вектора $\overrightarrow{DB}$.

3. Дано $\left|\vec{a}\right| = 3, \left|\vec{b}\right| = 5, \left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right) = \frac{\pi}{3}$. Обчислити $\left(\vec{a} - 2\,\vec{b}\right)^2$.

4. Знайти при якому значенні α вектори $\vec{a} = (\alpha; -2; 5), i\ \vec{b} = (1; 2; -\alpha)$ перпендикулярні?

5. Знайти координати вектора $\left(2\,\vec{a} - \vec{b}\right) \times \left(2\,\vec{a} + 3\,\vec{b}\right)$,

якщо $\vec{a} = (3; -1; -2), \vec{b} = (1; 2; -1)$.

6. Знайти кут між векторами: $\vec{a} = (-1; 1; 0), i\ \vec{b} = (1; -2; 2)$.

7. Знайти $\left|\left(\vec{m} + 2\,\vec{n}\right) \times \left(2\,\vec{m} + \vec{n}\right)\right|$, якщо $\left|\vec{m}\right| = 2, \left|\vec{n}\right| = 1, \left(\vec{m} \,\hat{,}\, \vec{n}\right) = \frac{\pi}{6}$.

8. Знайти об’єм піраміди з вершинами: $A(2; 1; 0), B(0; 3; 1), C(2; 0; 6), D(2; 3; 8)$.

9. Знайти площу трикутника з вершинами: $A(1; -2; 8), B(0; 0; 4), C(6; 2; 0)$.

10. Вектор $\vec{x} = \vec{a} - 2\,\vec{b}$, де $\vec{a} = (1; 0; -2), \vec{b} = (3; -1; 1)$. Знайти $\left(\vec{a} - 2\,\vec{b}\right)^2$.

11. Знайти координати вектора $\left(2\,\vec{a} - \vec{b}\right) \times \left(2\,\vec{a} + 3\,\vec{b}\right)$,

якщо $\vec{a} = (3; -1; -2), \vec{b} = (1; 2; -1)$.

12. Знайти кут між векторами: $\vec{a} = (-1; 1; 0)\ i\ \vec{b} = (1; -2; 2)$.

13. Знайти $\left|\left(\vec{m} + 2\,\vec{n}\right) \times \left(2\,\vec{m} + \vec{n}\right)\right|$, якщо $\left|\vec{m}\right| = 2, \left|\vec{n}\right| = 1$,

$$\left(\vec{m} \,\hat{,}\, \vec{n}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

14. Чи лежать в одній площині точки: $A(2; -1; 2), B(1; 2; 1), C(2; 3; 0), D(5; 0; -6)$–?

15. Вектори $\overrightarrow{AB} = (2; 6; -4)$ і $\overrightarrow{AC} = (4; 2; -6)$ співпадають із сторонами трикутника ABC. Знайти координати вектора $\overrightarrow{CP}$, який співпадає з медіаною, проведеною з вершини *C*.

IV. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ. РІЗНІ ВИДИ РІВНЯНЬ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

1. Різновиди рівнянь прямої на площині

Будь-яка пряма в декартовій системі координат визначається рівнянням першого порядку.

Наведемо різні види рівнянь прямої в просторі:

1) Загальне рівняння прямої, де $\vec{n} = (A, B)$ – нормальний вектор, який перпендикулярний до заданої прямої:

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

2) Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ із заданим нормальним вектором $\vec{n} = (A, B)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{2}$$

3) Рівняння прямої у відрізках, тобто прямої, яка відтинає вздовж координатних осей відрізки, величини яких відповідно дорівнюють a, b:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{3}$$

4) Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\vec{s} = (l, m)$, який називається напрямним вектором даної прямої(канонічне):

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \tag{4}$$

5) Параметричне рівняння прямої, де t – параметр:

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases} \tag{5}$$

6) рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{6}$$

7) Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ із заданим кутовим коефіцієнтом $k = tg\alpha$, де α – кут, який утворює пряма з додатнім напрямком осі Ox;

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{7}$$

8) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b \tag{8}$$

9) Нормальне рівняння прямої, де p – відстань від початку координат до прямої, α – кут, який утворює нормаль прямої із додатнім напрямком осі Ox

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0. \tag{9}$$

2. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих

1) Нехай дві прямі задані в загальному вигляді: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, тоді косинус кута між ними обчислюється за формулою:

$$\cos\phi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{10}$$

2) Нехай дві прямі задані у вигляді: $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$, тоді тангенс кута між ними обчислюється за формулою:

$$tg\phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (11)$$

3) Нехай дві прямі задані у вигляді: $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}$ та $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}$, тоді косинус кута між цими прямими обчислюється за формулою:

$$\cos\phi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}. \qquad (12)$$

Умови паралельності двох прямих:

1) прямі задані в загальному вигляді, тоді $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$;

2) прямі задані з кутовим коефіцієнтом, тоді $k_1 = k_2$;

3) прямі задані в канонічному вигляді, тоді $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$.

Умови перпендикулярності двох прямих:

1) прямі задані в загальному вигляді, тоді $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$;

2) прямі задані з кутовим коефіцієнтом, тоді $k_1 \cdot k_2 = -1$;

3) прямі задані в канонічному вигляді, тоді $l_1l_2 + m_1m_2 = 0$.

3. Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої:

1) пряма задана в загальному вигляді, тоді

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \qquad (13)$$

2) пряма задана в нормальному вигляді, тоді

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p|. \qquad (14)$$

4. Побудова різних видів прямої за допомогою MathCad

Побудова прямої на площині здійснюється за допомогою полички інструментів Graph із полички Math.

Приклад 1. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(3,1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (8,4)$ та побудувати її графік.

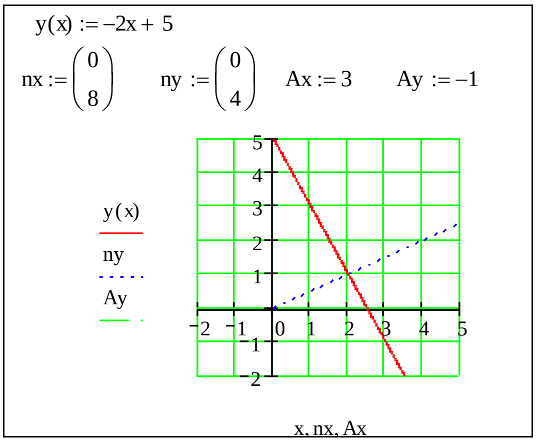
Введемо до розгляду два вектори, скалярний добуток яких дорівнює нулю. Вектор $\overrightarrow{AM}$ перпендикулярний до вектора $\vec{n}$. Лістинг має такий вигляд:

$$n := \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad AM := \begin{pmatrix} x - 3 \\ y + 1 \end{pmatrix}$$

$$n \cdot AM = 0 \rightarrow 8 \cdot x - 20 + 4 \cdot y = 0$$

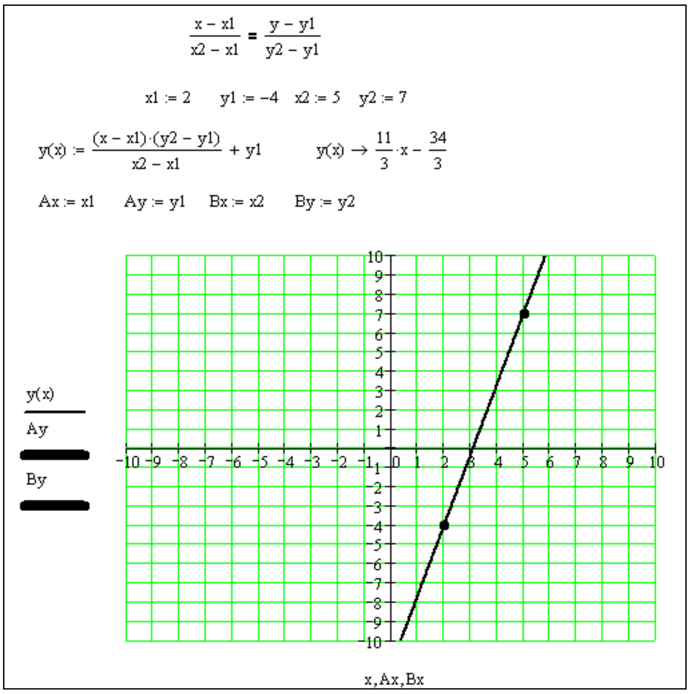
$$y(x) := root(8 \cdot x - 20 + 4 \cdot y, y) \rightarrow -2 \cdot x + 5$$

Задаємо точку A і координати початку і кінця вектора $\vec{n}$ та зобразимо пряму і вектор на площині. При побудові використовуємо вже відоме нам форматування графіків, властивість. Тут *nx*,*ny* – координати вектора $\vec{n}$, *Ax*, *Ay* – координати точки *A*.



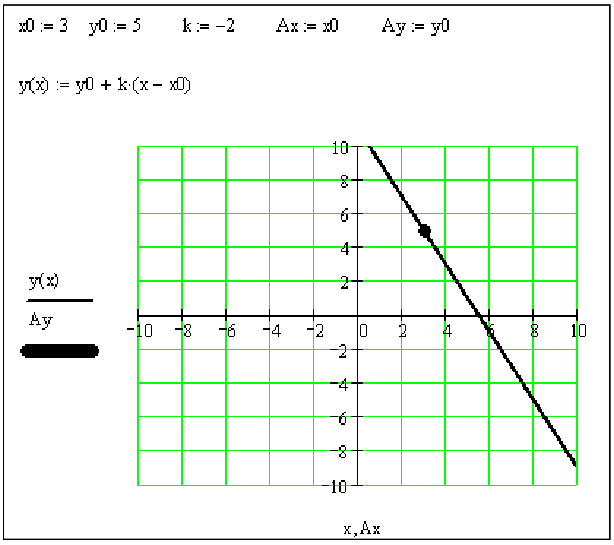
Приклад 2. Записати та побудувати рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$, де $x_1 = 2,\ y_1 = -4,\ x_2 = 5,\ y_2 = 7$.

Виконання даного завдання вказано на лістингу.



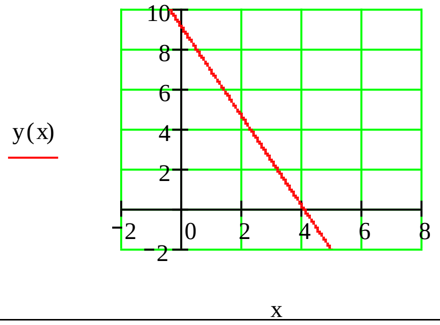
Приклад 3. Записати та побудувати рівняння прямої, що проходить через точку $A(x_0, y_0)$ із заданим кутовим коефіцієнтом k.

Розв'язок поданий на лістингу:



Приклад 4. Записати та побудувати рівняння прямої у відрізках, де a=4, b=9. Виконання даного завдання вказано на лістингу.

$$a := 4 \quad b := 9 \quad y(x) := \mathrm{root}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1, y\right) \rightarrow \frac{-9}{4}\cdot x + 9$$



Приклад 5. Обчислити відстань між паралельними прямими $6x - 8y + 5 = 0$ та $3x - 4y - 10 = 0$.

Для розв’язання даної задачі необхідно знайти координати довільної точки, яка належить першій прямій, а потім знайти відстань від цієї точки до другої прямої. Лістинг розв’язку задачі наведений нижче.

$$x := 0$$

$$6x - 8y + 5 = 0 \text{ solve}, y \rightarrow \frac{5}{8}$$

$$N\left(0, \frac{5}{8}\right)$$

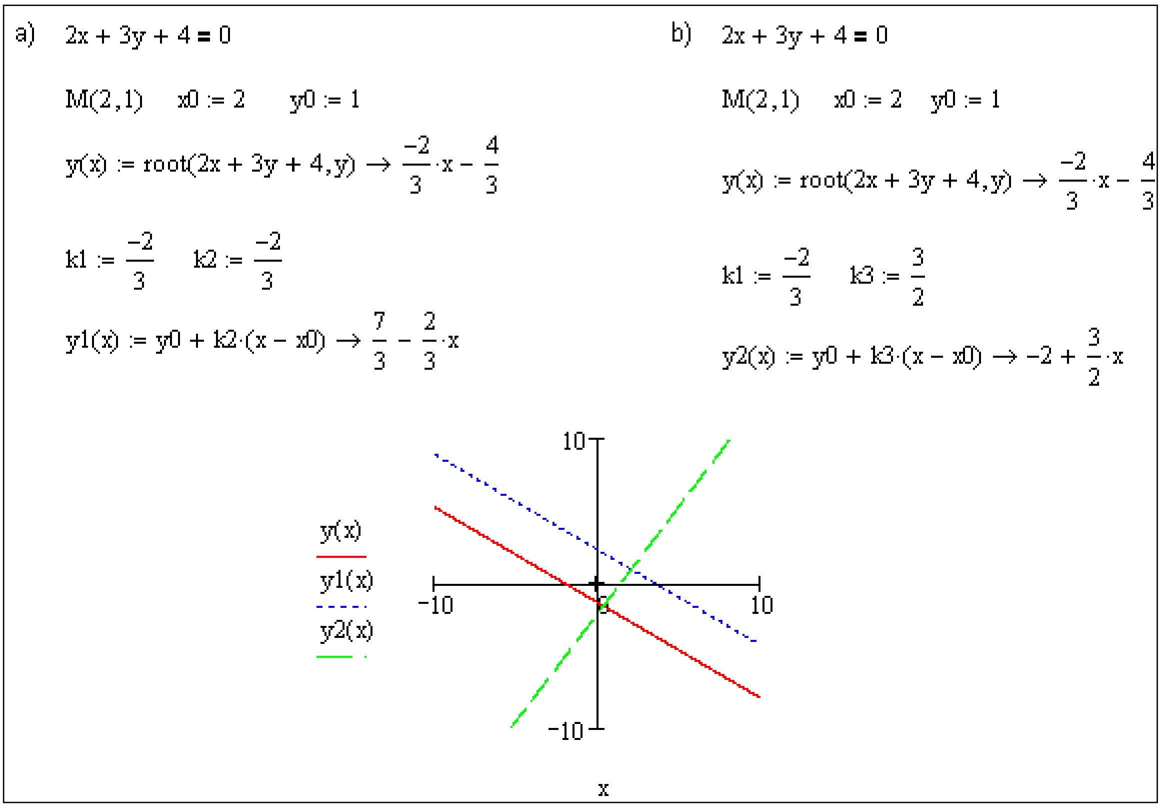
$$x1 := 0 \quad y1 := \frac{5}{8} \quad A := 3 \quad B := -4 \quad C := -10$$

$$d := \frac{|A\cdot x1 + B\cdot y1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = 2.5$$

Приклад 6. Дано рівняння прямої $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2,\ 1)$: а) паралельно до даної прямої;
б) перпендикулярно до даної прямої.

Лістинг виконання даного завдання:



Завдання для самостійної роботи.

Завдання 1

Скласти рівняння прямої із заданими умовами згідно варіанту, варіанти індивідуальних завдань наведено в таблиці 1. Номер варіанту за списком.

1. Точка $A(1{,}2)$ та нормальний вектор n(-2,2).
2. Точка $B(5{,}0)$ та напрямний вектор s(-2,1).
3. Точка $A(-1{,}4)$ та кутовий коефіцієнт k=-0,5.
4. Дві точки $A(0{,}2), B(2{,}0)$.
5. Точка $A(-5{,}2)$ та нормальний вектор n(-2,4).
6. Дві точки $A(1,-3), B(5,-7)$.
7. Точка $B(4,-2)$ та напрямний вектор s(2,1).
8. Точка $A(4,-3)$ та нормальний вектор n(2,-1).
9. Точка $A(1{,}2)$ та кутовий коефіцієнт k=3.
10. Дві точки $A(0{,}3), B(1,-2)$.
11. Точка $A(0{,}4)$ та нормальний вектор n(3,-2).
12. Точка $B(1{,}2)$ та напрямний вектор s(2,4).
13. Точка $A(1{,}3)$ та кутовий коефіцієнт k=0,7.
14. Точка B(2,3) та нормальний вектор n(2,1)
15. Дві точки $A(1{,}3), B(2,-2)$.

Завдання 2.

Виконати необхідні розрахунки вручну і намалювати в MathCad. Номер варіанту за списком.

1. Площа трикутника $S{=}8$ кв.од.: дві його вершини $A(1;-2) i B(2;\ 3)$, а третя вершина лежить на прямій $2x + y - 2 = 0$. Визначити координати цієї вершини.

2. Скласти рівняння прямої, що проходить через початок координат:

а) паралельно; б) перпендикулярно до прямої $3x-4y+5=0$.

3. Знайти проекцію точки $A(4;\ 6)$ на пряму $5x-4y-3=0$.

4. Дано вершини трикутника $A(1;-1), B(2;\ 1), C(3;\ 2)$. Знайти рівняння висоти, яка проведена з вершини B.

5. Знайти точку, симетричну з точкою $B(8;\ -9)$ відносно прямої, що проходить через точки $C(3;\ -4) i D(-1;\ -2)$.

6. Знайти кут між прямими: а) $3x+2y-4=0 i 5x-2y+17=0$;

б) $y=-2x+3$ і $y=3x+4$.

7. Точка $A(-4;\ 5)$ є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій $7x-y+8=0$. Скласти рівняння сторін цього квадрата, що проходять через точку A, та рівняння іншої його діагоналі.

8. З точки $A(-2;\ 3)$ під кутом α до осі Ox напрямлено промінь світла. Дійшовши до осі Ox, промінь відбивається. Знайти рівняння прямих, на яких лежать напрямлений і відбитий промені, якщо $tg\alpha=\sqrt{3}$.

9. Визначити, при яких значеннях m і n пряма $(m+2n-3)x+(2m-n+1)y+6m+9=0$ паралельна до осі ординат і відтинає на осі абсцис відрізок, величина якого дорівнює *–3*. Записати рівняння цієї прямої.

10. Дано рівняння двох сторін прямокутника $3x-2y-5=0 i 2x+3y+7=0$, а також одну з його вершин $A(-2;1)$. Обчислити площу цього прямокутника.

11. Обчислити віддаль між паралельними прямими $4x-3y+15=0$ і $8x-6y+25=0$.

12. Скласти рівняння бісектрис кутів, що утворюються при перетині двох прямих $x-2y-3=0\ i\ 2x+4y+7=0$.

13. Обчислити відхилення точки $A(-2;\ 1)$ від прямої $L: 3x-4y+15=0$.

14. Знайти точку, симетричну з точкою $B(4;2)$ відносно прямої $3x-2y+7=0$.

15. Дана пряма $L: 2x+3y+4=0$. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $A(2;\ 1)$ під кутом $\alpha=45^0$ до даної прямої.

Завдання 3

Виконати необхідні розрахунки вручну і намалювати в MathCad. Номер варіанту за списком.

1. Рівняння однієї із сторін квадрата $x + 3y - 5 = 0$. Скласти рівняння трьох інших сторін квадрата, якщо $P(-1,0)$ – точка перетину його діагоналей. Зробити малюнок.
2. Дані рівняння однієї із сторін ромба $x - 3y + 10 = 0$ і однієї з його діагоналей $x + 4y - 4 = 0$. Діагоналі ромба перетинаються в точці $P(0,1)$. Знайти рівняння інших сторін ромба. Зробити малюнок.
3. Рівняння двох сторін паралелограма $x + 2y + 2 = 0$ і $x + y - 4 = 0$, а рівняння однієї з його діагоналей $x - 2 = 0$. Знайти координати вершин паралелограма. Зробити малюнок.
4. Дані дві вершини $A(-3,3)$ і $B(5,-1)$ і точка $D(4,3)$ перетину висот трикутника. Скласти рівняння його сторін. Зробити малюнок.
5. Дані вершини $A(-3,-2)$, $B(4,-1)$, $C(1,3)$ трапеції *ABCD* $(AD \| BC)$. Відомо, що діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Знайти координати вершини D цієї трапеції. Зробити малюнок.
6. Дані рівняння двох сторін трикутника $5x - 4y + 15 = 0$ і $4x + y - 9 = 0$. Його медіани перетинаються в точці $P(0,2)$. Скласти рівняння третьої сторони трикутника. Зробити малюнок.
7. Дані дві вершини $A(2,-2)$ і $B(3,-1)$ і точка $P(1,0)$ перетину медіан трикутника *ABC*. Скласти рівняння висоти трикутника, проведеної через третю вершину *C*. Зробити малюнок.
8. Задані рівняння двох висот трикутника $x + y = 4$ і $y = 2x$ і одна з його вершин $A(0,2)$. Скласти рівняння сторін трикутника. Зробити малюнок.
9. Дані рівняння двох медіан трикутника $x - 2y + 1 = 0$ і $y - 1 = 0$ і одна з його вершин $A(1,3)$. Скласти рівняння його сторін. Зробити малюнок.
10. Дві сторони трикутника задані рівняннями $5x - 2y - 8 = 0$і $5x + 2y + 8 = 0$, а середина третьої сторони співпадає з початком координат. Скласти рівняння цієї сторони. Зробити малюнок.
11. Скласти рівняння і побудувати лінію, відстань кожної точки якої від початку координат і від точки $A(5,0)$ відноситься як *21∶*.
12. Скласти рівняння і побудувати лінію, відстань кожної точки якої від точки $A(-1,0)$ в два рази менша відстані її від прямої $x = -4$.
13. Скласти рівняння і побудувати лінію, відстань кожної точки якої від точки $A(2,\ 0)$ і від прямої $5x + 8 = 0$ відносяться, як *54∶*.
14. Скласти рівняння і побудувати лінію, кожна точка якої знаходиться в два рази далі від точки $A(4,0)$, як від точки $B(1,0)$.
15. Скласти рівняння і побудувати лінію, відстань кожної точки якої від точки $A(2,0)$ і від прямої $2x + 5 = 0$ відносяться, як 4:5.

V. ПЛОЩИНА І ПРЯМА В ПРОСТОРІ

1. Всяка площина в прямокутній системі координат визначається рівнянням першого порядку і, навпаки, кожне рівняння першого порядку з трьома невідомими задає в прямокутній системі координат площину.

Основні види рівнянь площини:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ (1)

– загальне рівняння площини, де вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальний вектором цієї площини;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ (2)

– рівнянням площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A, B, C)$;

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (3)

– рівнянням площини, що відтинає вздовж координатних осей відрізки з відповідними величинами a, b і c;

4) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ (4)

– рівняння площини, що проходить через три задані точки;

$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$:

5) $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$ (5)

– нормальне рівняння площини, де віддаль якої від початку координат дорівнює p, а α, β, γ – кути, що утворює нормаль цієї площини з координатними осями O_x, O_y, O_z.

Для зведення загального рівняння площини (1) до нормального вигляду (5) потрібно рівняння (1) помножити на нормуючий множник $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, знак якого вибирається протилежним до знака вільного члена *D*. Якщо *D=0*, то знак μ можна обрати довільно.

2. Кут між двома площинами

Нехай площини P_1 і P_2 задані рівняннями

$$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

Кут між ними визначається як кут ϕ між нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ цих площин:

$$\cos\phi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \quad (6)$$

Дві площини P_1 і P_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Дві площини P_1 і P_2 взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Віддаль d від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини (1) обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (7)$$

3. Різні види рівнянь прямої в просторі:

1) Загальне рівняння прямої в просторі.

Пряму лінію в просторі можна розглядати, як перетин двох площин. Якщо $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ – рівняння однієї з цих площин, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ – другої з цих площин, то система двох рівнянь задає загальне рівняння прямої в просторі:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

2) Канонічне рівняння прямої, де $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка, через яку проходить пряма, $\vec{s} = (m, n, p)$ –напрямний вектор прямої:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}. \qquad (9)$$

За напрямний вектор прямої (9) можна взяти векторний добуток $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ нормальних векторів $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ відповідних площин:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\} \qquad (10)$$

3) Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (11)$$

4) Параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в напрямку вектора $\vec{s} = (m, n, p)$: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$ (12)

4. **Кут між двома прямими**

Кут між двома прямими – це кут між їх напрямними векторами. Дві прямі паралельні тоді і тільки тоді, коли координати їх напрямних векторів пропорційні.

Кут ϕ між прямою (9) і площиною (1) можна знайти за допомогою формули:

$$sin\,\phi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (13)$$

Пряма і площина паралельні тоді і тільки тоді, коли $Am + Bn + Cp = 0$.

Пряма і площина перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

5. Побудова різних видів площини та прямої за допомогою MathCad.

Приклад 1. Записати рівняння площини, що проходить через задану точку $A(1, 3, -2)$, перпендикулярно до вектора $\vec{n}(1, -2{,}5)$ та зобразити її в просторі. Методику розв'язання подано на лістингу.

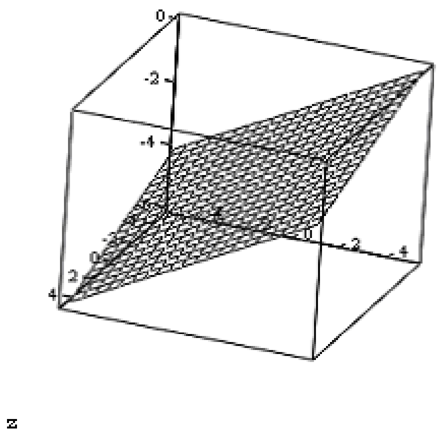
$$ORIGIN := 1$$

$$AM := \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z+2 \end{pmatrix} \qquad n := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$AM \cdot n \rightarrow x + 15 - 2 \cdot y + 5 \cdot z$$

$$\mathrm{root}(x + 15 - 2 \cdot y + 5 \cdot z, z) \rightarrow \frac{-1}{5} \cdot x - 3 + \frac{2}{5} \cdot y$$

$$z(x,y) := \frac{-1}{5} \cdot x - 3 + \frac{2}{5} \cdot y$$



При побудові використовуємо поличку інструментів *Graf* / *3D Scatter Plot* (рис.1). При форматуванні графіка поверхні задаємо різні параметри за допомогою властивості *Формат*. Поворот осей координат можна здійснювати за допомогою миші у вікні графіка.

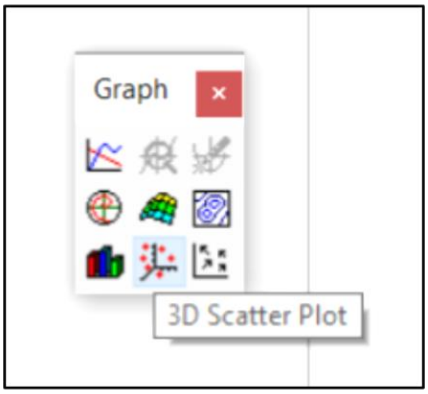


Рисунок 1 – Поличка *Graf*

Приклад 2. Записати рівняння площини, що проходить через три точки та виконати малюнок.

$ORIGIN = 1$

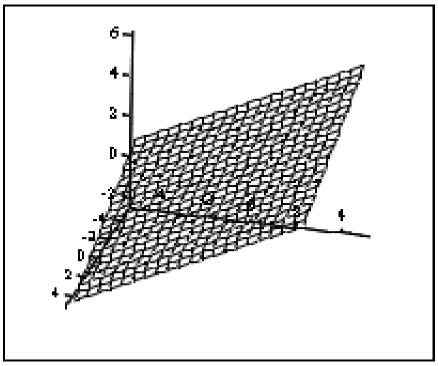
$A := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad AM := \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix}$

$AC := C - A \quad AC = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad AB := B - A \quad AB = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(AM \times AB)\cdot AC = 0 \rightarrow -3\cdot y - 11 + 6\cdot z + 2\cdot x = 0$

$\mathrm{root}(-3\cdot y - 11 + 6\cdot z + 2\cdot x, z) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot y + \frac{11}{6} - \frac{1}{3}\cdot x$

$z(x,y) := \frac{1}{2}\cdot y + \frac{11}{6} - \frac{1}{3}\cdot x$



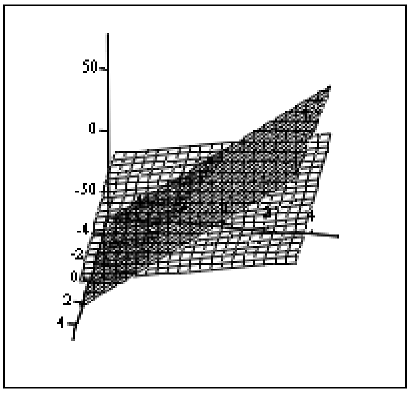
z

Приклад 3. Побудувати пряму, що задана в загальному виді

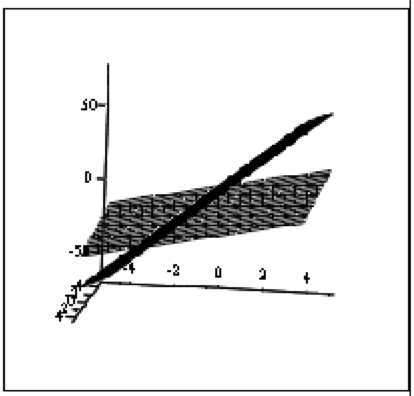
$$\begin{cases} 2x + 12y + 4 = 0 \\ -x + 3y - 5 = 0 \end{cases}.$$

$z1(x,y) := 2x + 12y + 4$

$z2(x,y) := -x + 3y - 5$



z1 ,z2



z1 ,z2

Приклад 4. Знайти проекцію точки $A(5,2,-1)$ на площину $2x - y + 3z + 23 = 0$.

Через точку перпендикулярно до площини проведемо пряму, напрямним вектором якої буде нормальний вектор заданої площини, а саме, $\vec{s} = \vec{n} = (2,-1,3)$. Далі знайдемо точку перетину прямої з площиною. Ця точка P і буде проекцією точки A на площину. Розв’язок поданий на лістингу.

$A(5,2,-1) \quad x0 := 5 \quad y0 := 2 \quad z0 := -1$

$$s := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad s1 := 2 \quad s2 := -1 \quad s3 := 3$$

$$L: \quad \frac{x - x0}{s1} = \frac{y - y0}{s2} = \frac{z - z0}{s3} \qquad P: \quad 2x - y + 3z + 23 = 0$$

given

$x = x0 + s1 \cdot t$

$y = y0 + s2 \cdot t$

$z = z0 + s3 \cdot t$

$2x - y + 3z + 23 = 0$

$$\mathrm{find}(x,y,z,t) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$P(1,4,-7)$

Приклад 5. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(3,4,-5)$ паралельно до векторів $\vec{a} = (3,1,-1)$, $\vec{b} = (1,-2,1)$.

Нехай $M(x,y,z)$ довільна точка шуканої площини. Тоді вектор $AM(x-3, y-1, z+1)$ належить цій площині і тому компланарний з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Таким чином, записавши умову компланарності отримаємо шукану площину (див. лістинг).

$$\left|\begin{pmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \text{ simplify } \rightarrow -x - 16 - 4 \cdot y - 7 \cdot z = 0$$

Завдання для самостійної роботи

Виконати необхідні розрахунки вручну і намалювати в MathCad. Номер варіанту за списком.

Варіант 1

1. Задано чотири точки $A_1(3,1,4), A_2(-1,6,1), A_3(-1,1,6), A_4(0,4,-1)$. Знайти: 1)довжину A_1A_2; 2) рівняння прямої A_3A_2; 3) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 4) рівняння площини, яка проходить через точку A_4, перпендикулярно до прямої A_2A_3.
2. Знайти відстань від точки $A(2,3,-1)$до площини $7x - 6y - 6z + 42 = 0$.
3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(2,1,-4)$ і паралельна до векторів $\vec{a} = (1,-1,3)$ і $\vec{b} = (-2,1,1)$.

Варіант 2

1. Задано чотири точки $A_1(3,-1,2), A_2(-1,0,1), A_3(1,7,3), A_4(8,5,8)$. Знайти: 1)довжину A_1A_4; 2) рівняння прямої A_4A_2; 3) рівняння площини $A_4A_2A_3$; 4) рівняння площини, яка проходить через точку A_4, перпендикулярно до прямої A_1A_3.

2. Знайти відстань від точки $A(2,-4,2)$до площини $2x+11y+10z-10=0$.

3. Знайти тупий кут між прямими $x=3t-2, y=0, z=-t+3$ і $x=2t-1, y=0, z=t-3$.

Варіант 3

1. Задано чотири точки $A_1(3,5,4), A_2(5,8,3), A_3(1,2,-2), A_4(-1,0,2)$. Знайти: 1)довжину A_3A_4; 2) рівняння прямої A_4A_1; 3) рівняння площини $A_4A_1A_3$; 4) рівняння площини, яка проходить через точку A_3, перпендикулярно до прямої A_2A_4.

2. Знайти відстань від точки $A(3,4,-12)$до площини $3x-4y-10=0$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2,-1,3)$ і $B(3,1,2)$ паралельно до вектора $\vec{a}=(3,-1,4)$.

Варіант 4

1. Задано чотири точки $A_1(2,4,3), A_2(1,1,5), A_3(4,9,3), A_4(3,6,7)$. Знайти: 1)довжину A_2A_4; 2) рівняння прямої A_4A_1; 3) рівняння площини $A_4A_2A_3$; 4) рівняння площини, яка проходить через точку A_1, перпендикулярно до прямої A_2A_3.

2. Знайти відстань від точки $A(-3,0,0)$до площини $15x-9y-12z-5=0$.

3. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$ і площини $x-2y+z-15=0$.

Варіант 5

1. Задано чотири точки $A_1(9,5,5), A_2(-3,7,1), A_3(5,7,8), A_4(6,9,2)$. Знайти: 1)довжину A_3A_4; 2) рівняння прямої A_4A_1; 3) рівняння площини $A_4A_1A_3$; 4) рівняння площини, яка проходить через точку A_3, перпендикулярно до прямої A_2A_1.

2. Знайти відстань від точки $A(1,-2,1)$до площини $2x-3y+6z+28=0$.

3. Знайти двогранний кут, що утворюються площинами $5x-3y+4z-7=0$ і $3x-4y-2z-6=0$.

Варіант 6

1. Задано чотири точки $A_1(0,7,12), A_2(2,-1,5), A_3(1,6,3), A_4(3,-9,8)$. Знайти: 1)довжину A_1A_4; 2) рівняння прямої A_3A_2; 3) рівняння площини $A_4A_2A_1$; 4) рівняння площини, яка проходить через точку A_1, перпендикулярно до прямої A_4A_3.

2. Знайти відстань від точки $A(1,4,1)$до площини $5x+3y-4z+15=0$.

3. Визначити, при яких значеннях a і c рівняння $ax+3y-2z+5=0$ і $2x-5y+cz+3=0$ задають паралельні площини.

Варіант 7

1. Задано чотири точки $A_1(5,5,4), A_2(1,-1,4), A_3(3,5,1), A_4(5,8,-1)$. Знайти: 1)довжину A_2A_3; 2) рівняння прямої A_1A_3; 3) рівняння площини $A_4A_2A_1$; 4) рівняння площини, яка проходить через точку A_1, перпендикулярно до прямої A_4A_3.

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1,-1,2)$ паралельно прямій $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}$.

3. Визначити, при якому значенні b рівняння $5x+y-3z-4=0$ і $2x+by+3z+11=0$ задають взаємно-перпендикулярні площини.

Варіант 8

1. Задано чотири точки $A_1(6,1,1), A_2(4,6,6), A_3(4,2,0), A_4(1,2,6)$. Знайти: 1)довжину A_1A_3; 2) рівняння прямої A_1A_3; 3) рівняння площини $A_4A_3A_1$; 4) рівняння площини, яка проходить через точку A_2, перпендикулярно до прямої A_4A_3.

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2,-1,3)$ паралельно прямій $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{4}$.

3. Обчислити об'єм піраміди, обмеженої площиною $10x+6y-5z-30=0$ і координатними площинами.

Варіант 9

1. Задано чотири точки $A_1(7,5,3), A_2(9,4,4), A_3(4,5,7), A_4(7,9,6)$. Знайти: 1)довжину A_1A_2; 2) рівняння прямої A_4A_2; 3) рівняння площини $A_4A_2A_3$; 4) рівняння площини, яка проходить через точку A_2, перпендикулярно до прямої A_4A_3.

2. Записати рівняння прямої, що проходить через точки $A(1,2,-1)$ та $B(0,3,-4)$.

3. Записати канонічне рівняння прямої, заданої системою рівнянь $\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x+y-4z-8=0 \end{cases}$.

Варіант 10

1. Задано чотири точки $A_1(3,1,4), A_2(-1,6,1), A_3(-1,1,6), A_4(0,4,-1)$. Знайти: 1)довжину A_4A_2; 2) рівняння прямої A_4A_2; 3) рівняння площини $A_4A_2A_3$; 4) рівняння площини, яка проходить через точку A_2, перпендикулярно до прямої A_4A_1.

2. Записати рівняння прямої, що проходить через точки $A(3,0,4)$ та $B(-1,-2,3)$.

3. Знайти гострий кут між прямими $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}$ і $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{4}$.

Варіант 11

1. Задано чотири точки $A_1(2,-5,1), A_2(1,2,3), A_3(1,0,-2), A_4(4,1,2)$. Знайти: 1)довжину A_3A_4; 2) рівняння прямої A_4A_1; 3) рівняння площини $A_4A_1A_3$; 4) рівняння площини, яка проходить через точку A_3, перпендикулярно до прямої A_2A_4.

2. Знайти відстань від точки $A(5,4,-1)$до площини $2x+3y-10=0$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(-2,1,3)$ і $B(-3,1,0)$ паралельно до вектора $\vec{a}=(3,1,4)$.

Варіант 12

1. Задано чотири точки $A_1(1,5,1), A_2(2,1,-5), A_3(1,0,3), A_4(3,4,8)$. Знайти: 1)довжину A_1A_4; 2) рівняння прямої A_3A_2; 3) рівняння площини $A_4A_2A_1$; 4) рівняння площини, яка проходить через точку A_1, перпендикулярно до прямої A_4A_3.

2. Знайти відстань від точки $A(1,-4,4)$до площини $x+3y-4z+6=0$.

3. Визначити, при яких значеннях a і c рівняння $ax-3y+4z+5=0$ і $2x-5y+cz+3=0$ задають паралельні площини.

Варіант 13

1. Задано чотири точки $A_1(5,5,4), A_2(1,-1,4), A_3(3,5,1), A_4(5,8,-1)$. Знайти: 1)довжину A_2A_3; 2) рівняння прямої A_1A_3; 3) рівняння площини $A_4A_2A_1$; 4) рівняння площини, яка проходить через точку A_1, перпендикулярно до прямої A_4A_3.

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1,-1,2)$ паралельно прямій $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}$.

3. Визначити, при якому значенні b рівняння $5x+y-3z-4=0$ і $2x+by+3z+11=0$ задають взаємно-перпендикулярні площини.

Варіант 14

1. Задано чотири точки $A_1(2,1,1), A_2(-1,0,2), A_3(1,1,6), A_4(0,4,-1)$. Знайти: 1)довжину A_1A_2; 2) рівняння прямої A_3A_2; 3) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 4) рівняння площини, яка проходить через точку A_4, перпендикулярно до прямої A_2A_3.

2. Знайти відстань від точки $A(2,-3,2)$до площини $x-6y-6z+12=0$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(0,1,4)$ і паралельна до векторів $\vec{a}=(-1,-1,3)$ і $\vec{b}=(2,1,1)$.

Варіант 15

1. Задано чотири точки $A_1(4,5,-3), A_2(0,4,2), A_3(4,3,1), A_4(2,3,6)$. Знайти: 1)довжину A_1A_2; 2) рівняння прямої A_4A_2; 3) рівняння площини $A_4A_2A_3$; 4) рівняння площини, яка проходить через точку A_2, перпендикулярно до прямої A_4A_3.

2. Записати рівняння прямої, що проходить через точки $A(0,2,-1)$ та $B(0,3,4)$.

3. Записати канонічне рівняння прямої, заданої системою рівнянь $\begin{cases} x-3y+3z+1=0 \\ 2x+y+4z-6=0 \end{cases}$.

VI. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1. Основні криві другого порядку

1.1. ***Колом*** називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки площини, яка називається центром кола, є величина стала і називається радіусом кола. Рівняння *кола* радіуса R з центром в точці $(a; b)$ має вигляд:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \quad (1)$$

Якщо ж центр кола співпадає з початком координат, то його рівняння матиме вигляд:

$$x^2+y^2=R^2. \quad (2)$$

1.2. ***Еліпсом*** називається множина всіх точок площини, сума відстаней яких віх двох фіксованих точок, що називаються фокусами, є величина стала і більша, ніж відстань між фокусами.

Нехай фокуси розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ (рис 1).

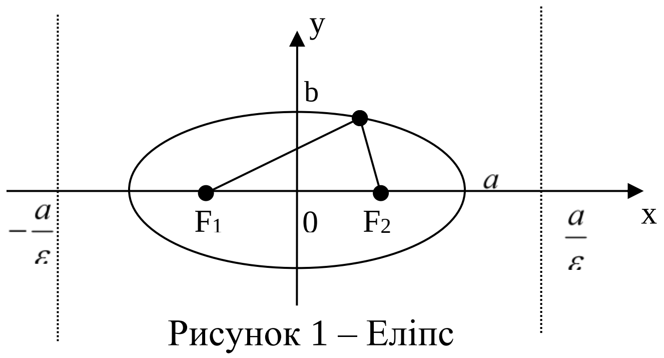


Рисунок 1 – Еліпс

Тоді канонічне рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \quad (3)$$

Величини a і b називаються відповідно великою і малою піввіссю еліпса; при цьому $b^2=a^2-c^2$

Відношення $\varepsilon=\frac{c}{a}$ називається ексцентриситетом еліпса, $\varepsilon<1$.

Дві прямі $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами еліпса.

Рівняння еліпса з центром в точці (x_0, y_0): $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$ (4)

1.3. ***Гіперболою*** називається множина точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох фіксованих точок, що називаються фокусами, є ненульова стала величина і менша за відстань між фокусами.

Нехай фокуси розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат: $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$ (рис 2), тоді канонічним рівнянням гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Величини a і b називаються відповідно дійсною і уявною піввіссю гіперболи; при цьому $b^2 = c^2 - a^2$.

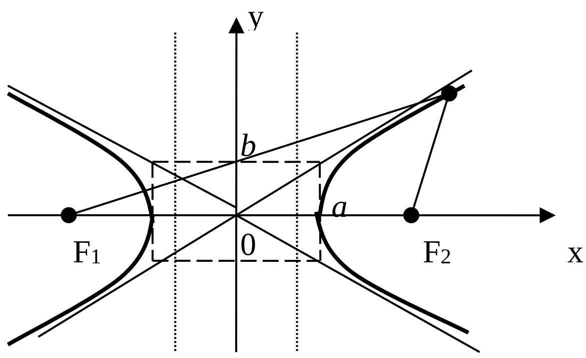


Рисунок 2 – Гіпербола

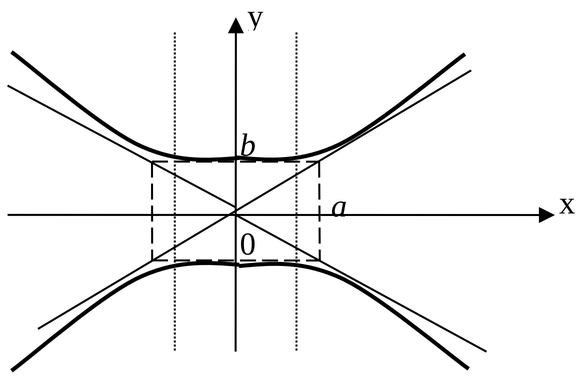


Рисунок 3 – Спряжена гіпербола

Відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$ називається ексцентриситетом гіперболи $\varepsilon > 1$. Дві прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами гіперболи. Дві прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ називаються асимптотами гіперболи.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Рівняння (6) задає рівнянням спряженої гіперболи до гіперболи (5) (рис.3).

Рівняння гіперболи з центром в точці (x_0, y_0) : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ (7)

1.4. Нехай задано деяку пряму $L: x = -p/2$ і точку $F(-p/2; 0)$ поза нею.

Параболою називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від точки F (фокуса) і прямої L (директриси).

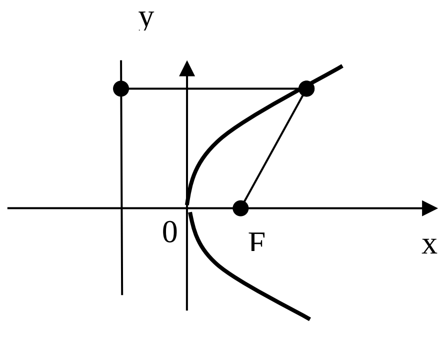


Рисунок 4 – Парабола $y^2 = 2px$

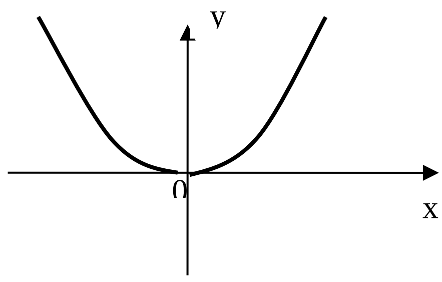


Рисунок 5 – Парабола $x^2 = 2py$

Рівняння $y^2 = 2px$, (8)
називається канонічним рівнянням параболи, а величина p – параметром параболи (рис. 4).

$$\text{Рівняння } x^2 = 2py, \tag{9}$$

називається рівнянням параболи, а величина p – параметром параболи (рис. 5).

1.5. Параметричні рівняння кривих:

Параметричне рівняння кола $\begin{cases} x = R\cos t\,; \\ y = R\sin t\,. \end{cases}$ (10)

Параметричне рівняння еліпса $\begin{cases} x = a\cos t\,; \\ y = b\sin t\,. \end{cases}$ (11)

Параметричне рівняння гіперболи $\begin{cases} x = a\cdot cht; \\ y = b\cdot sht. \end{cases}$ (12)

У рівняннях (10)-(11) параметр $0 \le t \le 2\pi$, для (12) – $-\infty \le t \le \infty$.

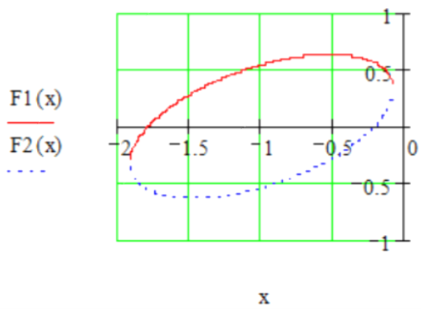
Приклад 1.

Визначити тип рівняння $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$, звести його до канонічного виду та зобразити графічно.

1. Побудуємо графік заданої лінії використовуючи програму MathCad. Результати наведено на лістингу:

$$8x^2 - 12x\cdot y + 17\cdot y^2 + 16\cdot x - 12\cdot y + 3 = 0 \text{ solve }, y \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{6}{17} + \frac{6}{17}\cdot x + \frac{1}{17}\cdot\left(-15 - 200\cdot x - 100\cdot x^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{6}{17} + \frac{6}{17}\cdot x - \frac{1}{17}\cdot\left(-15 - 200\cdot x - 100\cdot x^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$F1(x) := \frac{6}{17} + \frac{6}{17}\cdot x + \frac{1}{17}\cdot\left(-15 - 200\cdot x - 100\cdot x^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad F2(x) := \frac{6}{17} + \frac{6}{17}\cdot x - \frac{1}{17}\cdot\left(-15 - 200\cdot x - 100\cdot x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

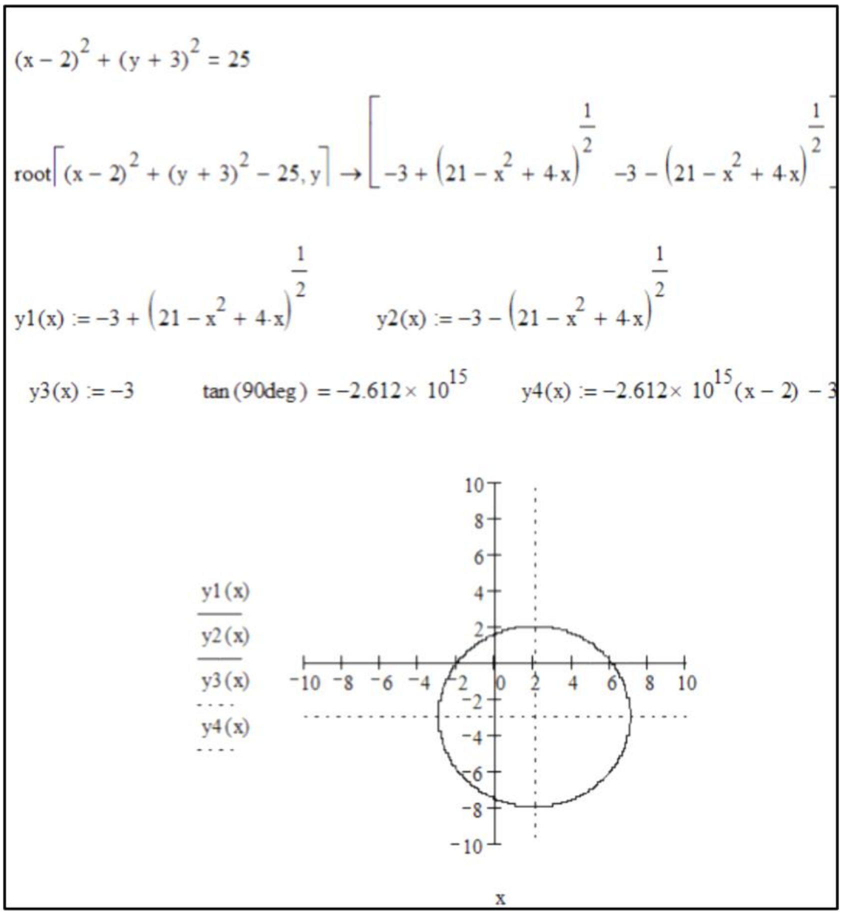


4. Побудова кривих другого порядку за допомогою MathCad

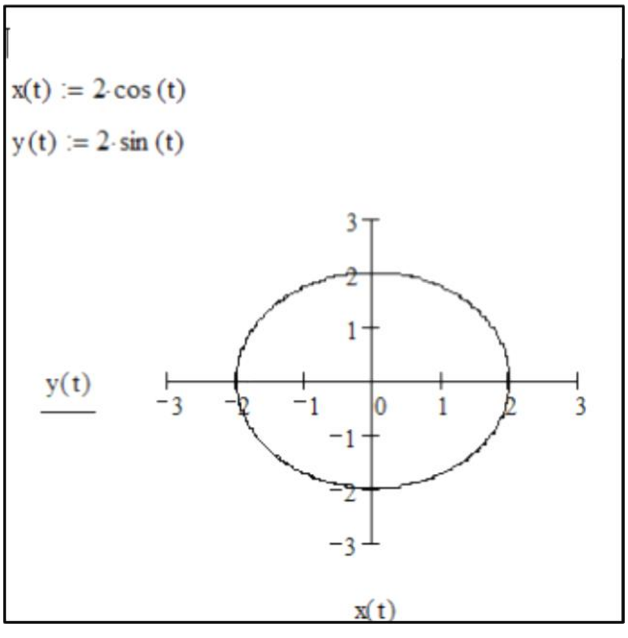
Приклад 3. Побудувати коло, яке задане рівнянням:

a)$(x-2)^2+(y+3)^2=36$; b) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$; c) $\rho^2\cos^2\phi+\rho^2\sin^2\phi=4$.

a)



b)



Приклад 2. Побудувати еліпс, який заданий рівнянням:

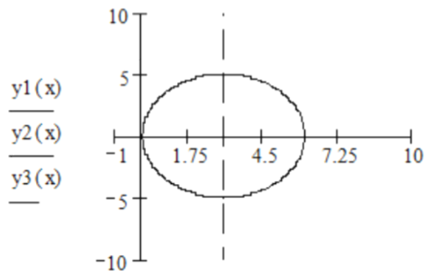
a) $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$; b) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$.

a)

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\mathrm{root}\left[\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{25} - 1, y\right] \rightarrow \left[\frac{5}{3}\cdot\left(-x^2 + 6\cdot x\right)^{\frac{1}{2}} \quad \frac{-5}{3}\cdot\left(-x^2 + 6\cdot x\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

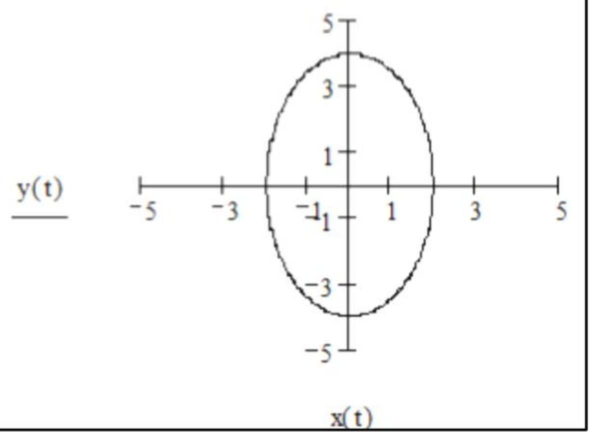
$$y1(x) := \frac{5}{3}\cdot\left(-x^2 + 6\cdot x\right)^{\frac{1}{2}} \qquad y2(x) := \frac{-5}{3}\cdot\left(-x^2 + 6\cdot x\right)^{\frac{1}{2}} \qquad y3(x) := \tan(90\mathrm{deg})\cdot(x-3)$$



b)

$$x(t) := 2\cdot\cos(t)$$

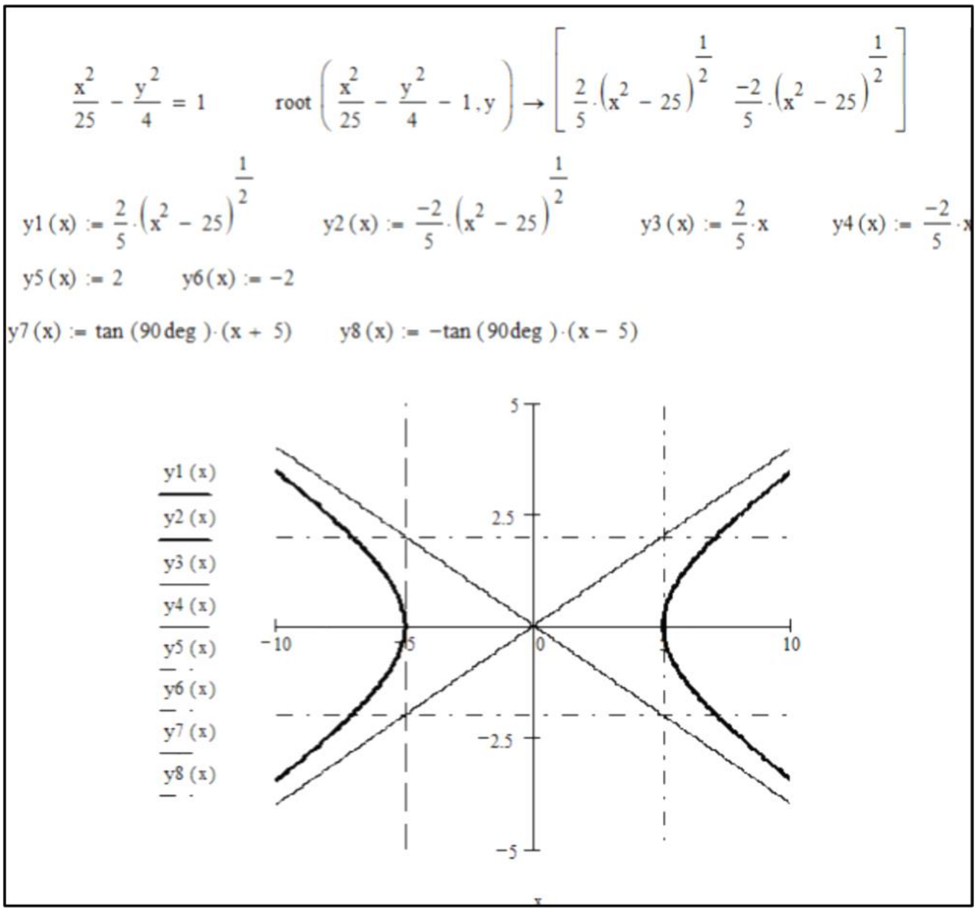
$$y(t) := 4\cdot\sin(t)$$



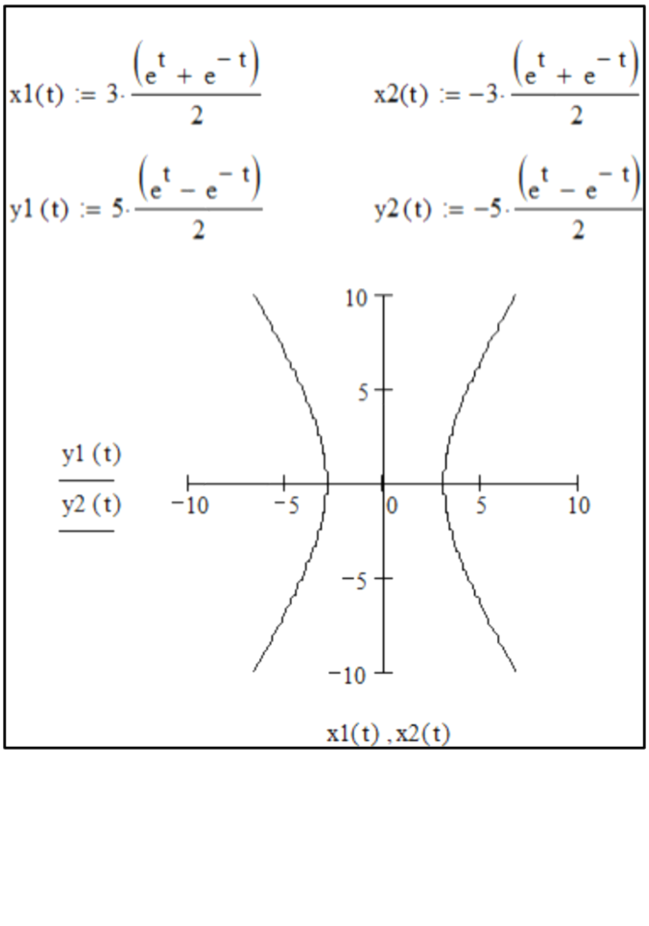
Приклад 5.

Побудувати гіперболу та її асимптоти: а) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$; b) $\begin{cases} x=3cht \\ y=5sht \end{cases}$;

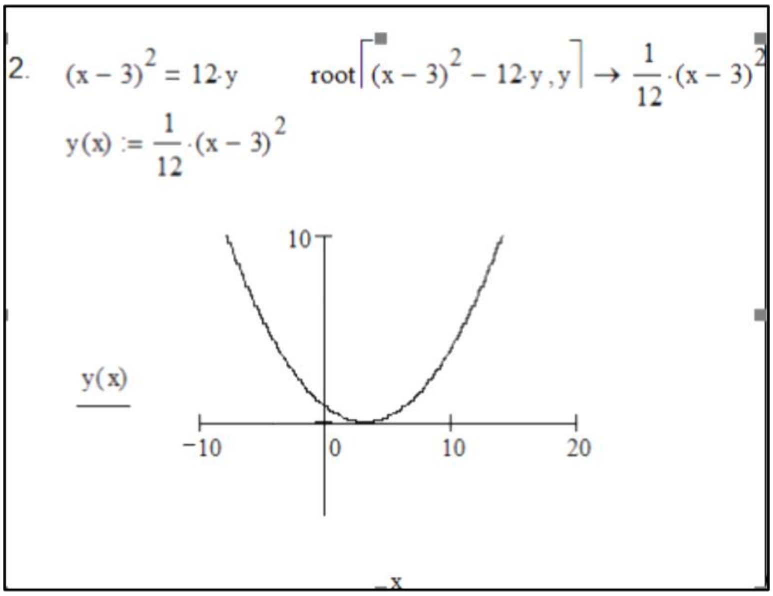
а)



b)



Приклад 6.
Побудувати параболу $(x-3)^2 = 12y$



Завдання для самостійної роботи

Завдання 1

1. Скласти рівняння кола з центром у точці $C(1;-1)$, якщо пряма $5x-12y+9=0$ є дотичною до цього кола.

2. Яка лінія визначається рівнянням: а) $y=-\sqrt{25-x^2}$; б) $x=-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$?

3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо: а) його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c=10$; б) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$; в) відстань між його директрисами дорівнює 5 і $2c=4$; г) його мала вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами – 13.

4. Дано рівняння еліпса $9x^2+5y^2=45$. Знайти: а) його півосі; б) фокуси; в) ексцентриситет; г) рівняння директрис.

5. Визначити точки еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$, віддаль яких до лівого фокуса дорівнює 2,5.

6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо: а) відстань між фокусами $2c=10$ і вісь $2b=8$; б) рівняння її асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c=20$; в) відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{2}$.

7. Визначити точки гіперболи $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{32}=1$, відстань яких до правого фокуса дорівнює 4,5.

8. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо а) парабола розташована симетрично відносно осі OX і проходить через точку $A(-1;3)$; б) парабола розташована симетрично відносно осі OY і проходить через точку $A(4;-8)$.

9. Дано рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Скласти його полярне рівняння, якщо напрямок полярної осі співпадає з додатнім напрямком осі абсцис, а полюс знаходиться в центрі еліпса.

10. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо рівняння її асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$, а віддаль між директрисами дорівнює $12\frac{4}{5}$.

11. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо парабола розташована симетрично відносно осі OY і проходить через точку $C(1;1)$.

12. Яка лінія визначається рівнянням а) $y=\frac{2}{5}\sqrt{x^2+25}$; b) $x=-5\sqrt{-y}$.

13. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат знаючи, що віддаль між його директрисами дорівнює 32 і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник.– К: А.С.К., 2006. – 648 с.
2. Вища математика: підручник. У 2 кн.– Кн.1. Основні розділи / Г.Й. Призва та ін. – К.: Либідь, 2003. – 400 с.
3. Вища математика: підручник. У 2 кн.– Кн. 2. Спеціальні розділи / Г.Л. Кулініч та ін. – К.: Либідь, 2003. – 400 с.
4. Вища математика: збірник задач / В.П. Дубовик та ін..– Київ: Вища шк., 1999. – 480 с.
5. Вища математика: збірник задач / П.П. Овчинников та ін. У 2 чт. – Ч. 1. – К.: Техніка, 2004.– 376с.
6. Овчинников П.П. Вища математика: підручник. У 2 ч. – Ч. 1. – К.: Техніка, 2000.– 792 с.
7. Овчинников П.П. Вища математика: підручник. У 2 чт. – Ч. 2. – К.: Техніка, 2000.– 792 с.

ЗМІСТ

Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний.
Формат видання 60x84/16.
Умов. друк. арк.3.54 Зам. № 22. Наклад 50 прим.
Видруковано ПП «АУТДОР - ШАРК»
88000, м. Ужгород, пл. Жупанатська, 15/1. Тел.: 3-51-25.
E-mail: office@shark.com.ua
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції
Серія 3т № 40 від 29 жовтня 2012 року