

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»  
ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ ТА МЕРЕЖ**

**ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА**

*Методичні вказівки та завдання до практичних робіт  
для студентів 2-го курсу інженерно-технічного факультету,  
спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології  
та робототехніка*

**Ужгород – 2024 р.**

Дискретна математика. Методичні вказівки і завдання до практичних робіт для студентів 2-го курсу інженерно-технічного факультету, спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка.

Укладачі: Тютюнникова Г.С., старший викладач кафедри комп'ютерних систем та мереж інженерно-технічного факультету ДВНЗ «УжНУ»;  
Балога С.І., доцент, канд.фіз.-мат.наук, доцент кафедри комп'ютерних систем та мереж інженерно-технічного факультету ДВНЗ «УжНУ»;  
Совга Т.С., старший викладач кафедри комп'ютерних систем та мереж інженерно-технічного факультету ДВНЗ «УжНУ».

Рецензент: Іваницький В.П., професор, доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри приладобудування інженерно-технічного факультету ДВНЗ «УжНУ».

Відповідальний за випуск – Голик Й.М., доцент, канд. техн. наук, декан інженерно-технічного факультету ДВНЗ «УжНУ».

Дані методичні вказівки розглянуто та схвалено на засіданні кафедри комп'ютерних систем та мереж, протокол № 1 від «05» вересня 2024 року та науково-методичної комісії інженерно-технічного факультету протокол № 1 від «12» вересня 2024 року.

## ВСТУП

Мета дисципліни “Дискретна математика” – вивчення методів подання чисел в ЕОМ, ознайомлення з основними поняттями множини, способами задання множин, ознайомлення та оволодіння сучасними методами дискретної математики, основ математичної логіки, аналізу та синтезу цифрових операційних та керуючих автоматів.

Вивчення даної дисципліни дає студентам необхідну теоретичну і практичну підготовку для того, щоб вміти розробляти і аналізувати алгоритми переробки дискретної інформації складних процесів, складати структурні схеми комбінаційних логічних схем, ефективно розв’язувати практичні задачі з прикладної теорії цифрових автоматів з використанням ЕОМ.

Дані методичні вказівки допоможуть студентам засвоїти вміння застосовувати методи мінімізації логічних функцій для отримання мінімальної ДНФ при побудові комбінаційних схем, зокрема, на елементах різних базисів із використанням новітніх комп’ютерних технологій.

Виконання студентами практичних робіт з курсу «Дискретна математика» дозволить закріпити теоретичні знання і надасть можливість набути практичних навичок роботи із застосуванням пакету прикладних програм Electronics Workbench.

## Практична робота №1

**Тема:** Операції над множинами. Діаграми Ейлера-Венна.

**Мета роботи:** Ознайомитися з основними поняттями множини, способами задання множин. Набути навичок виконання деяких операцій над множинами. Навчитись застосовувати діаграми Ейлера-Венна до розв'язування задач з теорії множин.

### Теоретичні відомості

#### 1.1. Поняття множини

Поняття множини – одне з основних понять математики. Воно не має точного визначення і його слід віднести до аксіоматичних понять. Такими аксіоматичними поняттями, наприклад, в елементарній геометрії є поняття *точка*, *пряма*, *площина*.

Як правило, термін *множина* пояснюється за допомогою прикладів, а потім вказуються правила його використання в математичних застосуваннях.

Часто приймається формулювання інтуїтивного поняття множини Г. Кантора – основоположника цієї теорії: «Довільне зібрання певних предметів нашої інтуїції чи інтелекту, які можна відрізнити один від одного і які уявляються як єдине ціле, називається множиною. Предмети, які входять до складу множини, називаються її елементами.»

**Множиною** є сукупність визначених об'єктів, різних між собою, об'єднаних за певною ознакою чи властивістю.

Якщо  $a$  один з об'єктів множини  $A$ , то говорять, що  $a$  – *елемент множини  $A$*  або  $a$  *належить  $A$* .

Домовимося позначати множини великими латинськими літерами  $A, B, C, \dots$ , а елементи множини – малими латинськими літерами  $a, b, c, \dots$

#### Способи задання множин:

- *перерахуванням*, тобто списком всіх своїх елементів. Такий спосіб задання прийнятний тільки для скінченних множин. Позначення списку – у фігурних дужках. Наприклад, множина, що складається з перших п'яти простих чисел  $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ . В загальному вигляді твердження, що скінченна множина  $A$  складається з  $n$  елементів, записується  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Запис  $a \in A$  ( $a \notin A$ ) означає, що  $a$  є (не є) елементом множини  $A$ .

Використовуються такі загальноприйняті позначення основних числових множин:

1.  $N$  – множина натуральних чисел:

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

2.  $Z$  – множина цілих чисел:

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

3.  $Q$  – множина раціональних чисел. Будь-яке раціональне число можна зобразити у вигляді дроби:

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a \in Z, b \in N \right\}.$$

4.  $R$  – множина дійсних чисел. Будь-яке дійсне число можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дроби  $a, b_1 b_2 \dots b_n \dots$  із цілою частиною  $a \in Z$  і  $b_k \in \{0, \dots, 9\}$ .

Множина  $A$  називається *підмножиною* (або *включенням*) множини  $B$  ( $A \subseteq B$ ), якщо кожен елемент множини  $A$  є елементом множини  $B$ , тобто, якщо  $x \in A$ , то  $x \in B$ .

Якщо  $A \subseteq B$  й  $A \neq B$ , то  $A$  називається *строгою підмножиною* й позначається  $A \subset B$ .

Дві множини *рівні* ( $A = B$ ), якщо всі їх елементи збігаються. Множини  $A$  і  $B$  рівні, якщо  $A \subseteq B$  і  $B \subseteq A$ .

Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається *скінченною*, у протилежному випадку – *нескінченною*. Кількість елементів у скінченній множині  $A$  називається *потужністю* множини  $A$  і позначається  $|A|$ .

Множина, що не містить елементів, називається *порожньою множиною* і позначається  $\emptyset$ . Порожня множина є підмножиною будь-якої множини. *Універсальна множина*  $U$  є множина, яка володіє такою властивістю, що всі розглянуті множини є її підмножинами.

Варто розрізнити поняття належності елементів множині й включення! Так, наприклад, якщо множина  $A = \{1, 3, 6, 13\}$ , то  $3 \in A$ ,  $6 \in A$ , але  $\{3, 6\} \notin A$ , у той час як  $\{3, 6\} \subseteq A$ .

**Приклад 1.1.** Які з наведених визначень множин  $A, B, C, D$  є коректними:

- а)  $A = \{1, 3, 5\}$ , б)  $B = \{4, 7, 7, 11\}$ , в)  $C = \{x | x \in A\}$ , г)  $D = \{A, B\}$  ?

Чи належить число 5 множині  $D$ ?

*Розв'язання:*

а) визначення множини  $A$  перерахуванням елементів коректне.

б) відповідно до визначення множини, елементи її повинні бути різні, тому при перерахуванні елементів множини не слід указувати той самий елемент кілька разів. Коректне визначення множини  $B$  виглядає в такий спосіб:  $B = \{4, 7, 11\}$ .

в) визначення множини  $C$  описом характеристичної властивості коректне.

г) визначення списком множини  $D$  коректне: елементами множини  $D$  є множини  $A$  і  $B$ ,  $D = \{\{1, 3, 5\}, \{4, 7, 7, 11\}\}$ . Однак  $5 \notin D$ , тому що даний елемент не перерахований у списку.

Множина всіх підмножин, що складаються з елементів множини  $A$ , називається *булеаном* і позначається  $P(A)$  або  $B(A)$ .

**Приклад 1.2.** Нехай  $A = \{a, b, c, d\}$ . Визначити булеан множини  $A$ . Яка потужність множини  $P(A)$ ?

*Розв'язання:*

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

Потужність  $|P(A)| = 16$ .

### Задачі для самостійної роботи

- Задати різними способами множину натуральних чисел, кратних 3 і не перевищуючих 100.
- Задати різними способами множину обласних центрів України.
- Перелічити елементи множини  $\{x | x - \text{цїле і } x^3 < 100\}$ .
- Перелічити елементи множини  $\{x | x - \text{список студентів вашої групи}\}$ .
- Опишіть множину  $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$  за допомогою характеристичної властивості.
- Визначте істинність або хибність кожного з наступних висловлювань:
 

а) $5 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ;	б) $\{5\} \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ;
в) $\{1, 3, 5\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;	г) $\{1, 3, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

## 1.2. Операції над множинами

**Об'єднанням** множин  $A$  і  $B$  називається множина, що складається із всіх тих елементів, які належать хоча б до однієї з множин  $A$  або  $B$ . Об'єднання множин  $A$  і  $B$  позначається  $A \cup B$ . Це визначення рівносильне наступному:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

**Перетином** множин  $A$  і  $B$  називається множина, що складається із всіх тих елементів, які належать множині  $A$  і множині  $B$ . Перетин множин  $A$  і  $B$  позначається  $A \cap B$ . Це визначення рівносильне наступному:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

**Доповненням** (або **абсолютним доповненням**) множини  $A$  називається множина, що складається із всіх елементів універсальної множини, які не належать  $A$ . Доповнення множини  $A$  позначається  $\bar{A}$  або  $A'$ . Це визначення рівносильне наступному:

$$\bar{A} = U \setminus A = \{x | x \in U, x \notin A\}.$$

**Різницею** множин  $A$  і  $B$  (або **відносним доповненням**) називається множина, що складається із всіх елементів множини  $A$ , які не належать  $B$ . Різницю множин  $A$  і  $B$  позначають  $A \setminus B$ . Це визначення рівносильне наступному:

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

**Симетричною різницею** множин  $A$  і  $B$  називається множина, що складається з об'єднання всіх елементів, що належать множині  $A$  і не містяться в  $B$  та елементів, що належать множині  $B$  і не містяться в  $A$ . Симетрична різниця множин  $A$  і  $B$  позначається  $A \div B$ . Це визначення рівносильне наступному:

$$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Операції, які виконують над однією множиною, називають *унарними*. Операції, які виконують над двома множинами, називають *бінарними*. Прикладом унарної операції є знаходження доповнення. Прикладами бінарних операцій є об'єднання, перетин, різниця, симетрична різниця.

Якщо множина  $A$  є об'єднанням підмножин  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ , то сукупність підмножин  $\{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$  називається покриттям множини  $A$ . Якщо ж сукупність підмножин покриття множини  $A$  такі, що  $A_i \cap A_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ , то сукупність  $\{A_1, \dots, A_n, \dots\}$  називається розбиттям множини  $A$ , а підмножини  $A_i$  – класами цього розбиття,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Приклад 1.3.** Нехай  $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$ . Знайти  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $A \div B$ .

*Розв'язання:*

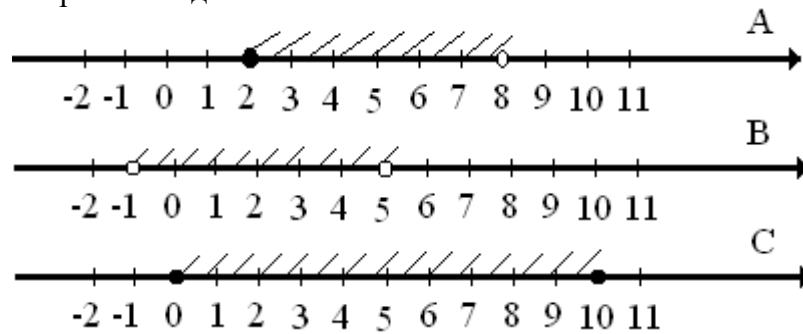
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}, \quad A \cap B = \{2, 3, 7\}, \quad A \setminus B = \{5, 6\}, \quad A \div B = \{1, 5, 6, 9\}.$$

**Приклад 1.4.** Нехай  $\Pi$  – множина всіх парних натуральних чисел, а  $\mathbb{N}$  – множина всіх непарних натуральних чисел; тоді  $\Pi \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$ ,  $\Pi \cap \mathbb{N} = \emptyset$ ,  $\mathbb{N} \cap \Pi = \Pi$ ,  $\mathbb{N} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N} \setminus \Pi = \mathbb{N}$ , тобто  $\mathbb{N} \setminus \Pi$  – множина непарних натуральних чисел і навпаки  $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \Pi$ .

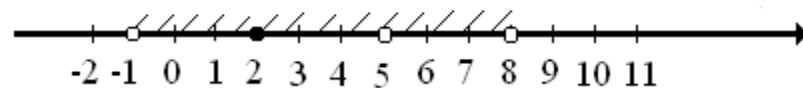
**Приклад 1.5.** Якщо  $A$  – множина прямих, які проходять через точку  $M$  деякої площини;  $B$  – множина прямих, які проходять через точку  $N$  цієї площини. Тоді  $A \cap B = \{l\}$ , де  $l$  – пряма, яка проходить через точки  $M$  і  $N$ .

**Приклад 1.6.** Нехай  $A = [2, 8)$ ,  $B = (-1, 5)$ ,  $C = [0, 10]$ . Знайти  $A \cup B$ ,  $B \cap C$ ,  $C \setminus A$ ,  $B \div C$ ,  $\overline{B}$ .

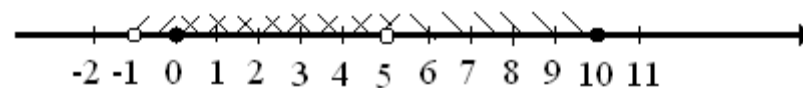
*Розв'язання:* Зобразимо задані множини на числовій осі



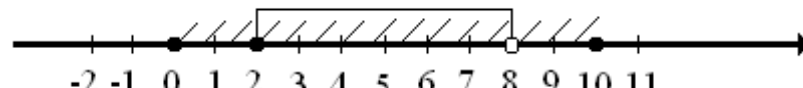
Тоді шукані множини будуть мати вигляд (рис. 1.1):



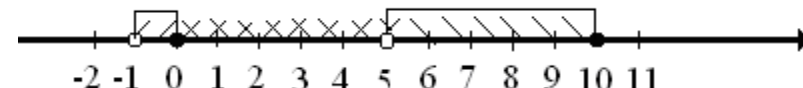
$$A \cup B = (-1, 8);$$



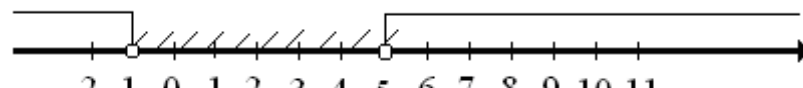
$$B \cap C = [0, 5);$$



$$C \setminus A = [0, 2) \cup [8, 10];$$



$$B \div C = (-1, 0) \cup [5, 10];$$

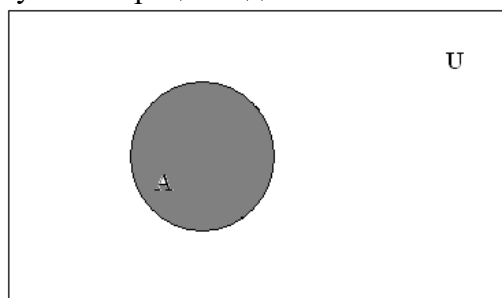


$$\overline{B} = (-\infty, -1] \cup [5, \infty).$$

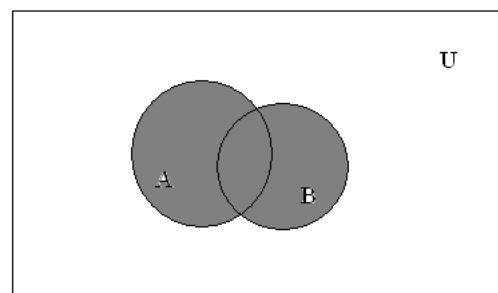
Рис. 1.1.

### 1.3. Діаграми Ейлера-Венна

Для графічної ілюстрації відносин між множинами даної універсальної множини  $U$  використовують діаграми Ейлера-Венна. Діаграма Ейлера-Венна – це зображення множини у вигляді геометричної множини, наприклад, кола. При цьому універсальну множину зображують у вигляді прямокутника. На рис. 1.2 зображені діаграми Ейлера-Венна для розглянутих операцій над множинами.



A



$A \cup B$

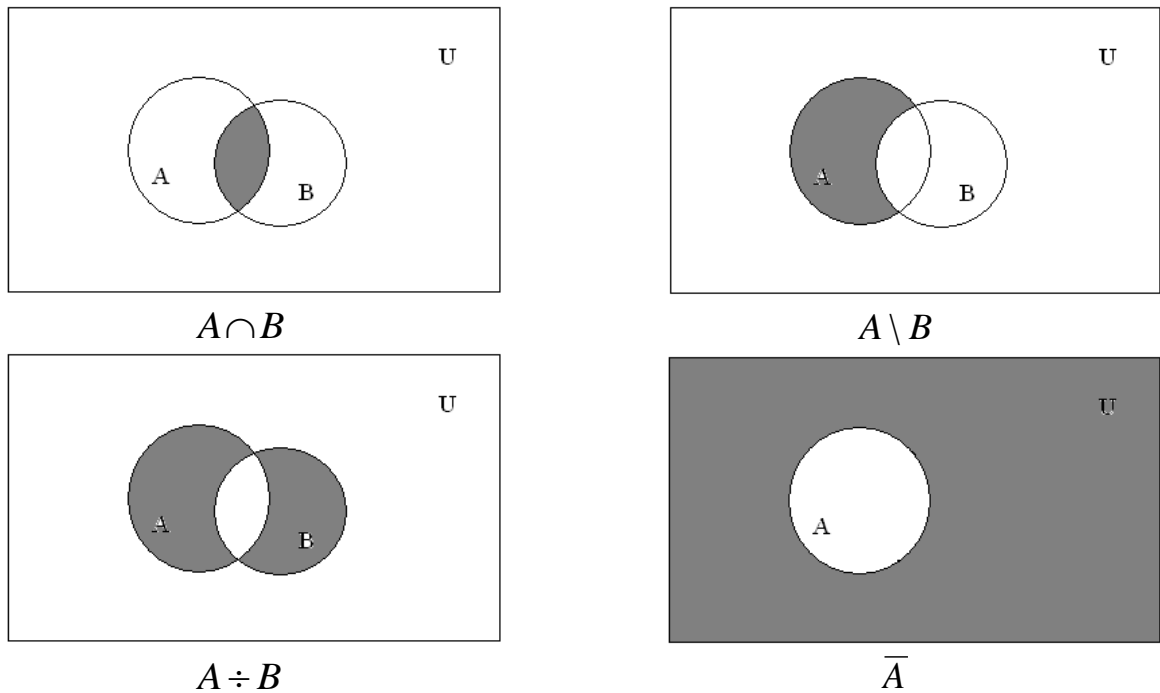


Рис. 1.2.

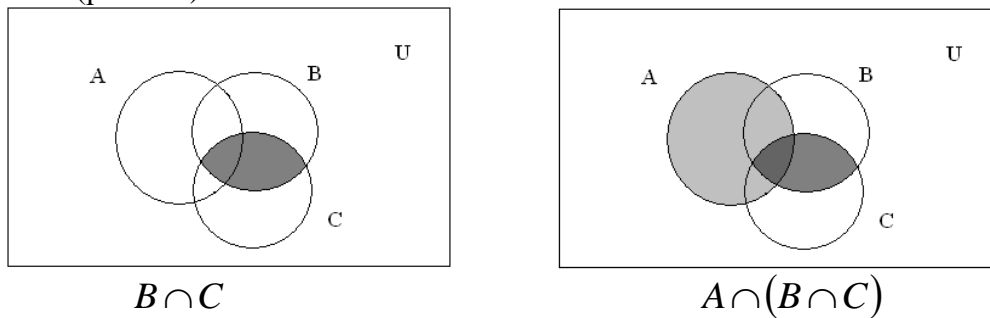
**Теорема 1.1.** Для будь-яких підмножин  $A, B, C$  універсальної множини  $U$  справедливо наступне:

- а) закони ідемпотентності:  $A \cup A = A$ ;  $A \cap A = A$ ;
- б) подвійне доповнення:  $\overline{(\overline{A})} = A$ ;
- в) закони де Моргана:  $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ;  $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ;
- г) властивості комутативності:  $A \cup B = B \cup A$ ;  $A \cap B = B \cap A$ ;
- д) властивості асоціативності:  
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ ;  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ ;
- е) властивості дистрибутивності:  
 $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;
- ж) властивості тотожності:  $A \cup \emptyset = A$ ;  $A \cap U = A$ ;
- з) властивості доповнення  $A \cup \overline{A} = U$ ;  $A \cap \overline{A} = \emptyset$ .

Пріоритет операцій: 1.  $\overline{A}$ ; 2.  $A \cap B$ ; 3.  $A \cup B$ ; 4.  $A \setminus B$ ; 5.  $A \div B$ .

**Приклад 1.7.** Покажіть, що  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ .

**Розв'язання.** Доведемо властивість асоціативності, скориставшись діаграмами Ейлера-Венна (рис. 1.5):



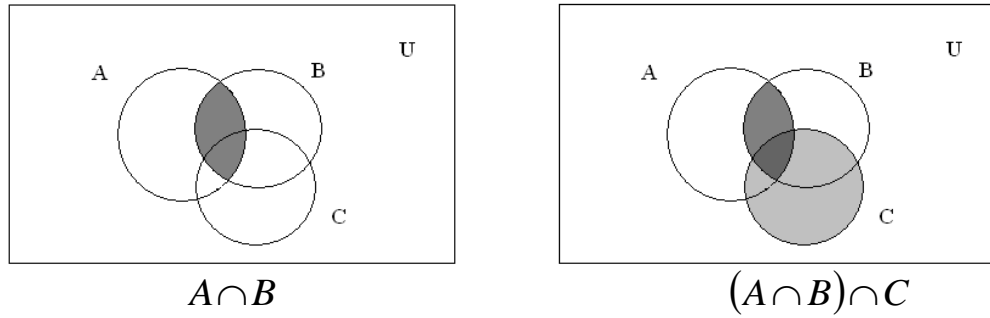


Рис. 1.3.

Як бачимо з рис. 1.3  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ , що й треба було довести.

**Приклад 1.8.** Спростити вирази:

1.  $(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup B' \cup C' = [(A \cup A') \cap B \cap C] \cup B' \cup C' =$   
 $= (U \cap B \cap C) \cup B' \cup C' = (B \cap C) \cup B' \cup C' = (B \cap C) \cup (B \cap C)' = U$
2.  $(A \cap B \cap C \cap D') \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap C) \cup (C \cap D) = (A \cap B \cap C \cap D') \cup$   
 $\cup [(A' \cup B' \cup D) \cap C] = [(A \cap B \cap D') \cup (A' \cup B' \cup D)] \cap C =$   
 $= [(A \cap B \cap D') \cup (A \cap B \cap D)'] \cap C = U \cap C = C.$
3.  $(A \cap B')' \cup B = (A' \cup B'') \cup B = A' \cup (B \cup B) = A' \cup B.$
4.  $(\overline{A \cup B \cup C}) \cap (A \cap (B \cup \bar{C})) \cap \bar{B} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}.$

#### 1.4. Метод включення і вилучення

Нехай  $A$  і  $B$  – скінченні множини. З'ясуємо, чому дорівнює число  $|A \cup B|$ , якщо відомі числа  $|A|$  і  $|B|$ . Основна формула, якою можна скористатися для визначення числа  $|A \cup B|$ , слідує з означення операції об'єднання множин:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad (*)$$

Дійсно,  $|A| + |B|$  є число, яке одержимо при підрахунку спочатку всіх елементів множини  $A$ , а потім всіх елементів множини  $B$ . Але при цьому спільні елементи множини  $A$  і  $B$  (а їх буде  $|A \cap B|$ ) рахуються двічі, тобто  $|A| + |B| - |A \cup B| - |A \cap B| = 0$ , звідки і випливає рівність (\*).

Користуючись законами операцій над множинами, можна одержати формулу для числа елементів будь-якої скінченної сукупності скінчених множин.

Наприклад,

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| \cup |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| = |A| \cap |B \cup C| - |B \cap C| - \\ &- |A \cap B \cup A \cap C| = |A| \cup |B \cup C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| - \\ &- |(A \cap B) \cap (A \cap C)| = |A| \cup |B \cup C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

**Теорема 1.2.** Якщо  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – деякі скінченні множини, то

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \leq i < j < \dots < l \leq n} |A_i \cap \dots \cap A_l|. \end{aligned}$$

Метод обчислення за формулою (\*), який полягає в послідовному виконанні операцій додавання і віднімання, що чергуються між собою, називається *методом включення і вилучень*.

**Приклад 1.9.** В групі кожний студент або блондин, або брюнет. Серед студентів 10 блондинів, решта брюнети. 12 студентів люблять читати детективи. Серед 12 студентів, які люблять читати детективи, 5 блондинів і 7 брюнетів. Скільки чоловік налічує вся група, якщо 2 брюнети не люблять читати детективи.

*Розв'язання:* Нехай множина  $A$  – множина блондинів;  $|A|=10$ ,  $B$  – множина брюнетів.  $C$  – любителі детективу.  $|B|=9$ ;  $|C|=12$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cap C$  – множина блондинів, які люблять читати детективи.

$$|A \cap C| = 5, |B \cap C| = 7, A \cap B \cap C = \emptyset.$$

Отже,

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap C| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = \\ &= 10 + 9 + 12 - 0 - 5 - 7 + 0 = 19. \end{aligned}$$

### Задачі для самостійної роботи

1.  $A = \{1, 4, 8\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$ ,  $C = \{0, \{3, 4\}, \{5, 6\}, 8\}$ . Визначити наступні множини:  $A \setminus B$ ,  $A \cup C$ ,  $A \div B$ ,  $(A \cap B) \cup (B \setminus C)$ .

2.  $A = \{2, 3, \{8, 9\}\}$ ,  $B = \{0, \{1, 2\}, 3, 5\}$ ,  $C = \{2, 5, 8\}$ . Визначити наступні множини:  $A \cup B$ ,  $C \setminus B$ ,  $A \div C$ ,  $B \div (A \cap C)$ .

3.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Визначити наступні множини:  $A \cap B$ ,  $B \cup C$ ,  $A \setminus C$ ,  $A \div B$ ,  $\bar{C}$ ,  $A \cup (B \cap C)$ ,  $(A \cup B) \cap C$ ,  $\overline{(A \cap B)}$ ,  $\bar{A} \cap \bar{B}$ .

4.  $A = \{1, 2, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ ,  $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Визначити наступні множини:  $A \cap C$ ,  $A \cup B$ ,  $B \setminus C$ ,  $A \div C$ ,  $\bar{B}$ ,  $(A \setminus \emptyset) \cup (A \setminus A)$ ,  $\bar{A} \cap (B \cup C)$ ,  $(A \cap B) \setminus \bar{C}$ .

5.  $A = [0, 6)$ ,  $B = [1, 7)$ ,  $C = [2, 8]$ . Визначити наступні множини:  $C \setminus B$ ,  $A \div C$ ,  $\bar{B} \cap \bar{C}$ .

6.  $A = (3, 7)$ ,  $B = (1, 5]$ ,  $C = [4, 8]$ . Визначити наступні множини:  $A \setminus B$ ,  $B \div C$ ,  $\overline{A \cup B}$ .

7. Визначити, які з наступних тверджень істинні, а які хибні:

а)  $A \cap \emptyset = A$ ; б)  $A \cup \emptyset = A$ ; в)  $A \setminus A = \emptyset$ ; г)  $A \div A = \emptyset$ ;

д) якщо  $A \subseteq B$ , то  $A \cap B = A$ ; е) якщо  $A \cap B = A$ , то  $B \subseteq A$ ;

ж) якщо  $A \subseteq B$ , то  $A \cup B = A$ ; з) якщо  $A \cup B = A$ , то  $B \subseteq A$ ;

8. Для кожної з наведених нижче множин використайте діаграми Ейлера-Венна і заштрихуйте ті її частини, які зображують задані множини:

а)  $\overline{(A \cap B)}$ ;

б)  $\overline{(A \cup B)}$ ;

в)  $B \setminus \bar{A}$ ;

г)  $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ;

д)  $B \setminus (A \cap B)$ ;

е)  $\overline{(A \cap B \cap C)}$ ;

ж)  $A \setminus (B \cap C)$ ;

з)  $(A \cap B) \div C$ ;

и)  $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$ ;

к)  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .

## Практична робота №2

**Тема:** Моделювання роботи контактних схем в середовищі Electronics Workbench.

**Мета роботи:** Ознайомитися з основними логічними операціями. Набути навички доводити рівносильність логічних формул за допомогою побудови таблиць істинності. Ознайомитись з роботою пакету прикладних програм Electronics Workbench. Оволодіти навичками використання даного пакету для моделювання роботи простих цифрових електронних схем.

### Зміст роботи:

1. Вивчити основні логічні операції та їх таблиці істинності, основні закони (рівносильності) математичної логіки та їх доведення за допомогою побудови таблиць істинності.

2. За допомогою пакету Electronics Workbench зібрати схеми для експериментального дослідження базових логічних функцій: кон'юнкції, диз'юнкції, функції Шеффера, функції Пірса, суми за модулем 2 та заперечення суми за модулем 2;

3. За допомогою пакету Electronics Workbench зібрати електро-механічні схеми для дослідження базових логічних функцій: кон'юнкції, диз'юнкції, функції Шеффера, функції Пірса, суми за модулем 2 та заперечення суми за модулем 2;

4. За допомогою приладів з полицки приладів EWB дослідити логічні функції:

а) кон'юнкцію, диз'юнкцію, функцію Шеффера, функцію Пірса, суму за модулем 2 та заперечення суми за модулем 2;

б) закони поглинання, склеювання та де Моргана.

5. Синтез схем та їх мінімізація для логічних функцій від 3-х і більше змінних, заданих таблично.

### Зміст звіту:

1. Короткі теоретичні відомості про основні логічні операції та закони математичної логіки.

2. Схеми для експериментального дослідження базових логічних функцій.

3. Електро-механічні моделі базових логічних функцій та їх таблиці істинності.

4. Цифрові електронні схеми з використанням приладів з полицки приладів EWB для моделювання роботи:

а) кон'юнкції, диз'юнкції, функції Шеффера, функції Пірса, суми за модулем 2 та заперечення суми за модулем 2;











б) законів поглинання, склеювання та де Моргана.

5. Результати дослідження (логічні вирази та схеми) функцій від 3-х і більше змінних, заданих таблично.

### З а в д а н н я 1 . Експериментальне дослідження базових логічних функцій

Користуючись пакетом EWB зібрати схеми для експериментального дослідження наступних логічних функцій: кон'юнкції, диз'юнкції, суми за модулем 2, функції Шеффера (заперечення кон'юнкції), функції Пірса (заперечення диз'юнкції) та заперечення суми за модулем 2 (рівнозначності). В результаті виконання завдань повинні бути створені файли в EWB з діючими моделями та файл в редакторі Word 7.0 з копіями схем і таблицями з результатами досліджень відповідних функцій. Для прикладу наведено схему і таблицю з результатами досліджень кон'юнкції (Завдання 1.1).

Для виконання завдання потрібно:

- вольтметр –  ;
- логічний пробник –  ;
- джерело сигналу “логічна одиниця” –  ;
- двопозиційні перемикачі –  ;
- базові логічні функції – , , , ,  ;
- заземлення – 

**З а в д а н н я 1.1.** Дослідження кон’юнкції – 

Зберіть схему, зображену на рис. 1. У наведеній схемі два позиційні перемикачі *A* і *B* подають на входи досліджуваної схеми рівні 0 (контакти перемикача у нижньому положенні). Включить схему. Встановіть перемикачі *A* і *B* у нижнє положення. Результати спостережень звірте з результатами, наведеними в табл. 1. Встановіть перемикач у верхнє положення, а перемикач *A* залишить у нижньому положенні. Результати спостережень звірте з табл.1.1. Змінюючи положення перемикачів *A* і *B* розгляньте усі можливі їх положення і звірте результати спостережень з результатами, наведеними в табл. 1.1

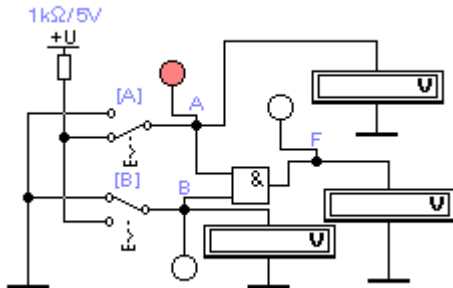


Рис. 1.1

Таблиця 1.1

<i>A</i>	<i>B</i>	$V_A$	$V_B$	$V_F$	○- <i>A</i>	○- <i>B</i>	○- <i>F</i>
<i>н</i>	<i>н</i>	0	0	0	0	0	0
<i>н</i>	<i>в</i>	0	4.99	0	0	1	0
<i>в</i>	<i>н</i>	4.99	0	0	1	0	0
<i>в</i>	<i>в</i>	4.97	4.97	5.00	1	1	1





Досліджувана функція – кон’юнкція.

**З а в д а н н я 1.2 – 1.6** (дослідження інших базових логічних функцій) виконати самостійно, аналогічно до виконання завдання 1.1.

**З а в д а н н я 2.** Електро-механічне моделювання базових логічних функцій.

Користуючись пакетом EWB зібрати схеми, які наведено на рис. 1.2, 1)–8) визначити, які логічні функції вони реалізують. Заповнити відповідні таблиці істинності.

Для виконання завдання потрібно:

- ◆ джерела постійної напруги 12v  ;
- ◆ резистори (опори) -  ;
- ◆ двопозиційні перемикачі  ;
- ◆ лампи розжарювання -  .

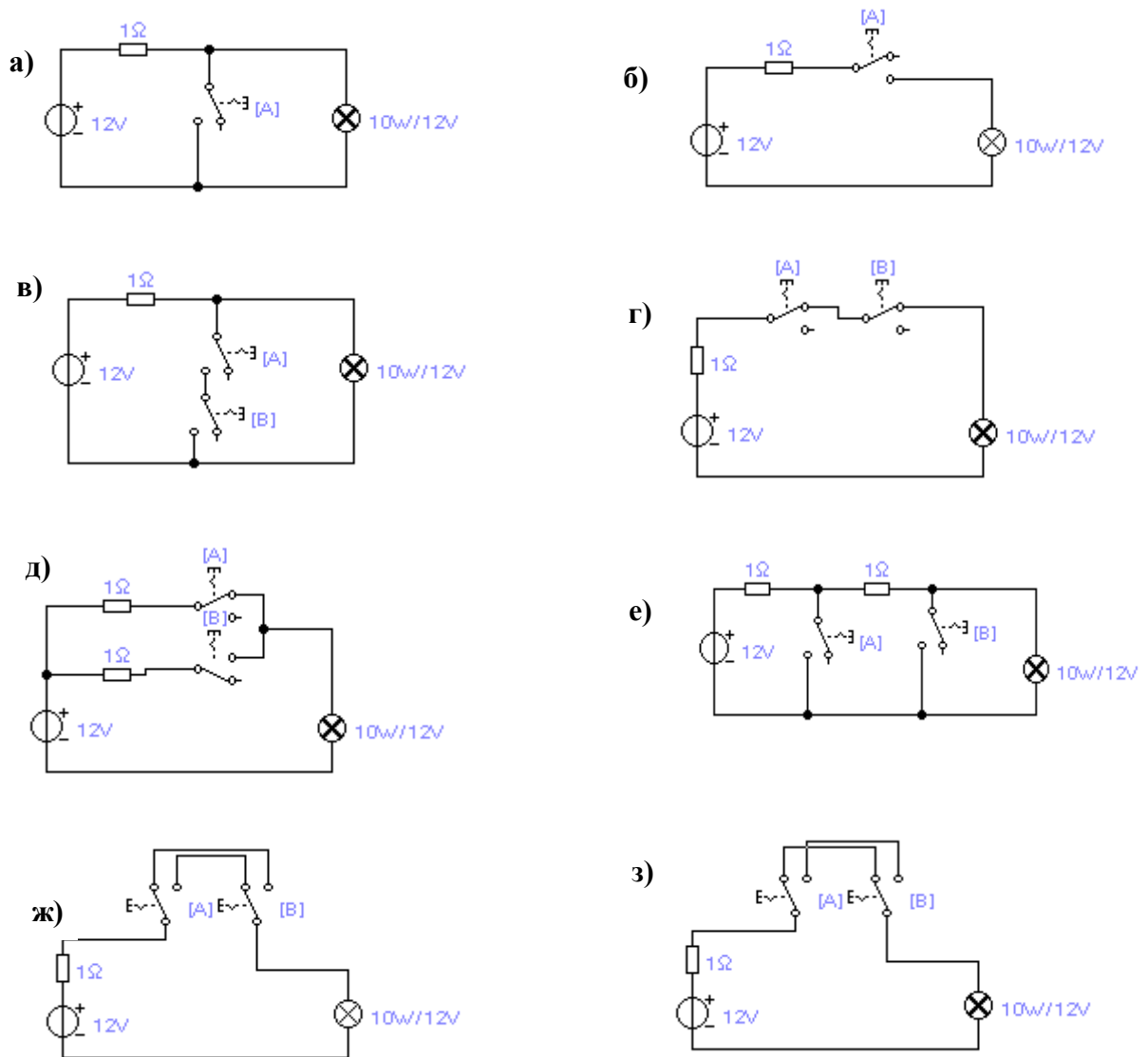




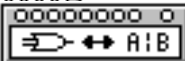
Рис. 1.2

**З а в д а н н я 3. Дослідження цифрових електронних систем з допомогою приладів з полицки приладів EWB.**

Для виконання завдання потрібно:

генератор слів –  ;

логічний аналізатор –  ;

логічний перетворювач –  ;



Користуючись приладами з полицки приладів пакету EWB зібрати схеми та дослідити:

- а) базові функції – кон'юнкцію, диз'юнкцію, суму за модулем 2 та їх заперечення;
- б) закони: поглинання, склеювання та де Моргана.

Дослідження провести з використанням:

- 1) генератора слів, цифрового аналізатора та відповідних логічних елементів;
- 2) логічного перетворювача та відповідних логічних елементів.

**З а в д а н н я 3.1. Дослідження логічних функцій за допомогою генератора слів та логічного аналізатора.** Зібрати схему, як показано на рис.1.3, а). Активізувати

числовий генератор і логічний аналізатор, шляхом подвійного натискування кн  і 

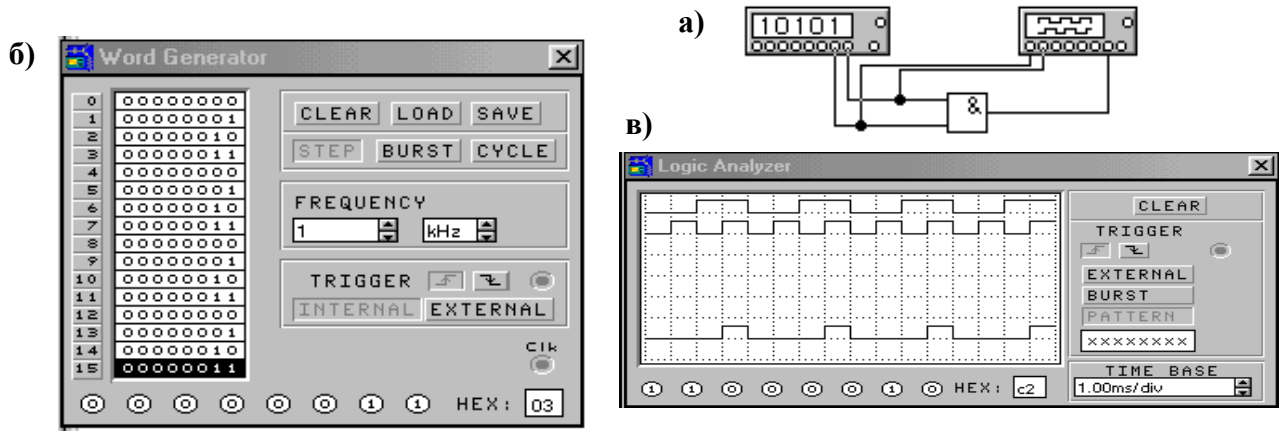


Рис. 1.3

За допомогою лівої клавiшi мишi i клавiатури ввести двiйковi слова в лiву частину генератора слiв, як показано на рис.1.3, б). Здiйснити перевiрку роботи схеми у всiх трьох режимах роботи генератора слiв: покроковому (STEP), цикличному (BURST), неперервному (CYCLE). Роботу генератора за один цикл показано на рис. 1.3, в).


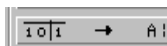
Для того щоб перервати роботу в неперервному режимi, потрiбно ще раз натиснути кнопку Cycle (або CTRL+T на клавiатурi).

Для встановлення курсору генератора слiв у початкове положення (рядок 0) потрiбно, спочатку, за допомогою клавiшi STEP перемiстити курсор генератора слiв в рядок 15 (на рис.1.3, б) вiн видiлений), очистити екран логiчного аналізатора за допомогою клавiшi CLEAR i натиснути клавiшу STEP або BURST.


Дослiдження iнших функцiй i законiв здiйснюється аналогiчно.

**З а в д а н н я 3.2. Дослiдження логiчних функцiй за допомогою логiчного перетворювача.** Зiбрати схему, як показано на рис. 4, а).

За допомогою подвiйного натискування лiвої клавiшi мишi  активiзувати логiчний перетворювач.

Натиснувши клавiшу  генеруємо таблицi iстинности (рис.4,в)). Для одержання булевого виразу, дослiджуваноi функцiї необхідно натиснути клавiшу 

Цей вираз одержується на додатковому дисплеї, який розташований у нижній частині логічного аналізатора (рис.4, б). Маючи аналітичне (булеве) представлення функції за допомогою

натискування клавiш  одержимо логiчну схему (рис. 1.4,в)), яка

реалiзовує задану функцiю.

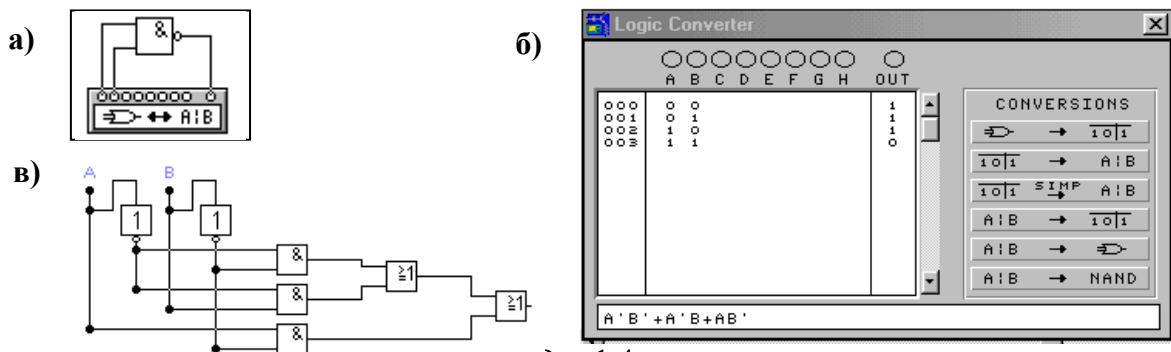




Рис.1.4

Для мінімізації одержаної функції потрібно натиснути клавішу . В результаті такої дії одержимо функцію, показану на рис.1.5, а), для якої, натиснувши клавішу , можна одержати схему, показану на рис. 5,б).

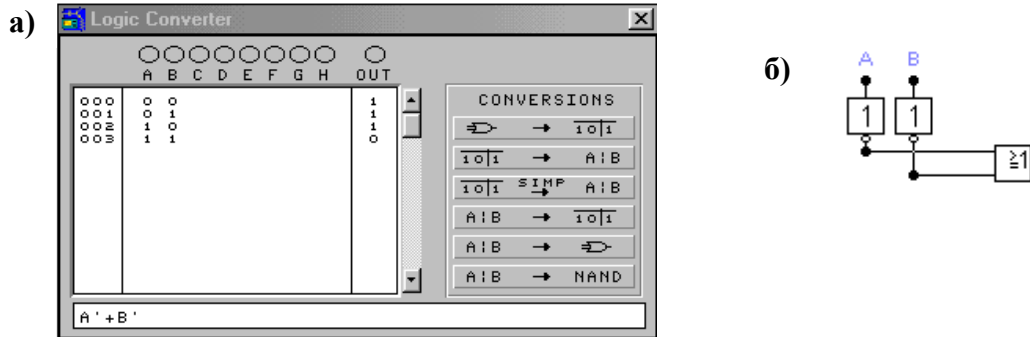
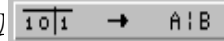
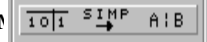




Рис. 1.5

**З а в д а н н я 4. Синтез схем для функцій заданих таблично.** Функція від трьох змінних  $A, B, C$  задана таблицею істинності (табл. 1.2). Активізувати логічний аналізатор. За допомогою миші натиснути кнопки  $A, B$  і  $C$ , а за допомогою клавіатури заповнити стовпчик  $OUT$ , як показано на рис 6.  клавішу одержати аналітичне представлення заданої функції (рис. 1.7), потім з допом  мінімізувати одержаний логічний вираз (рис. 1.8), а з д  іші синтезувати відповідну схему (рис. 1.9). Якщо натиснути клавішу,  му, виконану з допомогою тільки функції “заперечення кон’юнкції“ (рис.1.10).

Таблиця 1.2

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

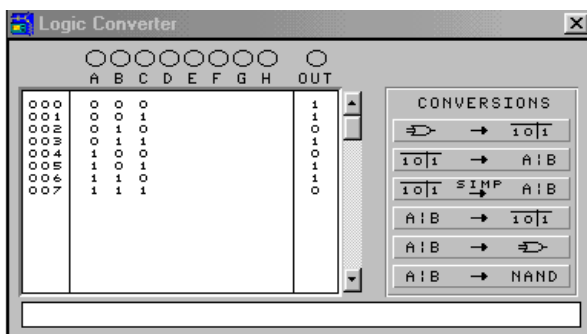


Рис. 1.6

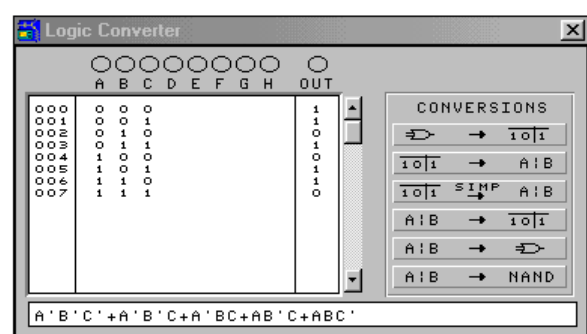


Рис.1.7

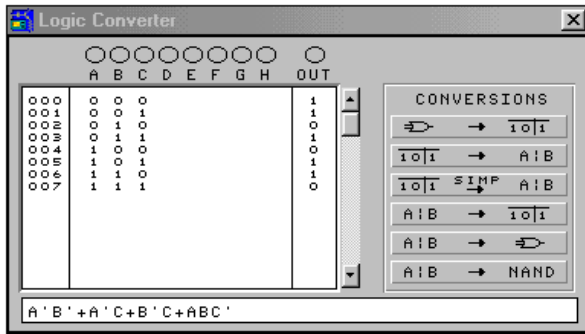


Рис. 1.8

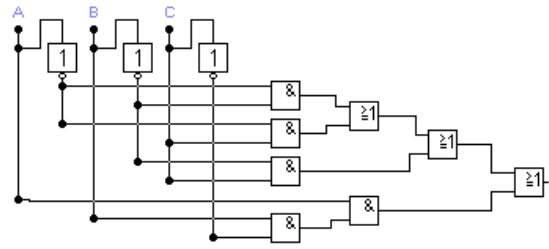


Рис. 1.9

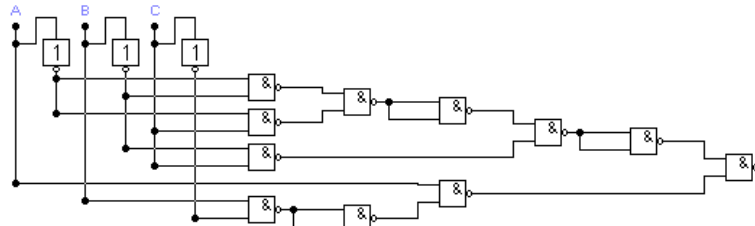


Рис. 1.10

### Завдання для самостійної роботи

**Дослідження логічних функцій від 3-х і більше змінних.** Для функції, заданої таблицею істинності за допомогою логічного перетворювача виконати наступні завдання:

- відобразити таблицю істинності на дисплеї логічного аналізатора;
- за допомогою відповідної клавіші одержати аналітичне представлення, функції заданої таблично;
- синтезувати логічну схему за допомогою логічних функцій кон'юнкції, диз'юнкції і заперечення;
- за допомогою відповідних клавіш мінімізувати одержаний аналітичний вираз та синтезувати логічну схему за допомогою логічних функцій кон'юнкції, диз'юнкції і заперечення;
- синтезувати логічну схему за допомогою логічних функцій заперечення кон'юнкції та заперечення.

Індивідуальні завдання наведено в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

№	A	B	C	D	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	F <sub>5</sub>	F <sub>6</sub>	F <sub>7</sub>	F <sub>8</sub>	F <sub>9</sub>	F <sub>10</sub>	F <sub>11</sub>	F <sub>12</sub>	F <sub>13</sub>	F <sub>14</sub>	F <sub>15</sub>
0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1
3	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
4	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
5	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0
6	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
7	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
8	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
9	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0
10	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1
11	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
12	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
13	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
14	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0
15	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0

### Практична робота №3

**Тема.** Табличне представлення функцій алгебри логіки. Доведення основних законів алгебри логіки.

**Мета роботи:** вивчення основних законів алгебри логіки та їх доведення з використанням пакету прикладних програм Electronics Workbench.

#### Теоретичні відомості

##### 1. Аксиоми та закони булевої алгебри

Булева алгебра базується на деяких аксіомах, із яких виводяться основні закони для перетворення виразів, що містять булеві змінні. Обґрунтування цих аксіом підтверджується таблицями істинності для розглянутих операцій.

Кожна аксіома подана у двох формах: кон'юнктивній і диз'юнктивній, що впливає із принципу двоїстості логічних операцій, згідно якого операції кон'юнкції і диз'юнкції допускають взаємну заміну, якщо одночасно поміняти логічну 1 на 0, а 0 на 1; знак  $\vee$  на  $\wedge$ , а знак  $\wedge$  на  $\vee$ .

Аксиоми заперечення, кон'юнкції та диз'юнкції:

1.  $\bar{0} = 1$ ;    1.  $0 \wedge 0 = 0$ ;    1.  $0 \vee 0 = 0$ ;    1.  $x \wedge 0 = 0$ ;    1.  $x \vee 1 = 1$ ;
2.  $\bar{1} = 0$ .    2.  $0 \wedge 1 = 0$ ;    2.  $0 \vee 1 = 1$ ;    2.  $x \wedge 1 = x$ ;    2.  $x \vee 0 = x$ ;
3.  $\bar{\bar{x}} = x$     3.  $1 \wedge 0 = 0$ ;    3.  $1 \vee 0 = 1$ ;    3.  $x \wedge \bar{x} = 0$ ;    3.  $x \vee \bar{x} = 1$ ;
4.  $1 \wedge 1 = 1$ .    4.  $1 \vee 1 = 1$ .    4.  $x \wedge x = x$ .    4.  $x \vee x = x$ .

Основні закони булевої алгебри наведено в табл. 2.1.

Таблиця 3.1 – Закони булевої алгебри

№	Логічний вираз	Назва закону
1	$x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$	Комутативний закон
2	$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$	
3	$x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3$	Сполучний закон
4	$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$	
5	$x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$	Розподільний закон
6	$x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$	
7	$x_1 \wedge (x_1 \vee x_2) = x_1$	Закон поглинання
8	$x_1 \vee (x_1 \wedge x_2) = x_1$	
9	$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1$	Закон склеювання
10	$(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) = x_1$	
11	$\overline{x_1 \wedge x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$	Закон де Моргана
12	$\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$	
13	$\overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2} = x_1 \vee x_2$	Закон де Моргана
14	$\overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2} = x_1 \wedge x_2$	
15	$x \wedge \bar{x} = 0, x \wedge 1 = x$	Закон нуля і одиниці
16	$x \vee \bar{x} = 1, x \vee 0 = x$	
17	$\overline{\bar{x}} = x$	Закон подвійного заперечення

Закони булевої алгебри впливають із аксіом і також мають дві форми вираження: для кон'юнкції і для диз'юнкції. Правильність законів легко перевірити за допомогою побудови таблиць істинності.

Приклад доведення закону поглинання за допомогою тааблиці істинності логічних функцій наведено в табл.3.2.

Таблиця 3.2

$x_1$	$x_2$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \vee (x_1 \wedge x_2)$	$x_1 \wedge (x_1 \vee x_2)$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

### Двоїстість логічних функцій

**Означення 1.** Логічна функція  $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  називається **двоїстою** до функції  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , якщо  $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$ .

**Означення 2.** Функція, двоїста сама до себе, тобто  $f^* = f$ , називається **самодвоїстою**.

**Правило побудови двоїстої функції.** Для запису функції  $f^*$ , двоїстої до функції  $f$ , треба у функції  $f$  всюди 0 замінити на 1, 1 – на 0, знак  $\wedge$  – на  $\vee$ , а знак  $\vee$  – на  $\wedge$ . Наведене правило побудови двоїстих функцій **називається принципом двоїстості**.

**Приклад 3.1.** Нехай, задано логічну функцію  $f(x, y, z) = x \wedge z \vee y \wedge \bar{z}$ . Побудувати функцію двоїсту до заданої.

**Розв'язання.** а) Виходячи з принципу двоїстості та застосувавши правило де Моргана два рази, одержимо

$$f^*(x, y, z) = \overline{f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \overline{\bar{x} \wedge \bar{z} \vee \bar{y} \wedge z} = \overline{\bar{x} \wedge \bar{z}} \wedge \overline{\bar{y} \wedge z} = (x \vee z) \wedge (y \vee \bar{z}).$$

б) Скориставшись правилом побудови двоїстих функцій зразу одержимо, що  $f^*(x, z) = (x \vee z) \wedge (y \vee \bar{z})$ .

Таблиця істинності двоїстої функції  $f^*$  одержується з таблиці істинності для функції  $f$  шляхом інвертування (заміною значень 0 на 1 та 1 на 0) значень функції й заміною порядку проходження інвертованих значень функції на протилежний, тобто перевертанням стовпця інвертованих значень функції (див. два останні стовпці табл.3.3).

Таблиця 3.3

$x$	$y$	$z$	$x \wedge z$	$y \wedge \bar{z}$	$f$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x} \vee \bar{z}$	$\bar{y} \vee z$	$f^*$	$\bar{f}$	$\bar{f} \downarrow \uparrow$
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1

На підставі законів де Моргана можна вивести таке твердження: якщо функція  $f^*$  двоїста до функції  $f$ , то справедлива тотожність

$$\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

### Функції алгебри Жегалкіна

У деяких випадках, перетворення над формулами булевих функцій зручно виконувати користуючись алгеброю Жегалкіна.

В алгебрі Жегалкіна розглядають функції:  $f_{15} = 1$ ,  $x_1 \wedge x_2$  та  $x_1 \oplus x_2$ .

На основі аксіом і законів алгебри Жегалкіна можна вивести правила перетворення функцій заперечення, кон'юнкцію і диз'юнкцію через функцію додавання за модулем 2 і навпаки:

- 1)  $\bar{x}_1 = x_1 \oplus 1$ ;
- 2)  $x_1 \wedge x_2 = (x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \vee x_2)$ ;
- 3)  $x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \wedge x_2)$ ;
- 4)  $x_1 \oplus x_2 = (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$ .

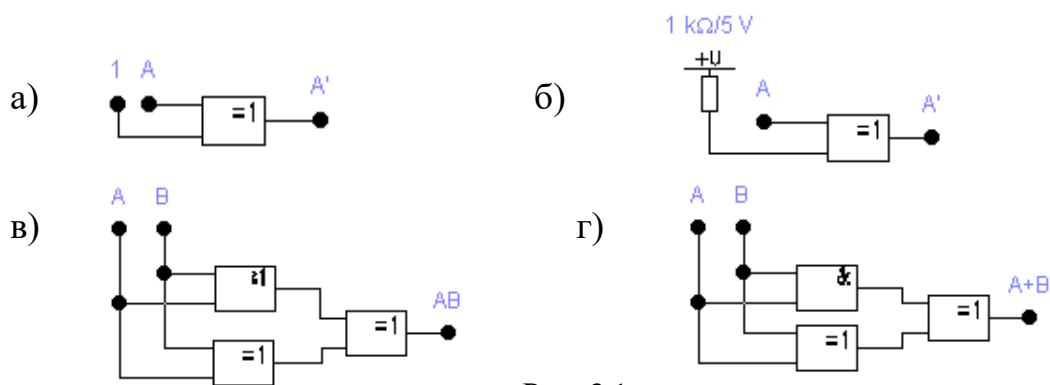


Рис. 3.1

На рис. 3.2 наведено структурні схеми реалізації основних логічних функцій на базі елемента додавання за модулем 2: а) операція НЕ; б) реалізація логічної одиниці для операції НЕ; в) операція І; г) операція АБО.

### Функція Шеффера

Функція Шеффера ( $/$ ) – функція, яка виражається співвідношенням  $x_1 / x_2 = x_1 \wedge x_2$ .

Можна показати, що функції заперечення, кон'юнкція і диз'юнкція виражаються через функцію Шеффера за формулами:

- 1)  $\bar{x} = x / x$ ,
- 2)  $x_1 \wedge x_2 = \overline{x_1 / x_2} = \overline{(x_1 / x_2) / (x_1 / x_2)} = \overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_2}$ ,
- 3)  $x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2} = \overline{\bar{x}_1 / \bar{x}_2} = \overline{x_1 / x_1 / x_2 / x_2} = \overline{x_1 \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge x_2}$ .

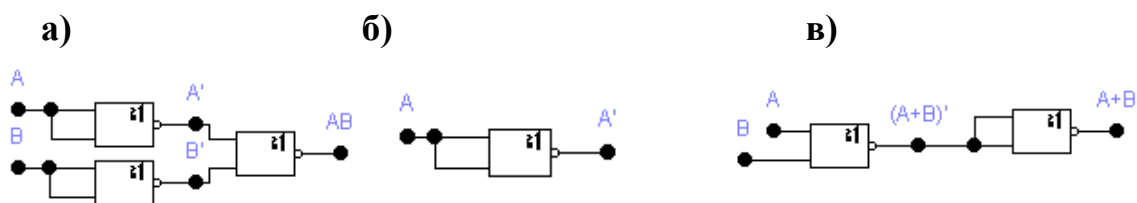


Рис. 3.2

Це означає, що функція Шеффера є універсальною функцією, яка записується як І-НЕ і через яку можна виразити будь-яку логічну функцію.

### Функція Пірса

**Функція Пірса (Вебба) ( $\downarrow$ )** – функція, яка виражається співвідношенням  $x_1 \downarrow x_2 = x_1 \vee x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}$ .

Можна показати, що функції заперечення, кон'юнкція і диз'юнкція виражаються через функцію Пірса (Вебба) наступним чином:

- 1)  $\bar{x} = x \downarrow x = \overline{x \vee x}$ ,
- 2)  $x_1 \vee x_2 = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2) = \overline{\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_1 \vee x_2}}$ ,
- 3)  $x_1 \wedge x_2 = (x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2) = \overline{\overline{x_1 \vee x_1 \vee x_2 \vee x_2}}$ .

Функція Пірса є універсальною функцією, яка записується як АБО-НЕ і через яку можна виразити будь-яку логічну функцію.

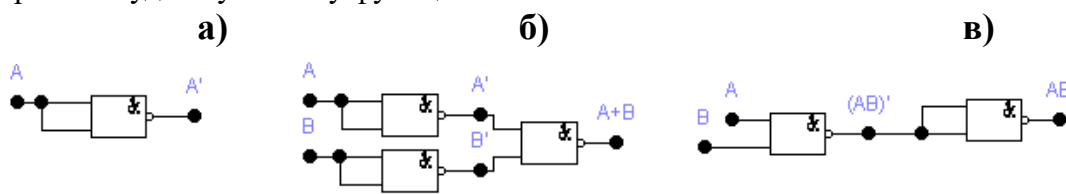


Рис. 3.3

На рис. 3.3 наведено структурні схеми реалізації основних логічних функцій на базі елемента І-НЕ: а) операція НЕ; б) операція І; в) операція АБО.

### 3.1. Порядок виконання індивідуальних завдань

Для доведення законів булевої алгебри необхідно побудувати схеми логічних рівнянь, правої та лівої частини закону і проаналізувати вихідні сигнали кожної схеми.

1. Використовуючи середовище Electronics Workbench, скласти схеми лівої та правої частини закону (табл.3.4).
2. Побудувати часові діаграми дослідження законів алгебри логіки.
3. Проаналізувати вихідні сигнали двох схем.

### 3.2 Індивідуальні завдання

Дослідити закони булевої алгебри за допомогою таблиці істинності. Індивідуальні завдання наведено в табл. 3.4.

Таблиця 3.4 – Таблиця індивідуальних завдань

№ варіанту	Номери законів	№ варіанту	Номери законів	№ варіанту	Номери законів
1	1, 7, 11, 15	11	5, 9, 13, 15	21	4, 10, 11, 15
2	2, 8, 12, 16	12	6, 10, 14, 16	22	3, 9, 12, 16
3	3, 9, 13, 15	13	1, 8, 11, 15	23	2, 7, 13, 15
4	4, 10, 14, 16	14	2, 10, 12, 16	24	1, 8, 14, 16
5	5, 7, 11, 15	15	3, 9, 13, 15	25	6, 7, 11, 15
6	6, 8, 12, 16	16	4, 7, 14, 16	26	5, 9, 12, 16
7	1, 9, 13, 15	17	5, 7, 11, 15	27	4, 10, 13, 15
8	2, 10, 14, 16	18	6, 9, 12, 16	28	3, 8, 14, 16
9	3, 7, 11, 15	19	6, 8, 13, 15	29	2, 7, 11, 15
10	4, 8, 12, 16	20	5, 9, 14, 16	30	1, 9, 12, 16

**Вказівка.** Номер варіанту вибирається з табл.2.2 за номером у журналі академічної групи.

**Завдання 3.3.** Знайдіть двоїсті формули до таких функцій:

1)  $(x \wedge (y \vee z)) \vee \bar{x} \wedge \bar{y}$ ;

2)  $x \wedge \bar{y} \vee x \vee y \vee z \wedge t$ .

**Завдання 3.4.** Визначте, чи є нижче наведені функції самодвоїстими:

1)  $f(x, y) = (\bar{x} \wedge y) \wedge (x \wedge \bar{y})$ ;

2)  $f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (z \wedge y)$ ;

3)  $f(x, y, z) = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge z) \vee (\bar{z} \wedge \bar{y})$ ;

4)  $f(x, y, z) = (x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge \bar{z}) \vee (\bar{z} \wedge y)$ .

#### **4. Зміст звіту**

4.1. Короткі теоретичні відомості з кожного пункту.

4.2. Вихідні дані для виконання роботи.

4.3. Результати виконання роботи (таблиці істинності, схеми та часові діаграми).

#### **5. Контрольні запитання**

5.1. Дайте визначення двоїстої та самодвоїстої функцій.

5.2. Наведіть основні закони булевої алгебри.

5.3. Які функції розглядають в алгебрі Жегалкіна?

5.4. Показати, що функції заперечення, кон'юнкція і диз'юнкція виражаються через функцію Шеффера та Пірса.

## Практична робота №4

**Тема:** Синтез комбінаційних схем.

**Мета роботи:** навчитися розробляти функціональні схеми цифрових пристроїв з використанням Electronics Workbench.

### Теоретичні відомості

#### 1. Способи задання логічних функцій

Як відомо, існують різні способи задання логічних функцій. У попередніх роботах був розглянутий табличний спосіб, при якому кожному набору значень змінних в таблиці істинності вказується значення самої логічної функції. Цей спосіб наглядний і може бути використаний для запису функцій від будь-якої кількості змінних. Але при аналізі властивостей функцій алгебри логіки такий запис не є компактним. Тому для задання логічних функцій використовують аналітичний запис у вигляді формул.

Функціональну схему логічного пристрою одержують в результаті абстрактного синтезу, який складається з наступних етапів:

- 1) текстовий опис функцій логічного пристрою;
- 2) складання таблиці істинності за текстовим описом;
- 3) запис логічної функції логічного пристрою у вигляді досконалої нормальної диз'юнктивної форми (ДНДФ) або досконалої нормальної кон'юнктивної форми (ДНКФ);
- 4) мінімізація логічної функції;
- 5) вибір одного із логічних базисів для реалізації функціональної схеми;
- 6) перетворення логічного рівняння з використанням правил де Моргана;
- 7) побудова функціональної схеми цифрового пристрою.
- 8) моделювання роботи цифрового логічного пристрою.

#### 2. Порядок виконання роботи

2.1. За текстовим описом функціонування логічного пристрою скласти таблицю істинності.

2.2. Записати логічну функцію у вигляді ДНДФ.

2.3. Розробити функціональну схему логічного пристрою.

2.4. Мінімізувати одержану логічну функцію у булевому базисі І, АБО, НЕ.

2.5. Перетворити одержану мінімальну форму з використанням правил Де-Моргана до заданого базису.

2.6. Розробити функціональні схеми за мінімізованими функціями у базисі І -НЕ, АБО-НЕ.

2.7. Побудувати часові діаграми, які мають відображати всі можливі стани вхідних сигналів.

#### 3. Приклад виконання лабораторної роботи

Синтезувати логічний пристрій з трьома вхідними змінними, який генерує сигнал "1" на виході, якщо не менше як дві підряд змінні приймають значення "1".

3.1 Складаємо таблицю істинності (табл.4.1).

Таблиця 4.1.

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

3.2. Логічне рівняння в вигляді ДНДФ представляє собою диз'юнкцію кон'юнкцій тих вхідних наборів, для яких  $F=1$ :

$$F(A,B,C) = \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC$$

3.3. Мінімізація логічної функції здійснюється шляхом використання законів алгебри логіки:

$$F(A,B,C) = BC(\bar{A} + A) + AB(\bar{C} + C) = BC + AB.$$

3.4. Функціональну схему реалізуємо в базисі І-НЕ, для цього мінімізоване рівняння перетворимо за законом Де Моргана:

в базисі І-НЕ:  $F(A,B,C) = \overline{BC + AB} = \overline{BC} \cdot \overline{AB},$

в базисі АБО-НЕ:  $F(A,B,C) = \overline{\overline{BC} + \overline{AB}} = \overline{\overline{B} + \overline{C} + \overline{A} + \overline{B}}.$

3.5. Функціональні схеми та часові діаграми логічного пристрою, реалізованого у базисах І-НЕ, наведено на рис. 3.1—3.2, а в базисі АБО-НЕ — на рис. 3.3—3.4.

Зауважимо, що при реалізації функціональної схеми в базисі АБО-НЕ на виході додатково потрібно поставити інвертор.

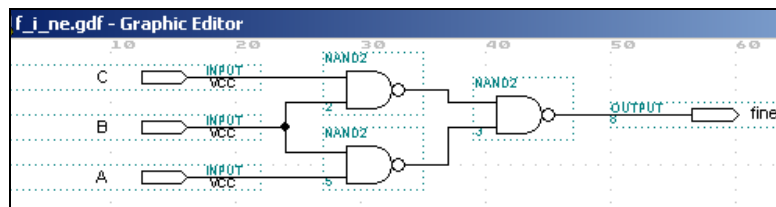


Рисунок 3.1 – Функціональна схема логічного пристрою у базисі І-НЕ.

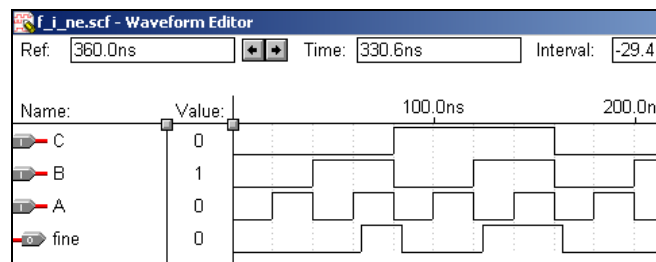


Рисунок 3.2 – Часові діаграми логічного пристрою у базисі І-НЕ

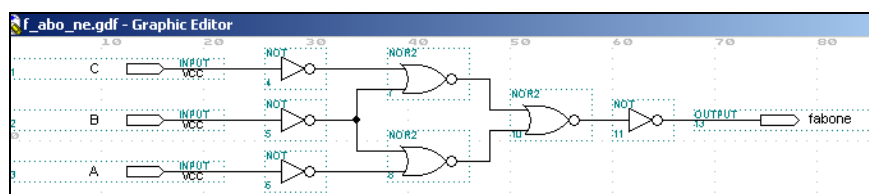


Рисунок 3.3 – Функціональна схема логічного пристрою в базисі АБО-НЕ

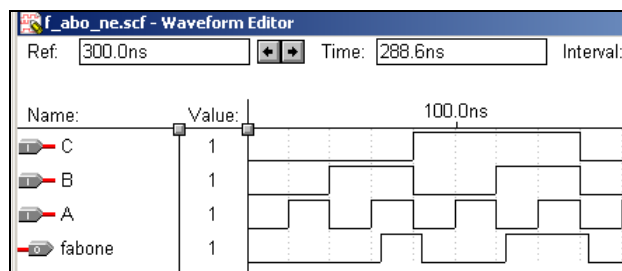


Рисунок 3.4 – Часові діаграми логічного пристрою в базисі АБО-НЕ

**Висновки.** З одержаних результатів можна зробити висновок, що функціональна схема логічного пристрою в базисі І-НЕ є простішою за схему пристрою в базисі АБО-НЕ.

#### 4. Зміст звіту

- 4.1. Тема і мета роботи.
- 4.2. Вихідні дані для виконання роботи.
- 4.3. Результати виконання пунктів 2.1 – 2.7.
- 4.4. Функціональні схеми у базисах I-НЕ, АБО-НЕ.
- 4.5. Часові діаграми роботи пристроїв.
- 4.6. Висновки.

#### 5. Індивідуальні завдання

Синтезувати цифровий пристрій з чотирма вхідними змінними, який генерує на виході сигнал “1”, тільки при вхідних значеннях змінних, що вказані у таблиці. На вхід комбінаційної схеми поступає 4-х розрядний паралельний двійковий код.

Таблиця 4.2 – Варіанти індивідуальних завдань

№ в-ту	F(A,B,C,D)=1	№ в-ту	F(A,B,C,D)=1	№ в-ту	F(A,B,C,D)=1
1	(0,4,12,14)	11	(2,5,10,15)	21	(1,4,12,14)
2	(1,5,11,14)	12	(1,4,11,15)	22	(2,5,10,14)
3	(2,6,10,13)	13	(0,3,7,12)	23	(3,6,10,13)
4	(3,7,9,12)	14	(1,2,13,15)	24	(0,7,9,12)
5	(4,8,11,13)	15	(1,3,9,14)	25	(1,8,11,13)
6	(5,7,9,10)	16	(0,4,12,14)	26	(2,7,9,10)
7	(2,6,9,10)	17	(0,5,13,15)	27	(2,6,9,15)
8	(5,7,8,11)	18	(2,3,13,14)	28	(5,7,8,14)
9	(4,7,8,12)	19	(4,5,12,15)	29	(0,7,8,12)
10	(3,6,9,13)	20	(3,5,14,15)	30	(1,6,9,13)

#### 6. Контрольні запитання

- 6.1. Дайте визначення комбінаційного цифрового пристрою.
- 6.2. Назвіть етапи синтезу цифрових комбінаційних пристроїв.
- 6.3. Як записується досконала нормальна диз'юнктивна форма?
- 6.4. Як записується досконала нормальна кон'юнктивна форма?
- 6.5. Як здійснюється перетворення заданої функції в базис I-НЕ, АБО-НЕ?
- 6.6. Як здійснюється синтез функціональної схеми пристрою за заданими функціями?

## Практична робота № 5

**Тема:** Табличне та аналітичне представлення логічних функцій. Аналітичні методи мінімізації функцій. Метод мінімізуючих карт.

**Мета роботи:** набути навички мінімізації функцій різними методами: алгебраїчним, Квайна, Квайна-Мак-Класкі, карт Карно та К-карт.

### Теоретичні відомості

#### 1. Аналітичні методи мінімізації функцій

##### 1.1 Основні поняття та означення

Під *мінімізацією* логічної функції прийнято називати процес відшукування найменшого за складністю аналітичного зображення даної функції у вигляді суперпозиції функцій, які належать деякій функціонально повній системі.

Методи мінімізації розробляються стосовно кожної функціонально повної системи елементарних логічних функцій. Найдокладніше такі методи розроблено для випадку, коли функціонально повна система елементарних логічних функцій складається з диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення. При цьому мінімізація логічної функції зводиться до визначення такої її форми, яка має найменший індекс (коефіцієнт) простоти, що характеризує складність ДНФ.

Логічна функція  $g$  називається *імплікантою* логічної функції  $f$ , якщо множина одиничних наборів функції  $g$  збігається або є підмножиною множини одиничних наборів функції  $f$ .

*Простою імплікантою* функції  $f$  називається будь-яка елементарна кон'юнкція  $g$ , яка є імплікантою цієї функції та має ту властивість, що ніяка її власна частина уже не є імплікантою даної функції.

Із визначення імпліканти випливає, що диз'юнкція будь-якого скінченного числа імпліканти функції  $f$  є також імплікантою функції  $f$ .

Диз'юнкцію всіх простих імпліканти логічної функції називається *скороченою диз'юнктивною нормальною формою* СДНФ.

Знаходження скорочених ДНФ є першим етапом знаходження мінімальних форм булевих функцій. Як уже відмічалось, в скорочену ДНФ входять усі прості імпліканти булевої функції. Іноді із скороченої ДНФ можна вилучити одну або декілька простих імпліканти, не порушуючи умови еквівалентності вихідній булеві функції. Такі прості імпліканти називаються *лишніми*. Вилучення лишніх простих імпліканти із скороченої ДНФ – другий етап мінімізації.

Диз'юнкцію простих імпліканти, які складають зведену систему імпліканти логічної функції, називається її *тупиковою диз'юнктивною нормальною формою* – ТДНФ.

Логічна функція може бути подана однією або декількома ТДНФ.

*Мінімальною диз'юнктивною нормальною формою* МДНФ функції  $f$  називається така ДНФ, яка зображає дану функцію і містить найменшу кількість букв порівняно з усі іншими еквівалентними їй ДНФ. Побудова тупикових і знаходження мінімальних ДНФ є третім етапом мінімізації.

Розглянемо ряд методів, які дають можливість виконати мінімізацію логічної функції.

##### 1.2 Алгебраїчний метод

Суть цього методу полягає в послідовному застосуванні основних аксіом і законів булевої алгебри. Найчастіше для спрощення формул використовуються закони: склеювання  $F \cdot A + F \cdot \bar{A} = F$  та поглинання  $F \cdot \bar{A} + F = F$ , де  $\bar{A}$  – змінна в прямій або інверсній формі.

**Приклад 1.** Мінімізувати функцію  $f(A, B, C) = \underbrace{\overline{A}BC}_1 + \underbrace{\overline{A}B\overline{C}}_2 + \underbrace{\overline{A}BC}_3 + \underbrace{A\overline{B}C}_4 + \underbrace{ABC}_5$ ,

де нижні індекси показують номери доданків, які являють собою мінтерми.

**Розв'язання.** Виконаємо операцію склеювання таких пар мінтермів: 1 і 3 за змінною  $B$ ; 2 і 3 за змінною  $C$ ; 4 і 5 за змінною  $B$ . В результаті виконання операцій склеювання отримаємо скорочену формулу  $f(A, B, C) = \underbrace{\overline{A}C}_1 + \underbrace{\overline{A}B}_2 + \underbrace{AC}_3$ , в якій можна провести склеювання доданків 2 і 3 за змінною  $A$ . При цьому отримаємо формулу  $f(A, B, C) = A\overline{B} + C$ , яка є мінімальною формою.

### 1.3 Метод Квайна

При мінімізації за методом Квайна в базисі  $\{\neg, \vee, \wedge\}$  вважають, що функція задана в ДНФ і використовується поняття первинної або простої імпліканти.

Метод Квайна полягає в застосуванні до імплікант, які входять в ДНФ функції  $f$  закону поглинання  $Fx + F\overline{x} = F$ .

Використовуючи операцію поглинання вдається знизити ранг термів. Ця процедура продовжується до тих пір, поки не залишиться жодного терму, який допускає поглинання з яким-небудь іншим термом. Терм над яким було здійснено поглинання відмічаються. Не відмічені терми представляють собою первинні імпліканти.

Метод Квайна виконується в декілька етапів. Продемонструємо його на прикладі.

**Приклад 2.** Мінімізувати функцію  $f(x, y, z) = \overline{x}yz + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}z + xyz$ .

**Розв'язання. Е т а п 1. Знаходження первинних імплікант.** Складаємо таблицю (табл. 1) і знаходяться імпліканти третього і другого рангу, тобто знижується ранг членів, які входять в ДДНФ.

Таблиця 5.1

	Початкові терми	$\overline{x}yz$	$\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{x}yz$	$x\overline{y}z$	$xyz$
+	$\overline{x}yz$	1		$\overline{x}z$	$\overline{y}z$	
+	$\overline{x}y\overline{z}$		1	$\overline{x}y$		
+	$\overline{x}yz$	$\overline{x}z$	$\overline{x}y$	1		$yz$
+	$x\overline{y}z$	$\overline{y}z$			1	$xz$
+	$xyz$			$yz$	$xz$	1

У табл. 5.1 та нижче (табл. 5.2) символом “+” позначені терми (імпліканти), до яких застосовувався закон поглинання.

Після цього складається таблиця (табл. 5.2), яка включає всі терми, які не брали участь у поглинанні (таких немає), а також первинні імпліканти другого рангу.

В загальному, складання таблиць продовжується до тих пір, поки можна застосувати закон поглинання.

Таблиця 5.2

		$\overline{x}z$	$\overline{y}z$	$\overline{x}y$	$xz$	$yz$
+	$\overline{x}z$	1			$z$	
+	$\overline{y}z$		1			$z$
	$\overline{x}y$			1		
+	$xz$	$z$			1	
+	$yz$		$z$			1

Складаємо наступну таблицю, яка включає усі терми, які не підлягли поглинанню на попередніх кроках (таким термом в даному випадку є терм  $\bar{x}y$ ), а також імпліканти 1-го рангу.

У розглядуваному прикладі можна дійти до первинних імплікант першого рангу (табл. 5.3).

Таблиця 5.3

	$\bar{x}y$	$z$
$\bar{x}y$	1	
$z$		1

В результаті етапу 1 одержуємо дві первинні імпліканти:  $\bar{x}y$  і  $z$ .

**Е т а п 2. Розставлення міток.** Складається таблиця (табл. 5.4), число рядків, якої дорівнює числу первинних імплікант, а число стовпців співпадає з числом мінтермів (конституент одиниць) ДДНФ функції  $f$ . Якщо в деякий мінтерм ДДНФ входить яка-небудь із первинних імплікант, то на перетині відповідного стовпця і рядка ставиться мітка (символ “\*”).

Таблиця 5.4

Первинні імпліканти	1	2	3	4	5
	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}z$	$xyz$
$\bar{x}y$		*	*		
$z$	*		*	*	*

**Е т а п 3. Знаходження істотних імплікант.** Якщо в деякому стовпці таблиці знаходиться лише одна мітка, то первинна імпліканта у відповідному рядку є істотною, оскільки без неї не буде можливості одержати усю множину заданих мінтермів. У даному випадку такою імплікантою є  $z$  і  $\bar{x}y$ . Стовпці, які відповідають істотним імплікантам, із таблиці викреслюються. У даному випадку такими імплікантами є  $z$  і  $\bar{x}y$ . Завдяки імплікації  $z$  в табл. 5.4 можна викреслити стовпці 1, 3, 4, 5, а завдяки імплікації  $\bar{x}y$  – стовпець 2. Зауважимо, що в першу чергу розглядаємо імплікацію, яка більше покриває конституент одиниці. В результаті такої дії приходимо до результату, коли покриті усі конституент одиниці, а оскільки імпліканти  $z$  і  $\bar{x}y$  є первинні, то можна записати мінімальну форму у вигляді  $f_{\min}(x, y) = \bar{x}y + z$ .

#### 1.4 Метод Квайна – Мак-Класкі

Метод Квайна – Мак-Класкі представляє собою формалізацію етапу пошуку первинних імплікант за методом Квайна. Формалізація зводиться до наступного:

1. Усі мінтерми (конституенти одиниці) із ДДНФ булевої функції  $f$  записуються відповідними двійковими номерами (наборами).

2. На першому кроці усі номери розбиваються на групи по кількості одиниць у наборі.

3. Оскільки сусідні групи відрізняються між собою по кількості одиниць на одиницю, то склеювання здійснюється тільки між номерами сусідніх груп. Номери, які брали участь у склеюваннях якимось чином відмічаються, наприклад, закреслюються.

4. Кожний із наборів може брати участь у декількох склеюваннях, як і в методі Квайна. Невідмічені після склеювання номери являються первинними імплікантами.

5. На другому кроці результати склеювання, одержані на першому кроці, розбиваються на групи по розташуванню символу (наприклад, “\*”), яким відмічені змінні, які брали участь у склеюванні і проводиться склеювання у межах виділених груп. Знову набори, які брали участь у склеюванні відмічаються і підлягають перегрупуванню по

розташуванні символів "\*" для подальшого склеювання, а набори, які не брали участь в склеюванні відносяться до первинних імплікант і т.д.

6. Знаходження мінімальних ДНФ здійснюється за допомогою імплікантної таблиці, як і в методі Квайна.

**Приклад 3.** Методом Квайна – Мак-Класкі мінімізувати функцію від чотирьох змінних  $f_4(0,4,7,8,9,11,12,13,15)$ , яка на вказаних наборах дорівнює одиниці.

**Розв'язання.**

1. Запишемо номери наборів у вигляді двійкових наборів (мінтермів): 0000, 0100, 0111, 1000, 1001, 1011, 1100, 1101, 1111.

2. Утворимо групи по кількості одиниць в наборі (табл. 5.5).

Таблиця 5.5

Номер групи	Двійкові номери конститuent одиниці
0	<del>0000</del>
1	<del>0100, 1000</del>
2	<del>1001, 1100</del>
3	<del>0111, 1011, 1101</del>
4	1111

Таблиця 5.6

Номери груп	Результати склеювання (двійкові номери імплікант)
0–1	0*00, *000
1–2	*100, 100*, 1*00
2–3	10*1, 1*01, 110*
3–4	*111, 1*11, 11*1

3. Склеюємо набори із сусідніх груп табл. 5.5. Результати склеювання наведено в табл.5.6. Закреслюємо набори в табл. 5.5, які брали участь в склеюванні.

4. Згрупуємо імпліканти по розташуванню зірочки в однакових позиціях (табл.5.7) і виконуємо склеювання в утворених групах. Результати склеювання зведено в табл. 5.8.

Таблиця 5.7

Номери груп	Набори груп
1	<del>*000, *100, *111</del>
2	<del>0*00, 1*00, 1*01, 1*11</del>
3	<del>10*1, 11*1</del>
4	100*, 110*

Таблиця 5.8

двійкові номери імплікант
**00, *111
**00, 1**1
1**1
1*0*

Таблиця 5.9

Двійкові номери імплікант
**00
*111
1**1
1*0*

5. Згрупуємо імпліканти по розташуванню зірочки в однакових позиціях і заносимо їх в табл. 5.9. Оскільки подальші склеювання неможливі, то записуємо прості імпліканти: \*\*00, \*111, 1\*\*1, 1\*0\*.

6. Будуємо імплікантну матрицю (табл. 5.10).

Таблиця 5.10

Двійкові набори простих імплікант	Двійкові набори конститuent одиниці								
	0000	0100	0111	1000	1001	1011	1100	1101	1111
**00	+	+		+			+		
*111			+						+
1**1					+	+		+	+
1*0*				+	+		+	+	

За імплікантою матрицею визначаємо сукупність двійкових наборів простих імплікант, які відповідають мінімальній ДНФ. Це набори \*\*00, \*111, 1\*\*1.

За допомогою двійкових наборів простих імплікант записуємо мінімальну ДНФ у буквенному вигляді

$$f_{\min}(a,b,c,d) = \bar{c}\bar{d} + bcd + ad.$$

Зауважимо, що розбиття конститuent на групи дозволяє зменшити число попарних порівнянь при склеюванні. Крім цього оперування з двійковими наборами дає можливість здійснити реалізацію методу на ЕОМ.

## 2. Метод мінімізуючих карт

Даний метод базується на графічному способі подання логічних функцій. Як правило, його використовують у випадку ручної (без застосування ЕОМ) мінімізації логічних функцій при невеликій кількості змінних (не більше п'яти, шести).

Суть цього методу зводиться до графічного подання булевих функцій у вигляді добре відомих у літературі карт Вейча та Карно. Нами пропонується ще один вид карт – К-карти, які мають простішу структуру і, що головне, на їх основі досить легко реалізувати напівавтоматичний тренажер мінімізації логічних функцій на ЕОМ.

Будь-яка із перерахованих карта представляє собою прямокутну або квадратну таблицю, що містить  $2^n$  клітинок, кожній із яких ставиться у відповідність одна із елементарних кон'юнкцій, або, що теж саме, один із двійкових наборів.

В основу мінімізації за допомогою мінімізуючих карт покладено поняття сусідніх клітинок.

Дві клітини називаються *сусідніми*, якщо вони геометрично сусідні, тобто мають спільну сторону. При цьому клітини крайнього лівого і крайнього правого стовпців таблиці, а також нижнього та верхнього рядків таблиці, вважаються так само сусідніми. Сусіднім клітинам відповідають сусідні набори, тобто набори, які різняться тільки в одній позиції, що відповідає тому самому розряду, або тій самій змінній..

Оскільки карти Карно і К-карти будуються за простішими алгоритмами ніж Карты Вейча, то розглянемо мінімізацією лише за цими картами.

### 2.1 Мінімізація за допомогою карт Карно

Карта Карно — це прямокутна або квадратна таблиця, число клітин в якій дорівнює  $2^n$  – по кількості мінтермів (конституент одиниці) для логічної функції від  $n$ -змінних. В карті Карно робиться розмітка рядків і стовпців змінними, що відповідає коду Грея. Кожній клітині приписується номер певного набору значень аргументів. На рис. 1 – 3 подано карти Карно для двох, трьох і чотирьох змінних, де показано приклади розмітки рядків і стовпців, десяткові й двійкові номери клітин та відповідні їм мінтерми.

Зауважимо, що десяткові і двійкові номери відповідних клітин в картах Карно змінюються в залежності від кількості змінних, що спричиняє певні незручності.

a)	$a \setminus b$	0	1
	0	0	1
	1	2	3

b)	$a \setminus b$	0	1
	0	00	01
	1	10	11

в)	$a \setminus b$	0	1
	0	$\bar{a}\bar{b}$	$a\bar{b}$
	0	$\bar{a}b$	$ab$

Рис. 5.1

a)	$a \setminus bc$	00	01	11	10
	0	0	1	3	2
	1	4	5	7	6

b)	$a \setminus bc$	00	01	11	10
	0	000	001	011	010
	1	100	101	111	110

в)	$a \setminus bc$	00	01	11	10
	0	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}c$	$\bar{a}bc$	$\bar{a}b\bar{c}$
	1	$\bar{a}b\bar{c}$	$\bar{a}bc$	$abc$	$ab\bar{c}$

г)	$a \setminus bc$	00	01	11	10
	0		1	1	
	1	1		1	1

Рис. 5.2

a) $ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

б) $ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

в) $ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$	$\bar{a}\bar{b}cd$	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}$
01	$\bar{a}\bar{b}c\bar{d}$	$\bar{a}\bar{b}cd$	$\bar{a}bcd$	$\bar{a}bc\bar{d}$
11	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}b\bar{c}d$	$\bar{a}bcd$	$\bar{a}bc\bar{d}$
10	$\bar{a}b\bar{c}d$	$\bar{a}bc\bar{d}$	$\bar{a}bcd$	$\bar{a}bc\bar{d}$

Рис. 5.3

## 2.2 Мінімізація за допомогою К-карт

К-карти — різновидність мінімізуючих карт, в основу побудови яких покладено перехід від карти для  $(n-1)$ -ї змінної до карти для  $n$  змінних за допомогою принципу дзеркального відображення. На рис. 4–8 подано К-карти для однієї, двох, ..., п'яти змінних, одержаних за допомогою наступних правил.

Як і карта Карно, К-карта для однієї змінної складається з  $2^1 = 2$  клітин (рис.4), для двох змінних (рис. 5) карта складається з  $2^2 = 4$  клітин, для трьох змінних (рис. 3.15) — із  $2^3 = 8$  клітин і т. д. Карта для  $n$  змінних містить у два рази більше клітин, ніж карта для  $(n-1)$  змінної. При цьому подвоєння кількості клітин здійснюється у відповідності з діаграмою:

$$1 \downarrow 2 \rightarrow 3 \downarrow 4 \rightarrow 5 \downarrow 6 \rightarrow 7 \downarrow 8 \rightarrow 9 \downarrow 10 \rightarrow 11 \downarrow 12 \rightarrow \dots,$$

де цифрами позначають кількість змінних, а стрілки — напрямок подвоєння карти.

Зокрема, для одержання карти для функції від двох змінних, карту для функції від однієї змінної подвоюємо вертикально вниз за допомогою дзеркального відображення та додавання до відображених значень числа  $2^1 = 2$ . Для одержання карти для функції від трьох змінних, карту для функції від двох змінних подвоюємо горизонтально вправо за допомогою дзеркального відображення та додавання до відображених значень числа  $2^2 = 4$ , при переході до карти для функції від чотирьох змінних, карту для функції від трьох змінних подвоюємо вертикально вниз і т. д.

На рис. 5.4 – 5.6 показано утворення К-карт для  $n = 1, 2$  і 3, нумерація їх клітин у десятковій і двійковій системах числення, а також мінтерми, які відповідають номерам клітин.

$\bar{a}$	$a$
0	$0 + 2^0$

$\bar{a}$	$a$
0	1

$\bar{a}$	$a$
$\bar{a}$	$a$

Рис. 5.4

a) $\bar{b}$	$\bar{a}$	$a$
$b$	0	1
	2	3

б) $\bar{b}$	$\bar{a}$	$a$
$b$	00	01
	10	11

в) $\bar{b}$	$\bar{a}$	$a$
$b$	$\bar{a}\bar{b}$	$\bar{a}b$
	$a\bar{b}$	$ab$

Рис. 5.5

	$\bar{a}$	$a$	$a$	$\bar{a}$
$\bar{b}$	0	1	$1+2^2$	$0+2^2$
$b$	2	3	$3+2^2$	$3+2^2$
	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$c$	$c$

	$\bar{a}$	$a$	$a$	$\bar{a}$
$\bar{b}$	0	1	5	4
$b$	2	3	7	6
	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$c$	$c$

	$\bar{a}$	$a$	$a$	$\bar{a}$
$\bar{b}$	000	001	101	100
$b$	010	011	111	110
	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$c$	$c$

	$\bar{a}$	$a$	$a$	$\bar{a}$
$\bar{b}$	$\bar{c}\bar{b}\bar{a}$	$\bar{c}ba$	$c\bar{b}a$	$c\bar{b}\bar{a}$
$b$	$\bar{c}b\bar{a}$	$\bar{c}ba$	$cba$	$cb\bar{a}$
	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$c$	$c$

Рис. 5.6

На рис. 5.7 показано утворення К-карти для  $n = 4$ , нумерація її клітин у десятковій, шістнадцятковій та двійковій системах числення, а також мінтерми, які відповідають номерам клітин.

	$\bar{a}$	$a$	$a$	$\bar{a}$	
$\bar{b}$	0	1	5	4	$\bar{d}$
$b$	2	3	7	6	$\bar{d}$
$b$	$2+2^3$	$3+2^3$	$7+2^3$	$6+2^3$	$d$
$\bar{b}$	$0+2^3$	$1+2^3$	$5+2^3$	$4+2^3$	$d$
	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$c$	$c$	

	$\bar{a}$	$a$	$a$	$\bar{a}$	
$\bar{b}$	0	1	5	4	$\bar{d}$
$b$	2	3	7	6	$\bar{d}$
$b$	10	11	15	14	$d$
$\bar{b}$	8	9	13	12	$d$
	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$c$	$c$	

	$\bar{a}$	$a$	$a$	$\bar{a}$	
$\bar{b}$	0	1	5	4	$\bar{d}$
$b$	2	3	7	6	$\bar{d}$
$b$	A	B	F	E	$d$
$\bar{b}$	8	9	D	C	$d$
	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$c$	$c$	

	$\bar{a}$	$a$	$a$	$\bar{a}$	
$\bar{b}$	0000	0001	0101	0100	$\bar{d}$
$b$	0010	0011	0111	0110	$\bar{d}$
$b$	1010	1011	1111	1110	$d$
$\bar{b}$	1000	1001	1101	1100	$d$
	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$c$	$c$	

	$\bar{a}$	$a$	$a$	$\bar{a}$	
$\bar{b}$	$\bar{d}\bar{c}\bar{b}\bar{a}$	$\bar{d}\bar{c}ba$	$\bar{d}c\bar{b}a$	$\bar{d}c\bar{b}\bar{a}$	$\bar{d}$
$b$	$\bar{d}\bar{c}b\bar{a}$	$\bar{d}\bar{c}ba$	$\bar{d}cba$	$\bar{d}cb\bar{a}$	$\bar{d}$
$b$	$\bar{d}\bar{c}b\bar{a}$	$\bar{d}\bar{c}ba$	$dcba$	$dcb\bar{a}$	$d$
$\bar{b}$	$\bar{d}\bar{c}\bar{b}\bar{a}$	$\bar{d}\bar{c}\bar{b}a$	$dc\bar{b}a$	$fdcb\bar{a}$	$d$
	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$c$	$c$	

Рис. 5.7

Запис К-карт у двійковій або шістнадцятковій системах числення полегшує виконувати операцію склеювання вмісту сусідніх клітин.

**Приклад 5.** Користуючись картами Карно мінімізувати функції:

$$f_3(a, b, c) = \bigvee_1(1, 2, 6, 7); \quad f_4(a, b, c, d) = \bigvee_1(0, 1, 2, 4, 5, 6, 9, 11).$$

**Розв'язання.** Відповідні карти Карно наведено на рис. 5.8 а), і рис. 5.8 б).

б)					
	$a \setminus bc$	00	01	11	10
	0	0	1	0	1
	1	0	0	1	1

в)					
	$ab \setminus cd$	00	01	11	10
	00	1	1	0	1
	01	1	1	0	1
	11	0	0	0	0
	10	0	1	1	0

Рис. 5.8

На кожній із карт виділимо прямокутні області максимальної площі і виконаємо склеювання відповідних мінтермів.

У випадку а) маємо дві прямокутні області по дві клітини, яким відповідають логічні суми по два мінтерми і один прямокутник, який складається з однієї клітини, якій відповідає один мінтерм:

$$\bar{a}b\bar{c} + abc\bar{c} = b\bar{c}, \quad abc + abc\bar{c} = ab, \quad \bar{a}\bar{b}c.$$

Виконавши операції склеювання та логічне сумування, одержаних імплікант, дістанемо  $f_{\min} = b\bar{c} + ab + \bar{a}\bar{b}c$ .

У випадку б) маємо один квадрат і два прямокутники, які розташовані на крайніх стовпчиках, що охоплює чотири крайні мінтерми і одна прямокутна область із двох клітин, якому відповідають логічні суми двох мінтермів:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} = \bar{a}\bar{c}, \quad \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} = \bar{a}d, \\ \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d = \bar{a}b\bar{d}.$$

Виконавши операції склеювання та логічне сумування, одержаних імплікант, дістанемо  $f_{\min} = \bar{a}\bar{c} + \bar{a}d + \bar{a}b\bar{d}$ .

Мінімізуємо задані логічні функції за допомогою К - карт.

За даними логічними функціями складемо К-карти (рис. 5.9 а) – 5.9 б)), в яких відображено двійкові набори, на яких функції приймають одиничні значення.

	$\bar{a}$	$a$	$a$	$\bar{a}$
$\bar{b}$		001		
$b$	010		111	110
	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$c$	$c$

Рис.5.9 а)

	$\bar{a}$	$a$	$a$	$\bar{a}$	
$\bar{b}$	0000	0001	0101	0100	$\bar{d}$
$b$	0010			0110	$\bar{d}$
$b$		1011			$d$
$\bar{b}$		1001			$d$
	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$c$	$c$	

Рис. 5.9 б)

Така форма подання функції є зручною для одержання склейок двійкових наборів (конституент одиниці), які входять в прямокутні області сусідні клітин.

Склеювання можна проводити у тих стовпчиках двійкових наборів, в яких кількість нулів і одиничок однакова. Склейки відмічено символом "\*".

У табл. 5.11 наведено множини конституент одиниці, які входять в області

Таблиця 5.11

010	111	
110	110	001
*10	11*	001
$b\bar{c}$	$ab$	$\bar{a}\bar{b}c$

Таблиця 5.12

0000	0000	
0001	0010	
0101	0100	1011
0100	0110	1001
0*0*	0**0	1**0
$\bar{a}\bar{c}$	$\bar{a}d$	$\bar{a}b\bar{d}$

оптимального покриття одиничних значень функції  $f_3(a,b,c)$  та відповідні склейки. Відповідна мінімальна форма має вигляд  $f_{\min} = b\bar{c} + ab + \bar{a}\bar{b}c$ .

Аналогічно в табл. 12 наведено множини конституент одиниці та відповідні склейки для функції  $f_4(a,b,c,d)$ . Відповідна мінімальна форма має вигляд  $f_{\min} = \bar{a}\bar{c} + \bar{a}d + \bar{a}b\bar{d}$ .

Наведемо також відповідні форми ДДНФ:  $f_3(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + abc$ ,  
 $f_4(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}bcd + a\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}cd$ .

Звернемо увагу: якщо записати функцію  $f_4$  у вигляді ДДНФ, то для її реалізації потрібно було б 19 інверторів, 24 кон'юнктори та 7 диз'юнкторів. Після мінімізації потрібно лише 5 інверторів, 4 кон'юнктори і 2 диз'юнктори.

### 3. Завдання для індивідуальної роботи

**Завдання 3.1.** Задано функцію алгебри логіки від трьох змінних  $f(x_1, x_2, x_3)$ , яка на заданих десяткових наборах  $f_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$  дорівнює одиниці. Для однієї з функцій (згідно з варіантом, визначеним викладачем), наведеної в табл. 5.13, користуючись методами: алгебраїчним, Квайна, карт Карно та К-карт мінімізувати функцію. За допомогою системи проектування MAX+plus II побудувати відповідні схеми і провести моделювання їх роботи.

Варіанти індивідуальної роботи до завдання 3.1 наведено у табл. 5.13.

Таблиця 5.13

№ п/п	Функція $f_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$		№ п/п	Функція $f_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$
1	$f_3(0, 1, 2, 4, 6)$		11	$f_3(1, 3, 4, 5, 7)$
2	$f_3(0, 2, 3, 4, 6)$		12	$f_3(1, 3, 4, 5, 6)$
3	$f_3(0, 2, 4, 5, 6)$		13	$f_3(0, 1, 3, 5, 7)$
4	$f_3(0, 2, 4, 6, 7)$		14	$f_3(1, 2, 3, 5, 7)$
5	$f_3(0, 1, 2, 3, 5)$		15	$f_3(0, 4, 5, 6, 7)$
6	$f_3(0, 1, 2, 3, 4)$		16	$f_3(2, 4, 5, 6, 7)$
7	$f_3(0, 1, 2, 3, 7)$		17	$f_3(1, 4, 5, 6, 7)$
8	$f_3(0, 1, 2, 3, 6)$		18	$f_3(3, 4, 5, 6, 7)$
9	$f_3(1, 2, 4, 5, 7)$		19	$f_3(0, 2, 3, 5, 7)$
10	$f_3(0, 2, 3, 4, 6)$		20	$f_3(0, 1, 3, 4, 6)$

**Завдання 3.2.** Задано функцію алгебри логіки від чотирьох змінних  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , яка на заданих десяткових наборах  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$  дорівнює одиниці, тобто  $f_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8) = 1$ . Для однієї з функцій (згідно з варіантом, визначеним викладачем), наведеної в табл. 5.14, за допомогою методів Квайна-Мак-Класкі, карт Карно та К-карт мінімізувати функцію. За допомогою системи проектування MAX+plus II побудувати відповідні схеми і провести моделювання їх роботи.

Таблиця 5.14

№ п/п	Функція $f_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8)$		№ п/п	Функція $f_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8)$
1	$f_4(0, 1, 2, 3, 8, 10, 13, 15)$		11	$f_4(0, 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11)$
2	$f_4(0, 2, 5, 7, 8, 9, 10, 11)$		12	$f_4(0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 10)$
3	$f_4(0, 1, 2, 3, 4, 6, 13, 15)$		13	$f_4(0, 1, 3, 4, 5, 7, 9, 11)$

<b>4</b>	$f_4(0, 2, 3, 8, 10, 11, 12, 14)$
<b>5</b>	$f_4(0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10)$
<b>6</b>	$f_4(0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11)$
<b>7</b>	$f_4(0, 1, 4, 5, 6, 7, 12, 14)$
<b>8</b>	$f_4(0, 1, 4, 5, 6, 7, 13, 15)$
<b>9</b>	$f_4(0, 1, 4, 5, 6, 10, 12, 14)$
<b>10</b>	$f_4(0, 1, 4, 5, 6, 8, 12, 15)$

<b>14</b>	$f_4(1, 5, 8, 9, 11, 12, 13, 15)$
<b>15</b>	$f_4(0, 4, 8, 9, 10, 12, 13, 14)$
<b>16</b>	$f_4(0, 4, 8, 9, 11, 12, 13, 15)$
<b>17</b>	$f_4(5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)$
<b>18</b>	$f_4(3, 4, 6, 7, 11, 12, 14, 15)$
<b>19</b>	$f_4(0, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 13)$
<b>20</b>	$f_4(3, 4, 8, 9, 11, 12, 13, 15)$

#### **4. Зміст звіту**

4.1. Короткі теоретичні відомості про мінімізацію логічних функцій за допомогою методів: алгебраїчного, Квайна, Квайна -Мак-Класкі.

4.2. Короткі відомості про представлення та мінімізацію логічних функцій за допомогою карт Карно та К-карт.

4.3. Поетапні результати мінімізації заданих функцій за допомогою методу Квайна - Мак-Класкі, карт Карно та К-карт.

4.4. Функціональні цифрові логічні схеми, які відповідають як досконалим диз'юнктивним нормальним формам заданих функцій, так і результатам їх мінімізації.

## Практична робота № 6

**Тема.** Мінімізація неповністю визначених функцій.

**Мета роботи:** Ознайомитись з числовим, табличним та аналітичним представленням логічних (булевих) функцій. Набути навички переходу від табличного представлення логічних функцій до досконалої диз'юнктивної нормальної форми. Ознайомитись з методом мінімізації неповністю визначених функцій та оволодіти навичками подання логічних функцій у 8-ми базових формах з використанням логічних елементів І, АБО, НЕ; І-НЕ; АБО-НЕ. Роботу побудованих логічних функцій та відповідних схем перевірити за допомогою пакету Electronics Workbench.

### Теоретичні відомості

#### Неповністю визначені функції

**Неповністю (або частково) визначеними** логічними функціями називаються такі функції, які на частині двійкових наборів приймають значення нуль, на частині – одиниця, а на частині – значення функції невизначене. На останній частині наборів вибирається значення функції нуль або одиниця виходячи з умови, щоб нова функція була мінімальною серед усіх мінімальних функцій, які можна одержати при різних довизначеннях функції.

**Завдання.** Розробити логічні схеми для реалізації частково визначених логічних функцій  $F$  від 4-х аргументів, заданих таблицями істинності. Кожна комбінація значень аргументів двійкових змінних  $ABCD$  відображається числом  $N$ , яке дорівнює:  $2^3A+2^2B+2^1C+2^0D$ . Значення функцій при не вказаних комбінаціях значень аргументів необхідно довизначити для одержання схеми з мінімальним числом елементів. Мінімізацію логічної функції проводити за допомогою  $K$ -карт. Розробку схем провести на базі таких типів елементів:

- Елементи І, АБО, НЕ;
- Елементи І-НЕ;
- Елементи АБО-НЕ.

#### Зміст роботи:

1. На основі скороченого запису логічних функцій записати їх досконалі диз'юнктивні нормальні форми та представлення у вигляді  $K$ -карт.
2. Провести мінімізацію логічних функцій за допомогою  $K$ -карт.
3. За допомогою пакету Electronics Workbench провести моделювання цифрових електронних схем, які реалізують, як вихідні, так і мінімальні функції.

#### Зміст звіту:

1. Короткі теоретичні відомості про числове, табличне та аналітичне представлення логічних функцій; диз'юнктивні нормальні та досконалі диз'юнктивні нормальні форми; способи перетворення нормальних форм у досконалі нормальні форми.
2. Короткі відомості про представлення та мінімізацію логічних функцій за допомогою  $K$ -карт.
3. Моделі цифрових електронних схем як досконалих диз'юнктивних нормальних форм заданих функцій, так і результатів їх мінімізації, одержаних за допомогою пакету Electronics Workbench.

**Завдання 1.** Задано функцію алгебри логіки від трьох змінних  $x_1, x_2, x_3$ , яка на заданих десяткових наборах  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  дорівнює одиниці, тобто  $f_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 1$ . Для однієї з функції (згідно варіанту), наведеної в табл. 1, виконати завдання 1-3 розділу ЗМІСТУ РОБОТИ.

Варіанти індивідуальних завдань

Таблиця 5.1

№ п/п	Функція $f_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$	№ п/п	Функція $f_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$
1	$f_3(0, 1, 2, 4, 6)$	9	$f_3(1, 3, 4, 5, 7)$
2	$f_3(0, 2, 3, 4, 6)$	10	$f_3(1, 3, 4, 5, 6)$
3	$f_3(0, 2, 4, 5, 6)$	11	$f_3(0, 1, 3, 5, 7)$
4	$f_3(0, 2, 4, 6, 7)$	12	$f_3(1, 2, 3, 5, 7)$
5	$f_3(0, 1, 2, 3, 5)$	13	$f_3(0, 4, 5, 6, 7)$
6	$f_3(0, 1, 2, 3, 4)$	14	$f_3(2, 4, 5, 6, 7)$
7	$f_3(0, 1, 2, 3, 7)$	15	$f_3(1, 4, 5, 6, 7)$
8	$f_3(0, 1, 2, 3, 6)$	16	$f_3(3, 4, 5, 6, 7)$

**Завдання 2.** Задано функцію алгебри логіки від чотирьох змінних  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , яка на заданих десяткових наборах  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$  дорівнює одиниці, тобто  $f_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8) = 1$ . Для однієї з функції (згідно варіанту), наведеної в табл. 2, виконати завдання 1-3 розділу ЗМІСТУ РОБОТИ.

Варіанти індивідуальних завдань

Таблиця 5.2

№ п/п	Функція $f_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8)$	№ п/п	Функція $f_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8)$
1	$f_4(0, 1, 2, 3, 8, 10, 13, 15)$	9	$f_4(0, 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11)$
2	$f_4(0, 2, 5, 7, 8, 9, 10, 11)$	10	$f_4(0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 10)$
3	$f_4(0, 1, 2, 3, 4, 6, 13, 15)$	11	$f_4(0, 1, 3, 4, 5, 7, 9, 11)$
4	$f_4(0, 2, 3, 8, 10, 11, 12, 14)$	12	$f_4(1, 5, 8, 9, 11, 12, 13, 15)$
5	$f_4(0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10)$	13	$f_4(0, 4, 8, 9, 10, 12, 13, 14)$
6	$f_4(0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11)$	14	$f_4(0, 4, 8, 9, 11, 12, 13, 15)$
7	$f_4(0, 1, 4, 5, 6, 7, 12, 14)$	15	$f_4(5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)$
8	$f_4(0, 1, 4, 5, 6, 7, 13, 15)$	16	$f_4(3, 4, 6, 7, 11, 12, 14, 15)$

Неповністю (або частково) визначеними логічними функціями називаються такі функції, які на частині двійкових наборів приймають значення нуль, на частині – одиниця, а на частині – значення функції невизначене. На останній частині наборів вибирається значення функції нуль або одиниця виходячи з умови, щоб нова функція була мінімальною серед усіх мінімальних функцій, які можна одержати при різних довизначеннях функції.

**Завдання 3.** Розробити логічні схеми для реалізації частково визначених логічних функцій F від 4-х аргументів, заданих таблицями істинності. Кожна комбінація значень аргументів двійкових змінних ABCD відображається числом N, яке дорівнює:  $2^3A + 2^2B + 2^1C + 2^0D$ . Значення функцій при не вказаних комбінаціях значень аргументів

необхідно до визначити для одержання схеми з мінімальним числом елементів. Мінімізацію логічної функції проводити за допомогою К-карт із перевіркою правильності мінімізації за допомогою логічного перетворювача пакету Electronics Workbench. Розробку схем провести на базі таких типів елементів і схем:

- Елементи І, АБО, НЕ;
- Елементи І-НЕ;
- Елементи АБО-НЕ.

Для прикладу розглянемо функцію, задану в табл.3.

Таблиця 3

N	4	6	7	8	9	11	12	13	14	15
F	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1

Таблиця 4

N	A	B	C	D	F
4	0	1	0	0	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

Таблиця 5

?	?	?	0
?	?	7	6
?	11	15	0
0	9	0	0

Таблиця 6

0	0001	0	0
0010	0011	0111	0110
0	1011	1111	0
0	1001	0	0

Таблиця 7

0001	0010	0011
0011	0011	0111
1011	0111	1011
1001	0110	1111
*0*1	0*1*	**11

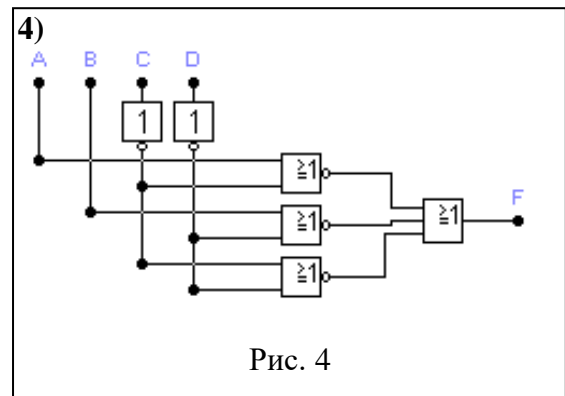
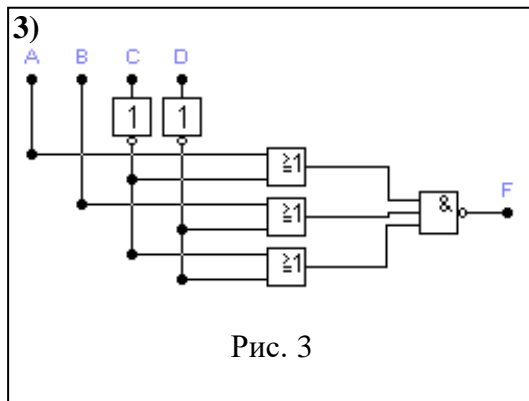
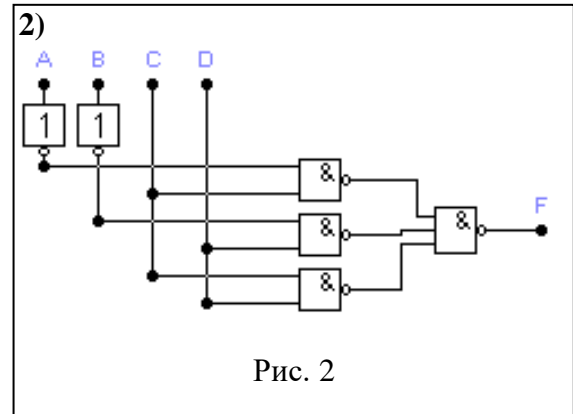
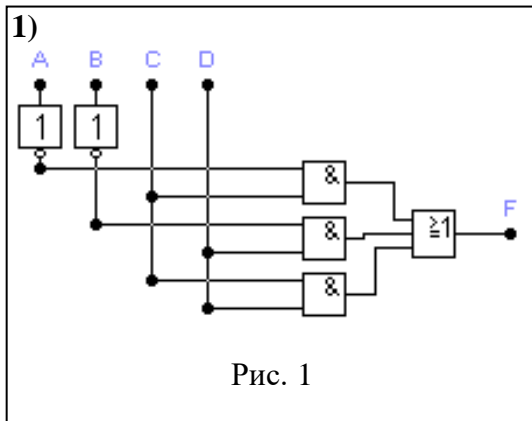
Таблицю істинності заданої функції подано в табл.4. В табл. 5 представлено К-карту вихідної функції, в якій символом “?” позначено клітини, що відповідають наборам, на яких функція невизначена. В табл. 6 представлено К-карту до визначеної функції, де заливкою позначені клітини, які відповідають наборам, на яких до визначена функція. Довизначення здійснюється так, щоб одержана функція була найбільш мінімальною із усіх можливих мінімальних форм до визначених функцій. Можливі склейки для до визначеної функції представлені в табл. 7. Мінімальна функція, одержана за допомогою К-карти має вигляд  $F = \overline{B}D + \overline{A}C + CD$ .

Нижче наведено перші чотири базові мінімальні форми знайденої мінімальної функції:

- 1)  $F = \overline{A}C \vee \overline{B}D \vee CD$  –  $A'C + B'D + CD$  – форма і/або;
- 2)  $F = \overline{\overline{A}C \wedge \overline{B}D \wedge \overline{C}D}$  –  $((A'C)(B'D)(CD))'$  – форма і-не/і-не;
- 3)  $F = \overline{(A \vee \overline{C}) \wedge (B \vee \overline{D}) \wedge (\overline{C} \vee \overline{D})}$  –  $((A+C)(B+D)(C'+D'))'$  – форма або/і-не;
- 4)  $F = \overline{A \vee \overline{C} \vee B \vee \overline{D} \vee \overline{C} \vee \overline{D}}$  –  $(A+C')' + (B+D')' + (C'+D)'$  – форма або-не/або.

Для зручності користування (тут і нижче) мінімальні форми записано традиційно і в формі, яка використовується в пакеті Electronics Workbench.

На рис. 1-4 наведено схеми, які відповідають знайденим формам 1)-4):



В табл. 8 представлено К-карту функції  $G = \bar{F}$ . Можливі склейки для даної функції представлені в табл. 9. Мінімальна функція має вигляд

$$G = \bar{F} = \bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{D} + \bar{B}\bar{C}.$$

Таблиця 8

0000		0101	0100
1010			1110
1000		1101	1100

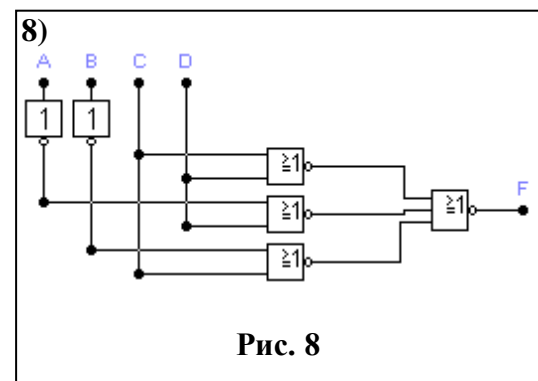
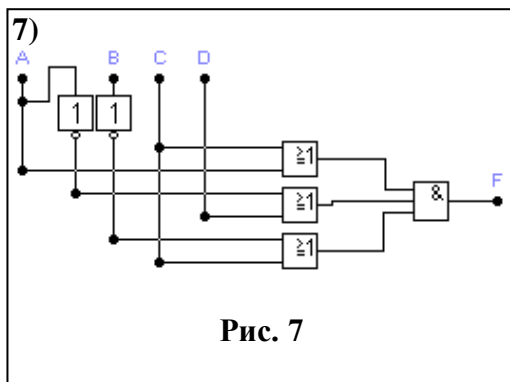
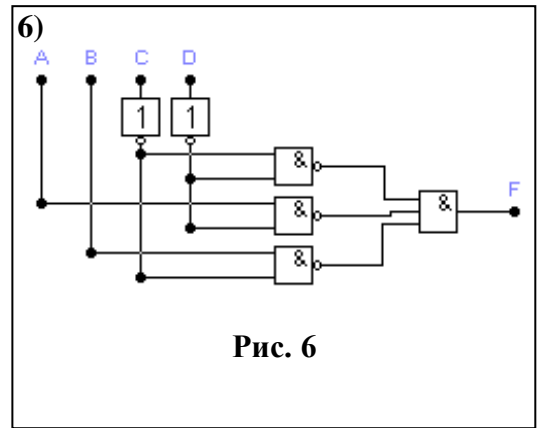
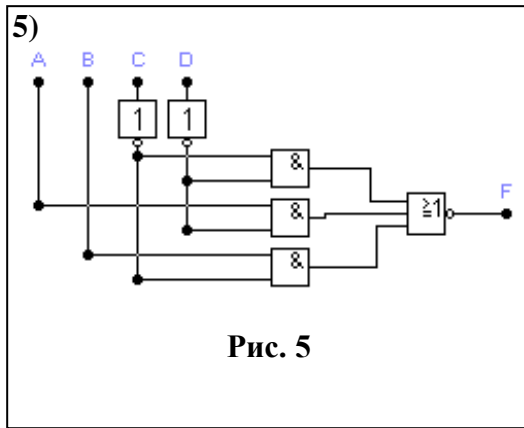
Таблиця 9

0000	1010	0101
1000	1000	0100
0100	1110	1100
1100	1100	1101
**00	1**0	*10*

Нижче наведено наступні чотири базові мінімальні форми знайденої мінімальної функції:

- 5)  $F = \bar{G} = \overline{\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{D} + \bar{B}\bar{C}} - (C'D' + AD' + BC)'$  – форма і/або-не;
- 6)  $F = \overline{\bar{C}\bar{D}} \wedge \overline{\bar{A}\bar{D}} \wedge \overline{\bar{B}\bar{C}} - (C'D')'(AD')'(BC)'$  – форма і-не/і;
- 7)  $F = (C \vee D) \wedge (\bar{A} \vee D) \wedge (\bar{B} \vee C) - (C+D)(A'+D)(B'+C)$  – форма або/і;
- 8)  $F = \overline{C \vee D \vee \bar{A} \vee D \vee \bar{B} \vee C} - ((C+D)'+(A'+D)'+(B'+C))'$  – форма або-не/або-не.

На рис. 5-8 наведено схеми, які відповідають знайденим мінімальним формам:



Варіанти індивідуальних завдань до завдання 3 наведено в табл.10.

Таблиця 10

1	N	1	2	3	4	6	7	8	9	11	12
	F	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
2	N	0	2	3	5	6	7	8	9	13	15
	F	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0
3	N	1	2	3	4	6	7	9	12	13	14
	F	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
4	N	0	2	3	5	6	7	8	10	12	13
	F	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
5	N	0	1	3	4	6	9	10	11	14	15
	F	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1
6	N	0	1	2	5	7	10	11	13	14	15
	F	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1
7	N	1	3	4	5	6	10	11	12	14	15
	F	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
8	N	0	2	4	5	7	8	10	11	14	15
	F	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1
9	N	0	1	3	4	5	6	9	10	11	14
	F	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
10	N	0	1	2	4	5	7	10	11	13	15
	F	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
11	N	0	1	3	4	5	6	11	12	14	15
	F	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0

12	N	0	1	2	4	5	7	8	10	14	15
	F	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
13	N	1	2	3	4	6	8	9	11	12	13
	F	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
14	N	0	2	3	5	7	8	9	12	13	15
	F	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1
15	N	1	3	4	6	7	8	9	12	13	14
	F	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
16	N	0	2	5	6	7	8	9	10	12	13
	F	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
17	N	0	2	3	5	6	7	8	9	10	13
	F	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0
18	N	1	2	3	4	6	7	8	9	12	14
	F	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
19	N	0	2	3	5	6	7	8	12	13	15
	F	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1
20	N	1	2	3	4	6	7	9	11	12	13
	F	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Балоба С.І. Дискретна математика: навч. посіб. / С.І. Балоба. – Ужгород: Вид-во ПП «АУТДОР-ШАРК», 2021. – 124 с.
2. Борисенко О.А. Дискретна математика: підручник / О.А. Борисенко. – Суми: Вид-во «Університетська книга», 2017. – 254 с.
3. Коцовський В. М. Основи дискретної математики: навч. посіб. / В.М. Коцовський. – Ужгород: Рік-У, 2020. — 123 с.
4. Матвієнко М.П. Дискретна математика: підручник. – Київ: Вид-во «Ліра», К. 2017. – 324 с.
5. Матвієнко М.П., Шаповалов С.П. Математична логіка та теорія алгоритмів: навч. посіб. – К.: Видавництво Ліра-К, 2017. – 212 с.
6. Нікольський Ю. В. Дискретна математика: підручник (3-тє вид.) / Ю.В. Нікольський, В.В. Пасічник, Ю.М. Щербина. – Львів: "Магнолія-2006", 2015. – 432 с.
7. Король І.Ю., Тютюнникова Г.С. Методичні вказівки та завдання до лабораторних робіт з курсу „Комп’ютерна логіка” для студентів 2-го курсу інженерно-технічного факультету, напряму підготовки „Комп’ютерна інженерія”. – Ужгород: Вид-во ПП «АУТДОР-ШАРК», 2019. – 68с.
8. Дичка І.А. Основи прикладної теорії цифрових автоматів: підручник / І.А. Дичка, В.П. Тарасенко, М.В. Онай. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2019. – 508 с.
9. Олійник Л. О. Дискретна математика: навч. посіб. / Л.О. Олійник. – Дніпродзержинськ: "ДДТУ", 2015. – 267 с.
10. Федоренко Н.Д. Дискретна математика: навчальний посібник у двох частинах / Н.Д. Федоренко та ін. – Ч. 1. – К.: КНУБА, 2014 – 104 с.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
ПРАКТИЧНА РОБОТА № 1. Операції над множинами. Діаграми Ейлера-Венна.....	4
ПРАКТИЧНА РОБОТА № 2. Моделювання роботи контактних схем в середовищі Electronics Workbench .....	11
ПРАКТИЧНА РОБОТА № 3. Табличне представлення функцій алгебри логіки. Доведення основних законів алгебри логіки.....	17
ПРАКТИЧНА РОБОТА № 4. Синтез комбінаційних схем.....	22
ПРАКТИЧНА РОБОТА № 5. Аналітичні методи мінімізації функцій. Метод мінімізуючих карт.....	25
ПРАКТИЧНА РОБОТА № 6. Мінімізація неповністю визначених функцій.....	35
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	41