

**ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
Кафедра теорії ймовірностей і математичного аналізу**

**«ЗАТВЕРДЖУЮ»**  
Декан факультету математики  
та цифрових технологій  
Микола МАЛЯР  
«30» \_\_\_\_\_ 2023 року



**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА**

Рівень вищої освіти	<b>перший (бакалаврський)</b>
Галузь знань	<b>11 Математика та статистика</b>
Спеціальність	<b>113 Прикладна математика</b>
Освітня програма	<b>Системи штучного інтелекту</b>
Статус дисципліни	<b>обов'язкова</b>
Мова навчання	<b>українська</b>

Робоча програма навчальної дисципліни «**Теорія ймовірностей і математична статистика**» для здобувачів вищої освіти галузі знань **11 Математика та статистика** спеціальності **113 Прикладна математика** освітньої програми **Системи штучного інтелекту**.

**Розробник:** Слюсарчук П.В., доцент, к. ф.-м. н, професор кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу


Робочу програму розглянуто та затверджено на засіданні кафедри *теорії ймовірностей і математичного аналізу*

протокол № 11 від 16.06 2023 р.

Завідувач кафедри  Ганна СЛИВКА-ТИЛИЩАК

Схвалено науково-методичною комісією **факультету математики та цифрових технологій**.

Протокол № 10 від «20» червня 2023 року.

Голова науково-методичної комісії  Наталія ЮРЧЕНКО

© Слюсарчук П.В., 2023 р.

© ДВНЗ «Ужгородський національний університет», 2023 р.

## 1. ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Найменування показників	Розподіл годин за навчальним планом	
	Денна форма навчання	
Кількість кредитів ЄКТС – 7	Рік підготовки:	
Загальна кількість годин – 210	<b>2-й</b>	
Кількість модулів – 4	Семестр:	
Тижневих годин для денної форми навчання: <b>1-й семестр</b> аудиторних – 3 самостійної роботи студента – 4 <b>2-й семестр</b> аудиторних – 3 самостійної роботи студента – 3	<b>3-й</b>	<b>4-й</b>
	Лекції:	
	<b>30</b>	<b>22</b>
	Практичні (семінарські):	
	<b>30</b>	<b>22</b>
	Лабораторні:	
Вид підсумкового контролю: <b>1-й семестр</b> – екзамен; <b>2-й семестр</b> – екзамен.	-	-
Форма підсумкового контролю: усна.	Самостійна робота:	
	<b>60</b>	<b>46</b>

## 2. МЕТА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Метою вивчення навчальної дисципліни «**Теорія ймовірностей і математична статистика**» є оволодіти: основні поняття про випадкові події; ймовірність випадкової події; випадкові величини, їх розподіли та числові характеристики; основні ймовірнісні нерівності; різні типи збіжностей випадкових величин; властивості різних типів збіжностей та їх взаємозв'язок; закон великих чисел; характеристичні функції; граничні теореми; випадкові процеси; основні поняття базових елементів математичної статистики: вибірка, емпірична функція розподілу, основні характеристики вибірки, статистичні оцінки та їх властивості, статистичні оцінки для математичного сподівання та дисперсії, моментів; асимптотична нормальність емпіричних моментів, ефективні оцінки; нерівність Крамера-Рао; методи одержання статистичних оцінок; поняття довірчого інтервалу; поняття статистичної гіпотези і статистичного критерію; кореляційний і регресійний аналізи.

Відповідно до освітньої програми, вивчення дисципліни сприяє формуванню у здобувачів вищої освіти таких компетентностей:

ЗК01. Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.

ЗК02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК05. Здатність проведення досліджень на відповідному рівні.

ЗК06. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК07. Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.

ЗК08. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

ЗК17. Здатність приймати обґрунтовані рішення.

ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.

ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі.

ФК03. Здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання прикладних задач, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень.

ФК09. Здатність до проведення математичного і комп'ютерного моделювання, аналізу та обробки даних, обчислювального експерименту, розв'язання формалізованих задач за допомогою спеціалізованих програмних засобів.

## 3. ПЕРЕДУМОВИ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Передумовами вивчення навчальної дисципліни «**Теорія ймовірностей і математична статистика**» є опанування таких навчальних дисциплін (НД) освітньої програми (ОП):

ОК 06 – Математичний аналіз.

ОК 07 – Алгебра і геометрія.

## 4. ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

Відповідно до освітньої програми «**Системи штучного інтелекту**», вивчення навчальної дисципліни повинно забезпечити здобувачами вищої освіти таких програмних результатів навчання (ПРН):

Програмні результати навчання	Шифр ПРН
Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами.	ПРН02

Володіти методиками вибору раціональних методів та алгоритмів розв'язання математичних задач оптимізації, дослідження операцій, оптимального керування і прийняття рішень, аналізу даних.	ПРН10
Виявляти здатність до самонавчання та продовження професійного розвитку.	ПРН14
Уміти організувати власну діяльність та одержувати результат у рамках обмеженого часу.	ПРН15

Очікувані результати навчання, які повинні бути досягнуті здобувачами освіти після опанування навчальної дисципліни «Дискретна математика»:

Очікувані результати навчання з дисципліни	Шифр ПРН
Знати принципи статистичних міркувань і математичних доведень: основні поняття і теореми ймовірностей; основні методи знаходження ймовірностей випадкових подій; основні закони розподілу одновимірних та багатовимірних випадкових величин; основні поняття математичної статистики; методи статистичного опису результатів спостережень; методи перевірки статистичних гіпотез; елементи теорії кореляції і регресії.	ПРН 02, ПРН10, ПРН 14
Вміти застосовувати здобуті теоретичні знання для обчислення ймовірностей випадкових подій та різних характеристик випадкових величин, встановлювати теоретико-ймовірнісні закономірності та використовувати отримані результати для обґрунтування прийнятих рішень, статистичного аналізу математичних моделей, що описують реальні явища і процеси.	ПРН 02, ПРН10, ПРН 14, ПРН15

## 5. ЗАСОБИ ДІАГНОСТИКИ ТА КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

### Методи навчання

Метод проблемного викладення матеріалу, пояснювально-ілюстративний метод, пошуковий метод.

### Засоби оцінювання та методи демонстрування результатів навчання

Засобами оцінювання та методами демонстрування результатів навчання з навчальної дисципліни є:

- виконання практичних завдань;
- модульні контрольні роботи;
- екзамен.

### Форми контролю та критерії оцінювання результатів навчання

Форми поточного контролю: фронтальне опитування, виступ на практичних заняттях, виконання типових практичних завдань.

Форма модульного контролю: письмова контрольна робота.

Форма підсумкового семестрового контролю: екзамен (3-ий семестр), екзамен (4-ий семестр).

### Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти (модуль 1)

Поточне оцінювання та самостійна робота						Модульна контрольна робота	Сума
T1	T2	T3	T4	T5	T6	50	100
9	7	7	7	11	9		

T1, T2 ... – теми

### Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти (модуль 2)

Поточне оцінювання та самостійна робота					Модульна контрольна робота	Сума
T1	T2	T3	T4	T5	50	100
12	8	10	10	10		

T1, T2 ... – теми

### Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти (модуль 3)

Поточне оцінювання та самостійна робота				Модульна контрольна робота	Сума
T1	T2	T3	T4	50	100
12	14	10	14		

T1, T2 ... – теми

### Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти (модуль 4)

Поточне оцінювання та самостійна робота			Модульна контрольна робота	Сума
T1	T2	T3	50	100
15	15	20		

T1, T2 ... – теми

### Оцінювання окремих видів навчальної роботи з дисципліни

Вид діяльності здобувача вищої освіти	Модуль 1		Модуль 2		Модуль 3		Модуль 4	
	Кількість	Максимальна кількість балів (сумарна)	Кількість	Максимальна кількість балів (сумарна)	Кількість	Максимальна кількість балів (сумарна)	Кількість	Максимальна кількість балів (сумарна)
Практичні заняття	6	50	5	50	4	50	3	50
Модульна контрольна робота	1	50	1	50	1	50	1	50
<b>Разом</b>		<b>100</b>		<b>100</b>		<b>100</b>		<b>100</b>

### Критерії оцінювання модульної контрольної роботи

Матеріал кожного модуля, який здобувачі вищої освіти повинні засвоїти протягом семестру, вноситься на модульну контрольну роботу.

Модульна контрольна робота складається із 5-ох теоретичних питань, кожне з яких оцінюється в 10 балів.

Сумарна оцінка (від 0 до 100 балів) виставляється у відомість модульного контролю. Модуль зараховується, якщо сумарний бал складає не менше 60 балів.

### Критерії оцінювання підсумкового семестрового контролю

**Екзаменаційна методика оцінювання.** За результатами модульних контролів визначається підсумкова модульна оцінка. Підсумкова модульна оцінка визначається як середньоарифметичне значення двох модулів. Екзаменаційна оцінка визначається в залежності від рейтингового балу, або балів за екзамен.

До складання екзамену допускаються здобувачі вищої освіти, у яких підсумкова модульна оцінка за семестр становить не менше 35.

Здобувач вищої освіти, підсумкова модульна оцінка якого складає від 0 до 34 балів, зобов'язаний покращити її до початку підсумкового семестрового контролю під час чергування

викладача на кафедрі у строки, визначені викладачем дисципліни та погоджені деканатом факультету. В протилежному випадку, здобувач не допускається до екзамену.

Екзамен з навчальної дисципліни здобувач вищої освіти може не скласти, якщо він успішно пройшов усі модульні контролі та його влаштовує підсумкова модульна оцінка. Здобувачі вищої освіти, підсумкова модульна оцінка яких становить від 35 до 59, екзамен складають обов'язково. Здобувач освіти може підвищити на екзамені рейтинговий бал, при цьому, за результатами складання екзамену оцінка не може бути менша за підсумкову модульну оцінку, яку він отримав за результатами модульних контролів.

Екзамен проводиться в усній формі. Екзаменаційний білет складається з двох теоретичних питань та двох практичних завдань. Оцінювання результатів навчання на екзамені здійснюється за 100-бальною шкалою. Оцінка за екзамен вноситься у відомість обліку успішності.

**Таблиця відповідності оцінок за різними шкалами оцінювання**

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену	для заліку
90-100	A	відмінно	зараховано
82-89	B	добре	
74-81	C		
64-73	D	задовільно	
60-63	E		
35-59	FX	незадовільно з можливістю повторного складання	незараховано з можливістю повторного складання
0-34	F	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	незараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

### **Критерій оцінювання підсумкового контролю з дисципліни**

— **«відмінно» (90-100 балів, A)** заслуговує студент, який виявив всебічне і глибоке знання програмового матеріалу, вміння вільно виконувати завдання, передбачені програмою, засвоїв основну і ознайомився з додатковою літературою, розуміє взаємозв'язок головних понять дисципліни та їх значення для майбутньої професії;

— **«добре» (82-89 балів, B)** заслуговує студент, який виявив повне знання програмного матеріалу, успішно виконує передбачені програмою завдання, засвоїв основну літературу рекомендовану програмою, виявив систематичний характер знань з дисциплін і здатний до самостійного доповнення, але під час відповіді допустив деякі неточності;

— **«добре» (74-81 бал, C)** заслуговує студент, що виявив не цілком повне знання програмного матеріалу, не завжди успішно виконує передбачені програмою завдання, частково засвоїв основну літературу, рекомендовану програмою, виявив не систематичний характер знань з дисциплін і не завжди здатний до їх самостійного доповнення і під час відповіді допускає деякі неточності;

— **«задовільно» (64-73 бали, D)** заслуговує студент, що виявив знання основного програмного матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий з основною рекомендованою літературою. Як правило, дана оцінка виставляється студентам, що допустили помилки у відповіді на заліку чи екзамені та при виконанні залікових або екзаменаційних завдань, але які володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача;

— **«задовільно» (60-63 балів, E)** заслуговує студент, що виявив часткове знання основного програмового матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, не завжди вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий лише частково

з основною рекомендованою літературою. Як правило, дана оцінка виставляється студентам, що допустили грубі помилки у відповіді на заліку чи екзамені та при виконанні залікових або екзаменаційних завдань, але які частково володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача.

— «незадовільно» (35-59 балів, FX) виставляється студенту, який виявив суттєві прогалини в знаннях основного програмового матеріалу, допустив принципові помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

— «незадовільно» (0-34 балів, F) виставляється студенту коли протягом семестру він допустив грубі помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

## 6. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

### 6.1 Зміст навчальної дисципліни

#### Модуль 1.

**Тема 1.** Предмет і методи теорії ймовірностей. Використання ймовірнісних методів в науці, техніці, економіці. Стохастичний експеримент, випадкові події, простір елементарних подій, алгебра і  $\sigma$ -алгебра подій. Частота настання події, статистичне означення ймовірності. Класичне означення ймовірності. Геометричні ймовірності.

**Тема 2.** Аксиоматичне означення ймовірності (аксіоми Колмогорова), наслідки із аксіом. Ймовірнісний простір. Теорема додавання ймовірностей. Теорема про неперервність ймовірності.

**Тема 3.** Умовні ймовірності. Теорема множення ймовірностей. Залежні і незалежні події. Формула повної ймовірності. Формули Байєса.

**Тема 4.** Схема Бернуллі, найімовірніше число настання події. Граничні теореми в схемі Бернуллі: теорема Пуасона, локальна гранична теорема, інтегральна гранична теорема Лапласа. Наслідки. Поняття про оцінки відхилень частоти від ймовірності.

**Тема 5.** Випадкові величини як вимірні функції на просторі елементарних подій, їх розподіли. Функція розподілу випадкової величини, властивості. Дискретні і неперервні випадкові величини, щільність розподілу випадкової величини. Три типи розподілів. Конкретні розподіли випадкових величин: біномний розподіл, розподіл Пуасона, геометричний розподіл, гіпергеометричний, показниковий, рівномірний і нормальний розподіли. Розподіли деяких функцій від випадкових величин.

**Тема 6.** Випадковий вектор. Функція розподілу випадкового вектора, щільність розподілу випадкового вектора. Многовимірні дискретні випадкові величини. Незалежні випадкові величини. Розподіл функцій від векторних величин. Суми випадкових величин, згортка розподілів. Розподіл добутку, частки, випадкових величин. Розподіли  $\chi^2$ , Стюдента, Фішера.

#### Модуль 2.

**Тема 1.** Числові характеристики випадкових величин. Математичне сподівання випадкових величин, властивості. Дисперсія випадкової величини. Мода, медіана. Моменти випадкових величин. Нерівність Ляпунова. Нерівність Чебишова. Кореляційна матриця випадкового вектора, коефіцієнт кореляції двох випадкових величин. Умовні розподіли. Умовне математичне сподівання, випадок нормального розподілу.

**Тема 2.** Збіжність послідовності випадкових величин за ймовірністю, з ймовірністю 1, в середньому квадратичному, за розподілом. Співвідношення між типами збіжностей.

**Тема 3.** Закон великих чисел. Теореми Чебишова, Бернуллі. Нерівність Колмогорова, посилений закон великих чисел, теорема Бореля.

**Тема 4.** Характеристичні функції, їх властивості. Формули обернення. Граничні теореми для характеристичних функцій. Слаба збіжність розподілів і її еквівалентність збіжності характеристичних функцій.

**Тема 5.** Центральна гранична теорема, умова Ліндерберга її імовірнісний смисл. Теорема Ліндеберга. ЦГТ для послідовності серій. ЦГТ для однаково розподілених випадкових величин. Теорема Ляпунова, як наслідок із теореми Ліндерберга. Гратчасті розподіли. Локальна гранична теорема для гратчастих розподілів. Поняття про граничні закони відмінні від нормального, безмежно подільні, стійкі закони.

### **Модуль 3.**

**Тема 1.** Вибірковий метод в статистиці. Вибірка, варіаційний ряд, емпірична функція розподілу. Теорема Глівенко як застосування закону великих чисел. Теорема Колмогорова (без доведення). Основні вибіркові характеристики, асимптотична нормальність вибіркових моментів.

**Тема 2.** Статистичні оцінки параметрів розподілу. Незміщеність оцінки. Спроможність оцінки. Ефективність оцінки, нерівність Крамера-Рао. Метод моментів, метод максимальної правдоподібності одержання оцінок.

**Тема 3.** Інтервальне оцінювання параметрів розподілу. Довірчі інтервали для ймовірності, довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу.

**Тема 4.** Перевірка статистичних гіпотез, критична область, рівень значущості. Критерії для перевірки відповідності результатів дослідів із теоретичними гіпотезами про вигляд розподілу: критерій Колмогорова, критерій (Пірсона). Перевірка гіпотез про ймовірності. Перевірка гіпотез про рівність математичних сподівань двох нормальних випадкових величин. Перевірка гіпотез про рівність дисперсій двох нормальних випадкових величин. Перевірка гіпотез про однорідність вибірок, про незалежність випадкових величин. Байєсівський підхід до розрізнення гіпотез.

### **Модуль 4.**

**Тема 1.** Кореляційний і регресійний аналізи. Вибірковий коефіцієнт кореляції, лінійна регресія. Метод найменших квадратів знаходження параметрів рівняння регресії. Нелінійна регресія. Поняття про множинну регресію.

**Тема 2.** Ланцюги Маркова. Однорідні ланцюги, ергодична теорема Маркова.

**Тема 3.** Випадкові процеси, скінченно-вимірні розподіли випадкового процесу, моментні функції, класифікація процесів. Процеси з незалежними приростами, процеси Пуасона, Вінерівський процес. Стаціонарні процеси. Визначення марковського процесу з неперервним часом. Рівняння Колмогорова, застосування до задач масового обслуговування.

## 6.2 Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин				
	Форма навчання: <b>денна</b>				
	Усього	у тому числі			
лекції		практичні	лабораторні	індивідуальна робота	самостійна робота
<b>3-й семестр</b>					
<b>Модуль 1</b>					
<b>Тема 1.</b> Предмет і методи теорії ймовірностей. Використання ймовірнісних методів в науці, техніці, економіці. Стохастичний експеримент, випадкові події, простір елементарних подій, алгебра і $\sigma$ -алгебра подій Частота настання події, статистичне означення ймовірності. Класичне означення ймовірності. Геометричні ймовірності.	14	4	4		6
<b>Тема 2.</b> Аксиоматичне означення ймовірності (аксіоми Колмогорова), наслідки із аксіом. Ймовірнісний простір. Теорема про неперервність ймовірності.	10	2	2		6
<b>Тема 3.</b> Умовні ймовірності. Теорема множення ймовірностей. Залежні і незалежні події. Формула повної ймовірності. Формули Байеса.	12	2	4		6
<b>Тема 4.</b> Схема Бернуллі, найімовірніше число настання події. Граничні теореми в схемі Бернуллі: теорема Пуасона, локальна гранична теорема, інтегральна гранична теорема Лапласа. Наслідки. Поняття про оцінку відхилень частоти від ймовірності.	12	4	2		6
<b>Тема 5.</b> Випадкові величини як вимірні функції на просторі елементарних подій, їх розподіли. Функція розподілу випадкової величини, властивості. Дискретні і неперервні випадкові величини, щільність розподілу випадкової величини. Три типи розподілів. Конкретні розподіли випадкових величин: біномний розподіл, розподіл Пуасона, геометричний розподіл, гіпергеометричний, показниковий, рівномірний і нормальний розподіли. Розподіли деяких функцій від випадкових величин.	8	2	2		4
<b>Тема 6.</b> Випадковий вектор. Функція розподілу випадкового вектора, щільність розподілу випадкового вектора. Многовимірні дискретні випадкові величини.	8	2	2		4

Незалежні випадкові величини. Розподіл функцій від векторних величин. Суми випадкових величин, згортка розподілів. Розподіл добутку, частки, випадкових величин. Розподіли , Стьюдента, Фішера.						
<b>Разом за модуль</b>	<b>64</b>	<b>16</b>	<b>16</b>			<b>32</b>
<b>Модуль 2</b>						
<b>Тема 1.</b> Числові характеристики випадкових величин. Математичне сподівання випадкових величин, властивості. Дисперсія випадкової величини. Мода, медіана. Моменти випадкових величин. Нерівність Ляпунова. Нерівність Чебишова. Кореляційна матриця випадкового вектора, коефіцієнт кореляції двох випадкових величин. Умовні розподіли. Умовне математичне сподівання, випадок нормального розподілу.	16	4	4			8
<b>Тема 2.</b> Збіжність послідовності випадкових величин за ймовірністю, з ймовірністю 1, в середньому, за розподілом. Співвідношення між типами збіжностей. Лема Бореля-Кантеллі.	8	2	2			4
<b>Тема 3.</b> Закон великих чисел. Теореми Чебишова, Бернуллі. Нерівність Колмогорова. Посилений закон великих чисел, теорема Бореля.	8	2	2			4
<b>Тема 4.</b> Характеристичні функції, їх властивості. Формули обернення. Граничні теореми для характеристичних функцій. Слаба збіжність розподілів і її еквівалентність збіжності характеристичних функцій.	14	4	4			6
<b>Тема 5.</b> Центральна гранична теорема, умова Ліндерберга її імовірнісний смисл. Теорема Ліндеберга. ЦГТ для послідовності серій. ЦГТ для однаково розподілених випадкових величин. Теорема Ляпунова, як наслідок із теореми Ліндерберга. Гратчасті розподіли. Локальна гранична теорема для гратчастих розподілів. Поняття про граничні закони відмінні від нормального, безмежно подільні, стійкі закони.	10	2	2			6
<b>Разом за модуль</b>	<b>56</b>	<b>14</b>	<b>14</b>			<b>28</b>
<b>Разом за 3-й семестр</b>	<b>120</b>	<b>30</b>	<b>30</b>			<b>60</b>
<b>4-й семестр</b>						
<b>Модуль 3</b>						
<b>Тема 1.</b> Вибірковий метод в статистиці. Вибірка, варіаційний ряд, емпірична функція розподілу. Теорема Глівенко як застосування закону великих чисел. Теорема Колмогорова (без доведення). Основні вибіркові	12	2	4			6

характеристики, асимптотична нормальність вибірових моментів.						
<b>Тема 2.</b> Статистичні оцінки параметрів розподілу. Незсуненість оцінки. Спроможність оцінки. Ефективність оцінки, нерівність Крамера-Рао. Метод моментів, метод максимальної правдоподібності одержання оцінок.	12	4	2			6
<b>Тема 3.</b> Інтервальне оцінювання параметрів розподілу. Довірчі інтервали для ймовірності, довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу.	8	2	2			4
<b>Тема 4.</b> Перевірка статистичних гіпотез, критична область, рівень значущості. Критерії для перевірки відповідності результатів досліду із теоретичними гіпотезами про вигляд розподілу: критерій Колмогорова, критерій згоди (Пірсона). Перевірка гіпотез про ймовірності. Перевірка гіпотез про рівність математичних сподівань двох нормальних випадкових величин. Перевірка гіпотез про рівність дисперсій двох нормальних випадкових величин. Перевірка гіпотез про однорідність вибірок, про незалежність випадкових величин. Байєсівський підхід до розрізнення гіпотез.	16	4	4			8
<b>Разом за модуль</b>	<b>48</b>	<b>12</b>	<b>12</b>			<b>24</b>
<b>Модуль 4</b>						
Тема 16. Кореляційний і регресійний аналізи. Вибірковий коефіцієнт кореляції, лінійна регресія. Метод найменших квадратів знаходження параметрів рівняння регресії. Нелінійна регресія. Поняття про множинну регресію.	16	4	4			8
Тема 17. Ланцюги Маркова. Однорідні ланцюги, ергодична теорема Маркова.	8	2	2			4
Тема 18. Випадкові процеси, скінченно-вимірні розподіли випадкового процесу, моментні функції, класифікація процесів. Процеси з незалежними приростами, процеси Пуассона, Вінерівський процес. Стаціонарні процеси. Визначення марковського процесу з неперервним часом. Рівняння Колмогорова, застосування до задач масового обслуговування.	18	4	4			10
<b>Разом за модуль</b>	<b>42</b>	<b>10</b>	<b>10</b>			<b>22</b>
<b>Разом за 4-й семестр</b>	<b>90</b>	<b>22</b>	<b>22</b>			<b>46</b>
<b>Разом за рік</b>	<b>210</b>	<b>52</b>	<b>52</b>			<b>106</b>

### 6.3 Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
<b>3-й семестр</b>		
1	Предмет і методи теорії ймовірностей. Використання ймовірнісних методів в науці, техніці, економіці. Стохастичний експеримент, випадкові події, простір елементарних подій, алгебра і $\sigma$ -алгебра подій Частота настання події, статистичне означення ймовірності. Класичне означення ймовірності. Геометричні ймовірності.	4
2	Аксиоматичне означення ймовірності (аксіоми Колмогорова), наслідки із аксіом. Ймовірнісний простір. Теорема про неперервність ймовірності.	2
3	Умовні ймовірності. Теорема множення ймовірностей. Залежні і незалежні події. Формула повної ймовірності. Формули Байєса.	4
4	Схема Бернуллі, найімовірніше число настання події. Граничні теореми в схемі Бернуллі: теорема Пуасона, локальна гранична теорема, інтегральна гранична теорема Лапласа. Наслідки. Поняття про оцінки відхилень частоти від ймовірності.	2
5	Випадкові величини як вимірні функції на просторі елементарних подій, їх розподіли. Функція розподілу випадкової величини, властивості. Дискретні і неперервні випадкові величини, щільність розподілу випадкової величини. Три типи розподілів. Конкретні розподіли випадкових величин: біномний розподіл, розподіл Пуасона, геометричний розподіл, гіпергеометричний, показниковий, рівномірний і нормальний розподіли. Розподіли деяких функцій від випадкових величин.	2
6	Випадковий вектор. Функція розподілу випадкового вектора, щільність розподілу випадкового вектора. Многовимірні дискретні випадкові величини. Незалежні випадкові величини. Розподіл функцій від векторних величин. Суми випадкових величин, згортка розподілів. Розподіл добутку, частки, випадкових величин. Розподіли $\chi^2$ , Стьюдента, Фішера.	2
7	Числові характеристики випадкових величин. Математичне сподівання випадкових величин, властивості. Дисперсія випадкової величини. Мода, медіана. Моменти випадкових величин. Нерівність Ляпунова. Нерівність Чебишова. Кореляційна матриця випадкового вектора, коефіцієнт кореляції двох випадкових величин. Умовні розподіли. Умовне математичне сподівання, випадок нормального розподілу.	4
8	Збіжність послідовності випадкових величин за ймовірністю, з ймовірністю 1, в середньому, за розподілом. Співвідношення між типами збіжностей. Лема Бореля-Кантеллі.	2
9	Закон великих чисел. Теореми Чебишова, Бернуллі. Нерівність Колмогорова. Посилений закон великих чисел, теорема Бореля.	2
10	Характеристичні функції, їх властивості. Формули обернення. Граничні теореми для характеристичних функцій. Слаба збіжність розподілів і її еквівалентність збіжності характеристичних функцій.	4
11	Центральна гранична теорема, умова Ліндерберга її ймовірнісний смисл. Теорема Ліндеберга. ЦГТ для послідовності серій. ЦГТ для однаково розподілених випадкових величин. Теорема Ляпунова, як	2

	наслідок із теореми Ліндерберга. Гратчасті розподіли. Локальна гранична теорема для гратчастих розподілів. Поняття про граничні закони відмінні від нормального, безмежно подільні, стійкі закони.	
<b>4-й семестр</b>		
12	Вибірковий метод в статистиці. Вибірка, варіаційний ряд, емпірична функція розподілу. Теорема Глівенко як застосування закону великих чисел. Теорема Колмогорова (без доведення). Основні вибіркові характеристики, асимптотична нормальність вибіркових моментів.	4
13	Статистичні оцінки параметрів розподілу. Незсуненість оцінки. Спроможність оцінки. Ефективність оцінки, нерівність Крамера-Рао. Метод моментів, метод максимальної правдоподібності одержання оцінок.	2
14	Інтервальне оцінювання параметрів розподілу. Довірчі інтервали для ймовірності, довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу.	2
15	Перевірка статистичних гіпотез, критична область, рівень значущості. Критерії для перевірки відповідності результатів досліду із теоретичними гіпотезами про вигляд розподілу: критерій Колмогорова, критерій згоди (Пірсона). Перевірка гіпотез про ймовірності. Перевірка гіпотез про рівність математичних сподівань двох нормальних випадкових величин. Перевірка гіпотез про рівність дисперсій двох нормальних випадкових величин. Перевірка гіпотез про однорідність вибірок, про незалежність випадкових величин. Байєсівський підхід до розрізнення гіпотез.	4
16	Кореляційний і регресійний аналізи. Вибірковий коефіцієнт кореляції, лінійна регресія. Метод найменших квадратів знаходження параметрів рівняння регресії. Нелінійна регресія. Поняття про множинну регресію.	4
17	Ланцюги Маркова. Однорідні ланцюги, ергодична теорема Маркова.	2
18	Випадкові процеси, скінченно-вимірні розподіли випадкового процесу, моментні функції, класифікація процесів. Процеси з незалежними приростами, процеси Пуасона, Вінерівський процес. Стаціонарні процеси. Визначення марковського процесу з неперервним часом. Рівняння Колмогорова, застосування до задач масового обслуговування.	4
	<b>Разом</b>	<b>52</b>

#### 5.4 Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
<b>3-й семестр</b>		
1	Предмет і методи теорії ймовірностей. Використання ймовірнісних методів в науці, техніці, економіці. Стохастичний експеримент, випадкові події, простір елементарних подій, алгебра і $\sigma$ -алгебра подій Частота настання події, статистичне означення ймовірності. Класичне означення ймовірності. Геометричні ймовірності.	6
2	Аксіоматичне означення ймовірності (аксіоми Колмогорова), наслідки із аксіом. Ймовірнісний простір. Теорема про неперервність ймовірності.	6

3	Умовні ймовірності. Теорема множення ймовірностей. Залежні і незалежні події. Формула повної ймовірності. Формули Байєса.	6
4	Схема Бернуллі, найімовірніше число настання події. Граничні теореми в схемі Бернуллі: теорема Пуасона, локальна гранична теорема, інтегральна гранична теорема Лапласа. Наслідки. Поняття про оцінки відхилень частоти від ймовірності.	6
5	Випадкові величини як вимірні функції на просторі елементарних подій, їх розподіли. Функція розподілу випадкової величини, властивості. Дискретні і неперервні випадкові величини, щільність розподілу випадкової величини. Три типи розподілів. Конкретні розподіли випадкових величин: біномний розподіл, розподіл Пуасона, геометричний розподіл, гіпергеометричний, показниковий, рівномірний і нормальний розподіли. Розподіли деяких функцій від випадкових величин.	4
6	Випадковий вектор. Функція розподілу випадкового вектора, щільність розподілу випадкового вектора. Многовимірні дискретні випадкові величини. Незалежні випадкові величини. Розподіл функцій від векторних величин. Суми випадкових величин, згортка розподілів. Розподіл добутку, частки, випадкових величин. Розподіли , Стюдента, Фішера.	4
7	Числові характеристики випадкових величин. Математичне сподівання випадкових величин, властивості. Дисперсія випадкової величини. Мода, медіана. Моменти випадкових величин. Нерівність Ляпунова. Нерівність Чебишова. Кореляційна матриця випадкового вектора, коефіцієнт кореляції двох випадкових величин. Умовні розподіли. Умовне математичне сподівання, випадок нормального розподілу.	8
8	Збіжність послідовності випадкових величин за ймовірністю, з ймовірністю 1, в середньому, за розподілом. Співвідношення між типами збіжностей. Лема Бореля-Кантеллі.	4
9	Закон великих чисел. Теореми Чебишова, Бернуллі. Нерівність Колмогорова. Посилений закон великих чисел, теорема Бореля.	4
10	Характеристичні функції, їх властивості. Формули обернення. Граничні теореми для характеристичних функцій. Слаба збіжність розподілів і її еквівалентність збіжності характеристичних функцій.	6
11	Центральна гранична теорема, умова Ліндерберга її імовірнісний смисл. Теорема Ліндеберга. ЦГТ для послідовності серій. ЦГТ для однаково розподілених випадкових величин. Теорема Ляпунова, як наслідок із теореми Ліндерберга. Гратчасті розподіли. Локальна гранична теорема для гратчастих розподілів. Поняття про граничні закони відмінні від нормального, безмежно подільні, стійкі закони.	6
<b>4-й семестр</b>		
12	Вибірковий метод в статистиці. Вибірка, варіаційний ряд, емпірична функція розподілу. Теорема Глівенко як застосування закону великих чисел. Теорема Колмогорова (без доведення). Основні вибіркові характеристики, асимптотична нормальність вибіркових моментів.	6
13	Статистичні оцінки параметрів розподілу. Незсуненість оцінки. Спроможність оцінки. Ефективність оцінки, нерівність Крамера-Рао. Метод моментів, метод максимальної правдоподібності одержання оцінок.	6

14	Інтервальне оцінювання параметрів розподілу. Довірчі інтервали для ймовірності, довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу.	4
15	Перевірка статистичних гіпотез, критична область, рівень значущості. Критерії для перевірки відповідності результатів дослідів із теоретичними гіпотезами про вигляд розподілу: критерій Колмогорова, критерій згоди (Пірсона). Перевірка гіпотез про ймовірності. Перевірка гіпотез про рівність математичних сподівань двох нормальних випадкових величин. Перевірка гіпотез про рівність дисперсій двох нормальних випадкових величин. Перевірка гіпотез про однорідність вибірок, про незалежність випадкових величин. Байєсівський підхід до розрізнення гіпотез.	8
16	Кореляційний і регресійний аналізи. Вибірковий коефіцієнт кореляції, лінійна регресія. Метод найменших квадратів знаходження параметрів рівняння регресії. Нелінійна регресія. Поняття про множинну регресію.	8
17	Ланцюги Маркова. Однорідні ланцюги, ергодична теорема Маркова.	4
18	Випадкові процеси, скінченно-вимірні розподіли випадкового процесу, моментні функції, класифікація процесів. Процеси з незалежними приростами, процеси Пуасона, Вінерівський процес. Стаціонарні процеси. Визначення марковського процесу з неперервним часом. Рівняння Колмогорова, застосування до задач масового обслуговування.	10
	<b>Разом</b>	<b>106</b>

## **6. ІНСТРУМЕНТИ, ОБЛАДНАННЯ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ, ВИКОРИСТАННЯ ЯКИХ ПЕРЕДБАЧАЄ НАВЧАЛЬНА ДИСЦИПЛІНА**

**Технічні засоби** – персональні комп'ютери, мультимедійний проєктор.

**Програмне забезпечення** – операційна система, сервіс Google Meet, система електронного навчання Moodle.

## **7. РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ**

### **Основна література**

1. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика. Київ: ЦУЛ, 2002. 448 с.
2. Вища математика: Модульна технологія навчання : У 4 ч. : навч. посіб. У Ч. 4. Теорія ймовірностей і математична статистика / В. П. Денисюк, В. М. Бобков, Т. А. Погребецька, В. К. Репета. 2-ге вид. доопрац. К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк». 2009. 256 с.
3. Зайцев Є. П. Теорія ймовірностей і математична статистика. Київ.: Алерта, 2013. 440 с.
4. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач. Київ.: Центр учбової літератури, 2007. 575 с.
5. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика. Київ: ВПЦ Київський університет, 2007. 494 с.
6. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика. Київ: Знання, 2007. 556 с.

7. Слюсарчук П. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Ужгород: Карпати, 2005. 180 с.
8. Чорней Р. К. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. Київ, 2006. 328 с.
9. Синявська О.О. Методичні вказівки та варіанти типово-розрахункових робіт з теорії ймовірностей для студентів математичного факультету. Ужгород: ДВНЗ “УжНУ”, 2019. 58 с.

### **Допоміжна література**

1. Дороговцев П. Л., Сільвестров Д. С., Скороход А. В., Ядренко М. Й. Теорія ймовірностей (збірник задач). К.: Вища шк., 1977.
2. Скороход А. В. Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів. К.: Вища шк., 1975.
3. Сливка-Тилишак Г. І. Теорії ймовірностей і математична статистика: Методичний посібник. Ужгород, 2011.
4. Слюсарчук П. В., Поляк І. Й. Методичні вказівки до самостійної роботи студентів з теорії ймовірностей та математичної статистики для студентів математичного факультету. Ужгород, 2005.
5. Найко Д. А. Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. / Д.А. Найко, О. Ф. Шевчук. Вінниця: ВНАУ, 2020. 382 с.

### **Інформаційні ресурси в мережі Інтернет**

1. <http://www.nbuv.gov.ua> – Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського.