

ІНТЕГРОВНІ ТИПИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ДВОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ

Означення 1. *Інтегровними типами* називають диференціальні рівняння з частинними похідними (ДРЧП), розв'язки яких можна отримати в явному вигляді (у цьому випадку кажуть, що рівняння «інтегруються в квадратурах»).

До інтегровних типів ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними відносяться лише деякі простіші рівняння гіперболічного та параболічного типів. Рівняння еліптичного типу не інтегруються в квадратурах: їх розв'язки будуються з застосуванням різних наближених методів.

Для побудови розв'язків ДРЧП, що належать до інтегровних типів (зокрема лінійних), найчастіше використовують так званий *метод характеристик*, який полягає в попередньому зведенні вихідного ДРЧП до канонічної форми (тобто отриманні шляхом введення нових незалежних змінних найпростішого еквівалентного заданому вигляду рівняння), з метою інтегрування канонічної форми із подальшим поверненням до старих незалежних змінних у одержаному загальному розв'язку. Деякі простіші ДРЧП доволі легко інтегруються і без зведення до канонічної форми, проте для більшості інтегровних типів такий спосіб розв'язування є значно складнішим, ніж через перехід до канонічного вигляду.

Загальний розв'язок ДРЧП другого порядку із двома незалежними змінними обов'язково повинен містити дві довільні функції (за аналогією з двома довільними сталими для звичайних ДР другого порядку), аргументами яких є характеристики вихідного рівняння. Оскільки, як відомо, ДРЧП гіперболічного типу має дві незалежні дійсні характеристики, а ДРЧП параболічного типу – одну дійсну характеристику, то довільні функції в загальному розв'язку у випадку ДРЧП гіперболічного типу будуть залежними від різних аргументів, а у випадку ДРЧП параболічного типу – від одного аргумента.

Основними методами, які застосовуються для інтегрування канонічних форм ДРЧП другого порядку, є метод виділення частинної похідної та метод підстановки, причому останній найчастіше застосовують із метою пониження порядку розглядуваного ДРЧП. Якщо при цьому отримуємо лінійне ДРЧП першого порядку, його можна зінтегрувати із урахуванням формули загального розв'язку звичайного лінійного ДР першого порядку

$$y' + p(x)y = q(x),$$

яка має вигляд

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right], \quad (1.1)$$

де C – довільна стала.

Нижче розглянемо деякі поширені інтегровні типи ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними, заданих у канонічній формі.

I. Випадок рівнянь гіперболічного типу. Розглянемо лінійне ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними гіперболічного типу, задане в першій канонічній формі

$$p_0(x, y)U_{xy} + p_1(x, y)U_x + p_2(x, y)U_y + p_3(x, y)U(x, y) = p_4(x, y), \quad (1.2)$$

де $p_0(x, y)$, $p_1(x, y)$, $p_2(x, y)$, $p_3(x, y)$, $p_4(x, y)$ – відомі неперервні в області задання рівняння функції, причому $p_0(x, y) \neq 0$.

ДРЧП (1.2) інтегрується в квадратурах зокрема в наступних випадках.

1. Якщо $p_1 = p_2 = p_3 \equiv 0$, то з (1.2) одержимо

$$U_{xy}(x, y) = q(x, y), \quad q(x, y) = \frac{p_4(x, y)}{p_0(x, y)}. \quad (1.3)$$

Загальний розв'язок рівняння (1.3) знаходиться шляхом двократного інтегрування:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_x}{\partial y} = q(x, y) &\Rightarrow U_x = \int q(x, y) dy + \bar{f}_1(x); \\ \frac{\partial U}{\partial x} = \int q(x, y) dy + \bar{f}_1(x) &\Rightarrow U = \iint q(x, y) dy dx + \int \bar{f}_1(x) dx + f_2(y). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ввівши задля спрощення позначення $\int \bar{f}_1(x) dx = f_1(x)$, із (1.4) одержимо загальний розв'язок ДРЧП (1.3) у вигляді

$$U(x, y) = \iint q(x, y) dy dx + f_1(x) + f_2(y),$$

де $f_1(x)$, $f_2(y)$ – довільні функції аргументів x та y відповідно.

2. Якщо $p_2 = p_3 \equiv 0$, то з (1.2) одержимо

$$U_{xy} + p(x, y)U_x(x, y) = q(x, y), \quad p(x, y) = \frac{p_1(x, y)}{p_0(x, y)} \quad q(x, y) = \frac{p_4(x, y)}{p_0(x, y)}. \quad (1.5)$$

Введемо в (1.5) підстановку $U_x = Z(x, y)$. Тоді відносно нової невідомої функції $Z(x, y)$ дістанемо лінійне ДРЧП першого порядку

$$Z_y + p(x, y)Z = q(x, y). \quad (1.6)$$

Застосувавши до рівняння (1.6) формулу (1.1), маємо

$$Z(x, y) = e^{-\int p(x, y) dy} \cdot \left[f_1(x) + \int q(x, y) e^{\int p(x, y) dy} dy \right].$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (1.5) знаходиться шляхом інтегрування знайденої функції $Z(x, y)$ за змінною x :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = Z(x, y) \Rightarrow U = \int Z(x, y) dx + f_2(y).$$

Зауважимо, що у випадку $p(x, y) \equiv p(y)$ ліва частина рівняння (1.5) подається у вигляді частинної похідної

$$\frac{\partial}{\partial x} [U_y + p(y)U] = q(x, y),$$

звідки шляхом інтегрування за змінною x отримуємо лінійне ДРЧП першого порядку

$$U_y + p(y)U = \int q(x, y) dx + f_1(y),$$

із якого шуканий розв'язок $U(x, y)$ знаходиться на підставі формули (1.1).

3. Якщо $p_1 = p_3 \equiv 0$, то з (1.2) одержимо

$$U_{xy} + p(x, y)U_y(x, y) = q(x, y), \quad p(x, y) = \frac{p_2(x, y)}{p_0(x, y)} \quad q(x, y) = \frac{p_4(x, y)}{p_0(x, y)}. \quad (1.7)$$

Введемо в (1.7) підстановку $U_y = Z(x, y)$. Тоді відносно нової невідомої функції $Z(x, y)$ дістанемо лінійне ДРЧП першого порядку

$$Z_x + p(x, y)Z = q(x, y). \quad (1.8)$$

Застосувавши до рівняння (1.8) формулу (1.1), маємо

$$Z(x, y) = e^{-\int p(x, y) dx} \cdot \left[f_1(y) + \int q(x, y) e^{\int p(x, y) dx} dx \right].$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (1.8) знаходиться шляхом інтегрування знайденої функції $Z(x, y)$ за змінною y :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Z(x, y) \Rightarrow U = \int Z(x, y) dy + f_2(x).$$

Зауважимо, що у випадку $p(x, y) \equiv p(x)$ ліва частина рівняння (1.7) подається у вигляді частинної похідної

$$\frac{\partial}{\partial y} [U_x + p(x)U] = q(x, y),$$

звідки шляхом інтегрування за змінною y отримуємо лінійне ДРЧП першого порядку

$$U_x + p(x)U = \int q(x, y) dy + f_1(x),$$

із якого шуканий розв'язок $U(x, y)$ знаходиться на підставі формули (1.1).

4. Якщо для коефіцієнтів ДРЧП (1.2) виконуються умови

$$\frac{\partial p_0(x, y)}{\partial y} = p_1(x, y), \quad \frac{\partial p_2(x, y)}{\partial y} = p_3(x, y),$$

тоді ліва частина рівняння подається у вигляді частинної похідної

$$\frac{\partial}{\partial y} [p_0(x, y)U_x + p_2(x, y)U] = p_4(x, y), \quad (1.9)$$

звідки шляхом інтегрування за змінною y отримуємо лінійне ДРЧП першого порядку

$$p_0(x, y)U_x + p_2(x, y)U = \int p_4(x, y) dy + f_1(x).$$

Подавши останню рівність у вигляді

$$U_x + \frac{p_2(x, y)}{p_0(x, y)} U = \frac{\int p_4(x, y) dy + f_1(x)}{p_0(x, y)},$$

на підставі формули (1.1) знаходимо шуканий загальний розв'язок ДРЧП (1.9)

$$U(x, y) = e^{-\int \frac{p_2(x, y)}{p_0(x, y)} dx} \cdot \left[f_2(y) + \int \frac{\int p_4(x, y) dy + f_1(x)}{p_0(x, y)} \cdot e^{\int \frac{p_2(x, y)}{p_0(x, y)} dx} dx \right].$$

5. Якщо для коефіцієнтів ДРЧП (1.2) виконуються умови

$$\frac{\partial p_0(x, y)}{\partial x} = p_2(x, y), \quad \frac{\partial p_1(x, y)}{\partial x} = p_3(x, y),$$

тоді ліва частина рівняння аналогічно до попереднього випадку подається у вигляді частинної похідної

$$\frac{\partial}{\partial x} [p_0(x, y)U_y + p_1(x, y)U] = p_4(x, y), \quad (1.10)$$

звідки шляхом інтегрування за змінною x отримуємо лінійне ДРЧП першого порядку

$$p_0(x, y)U_y + p_1(x, y)U = \int p_4(x, y)dx + f_1(y).$$

Подавши останню рівність у вигляді

$$U_y + \frac{p_1(x, y)}{p_0(x, y)}U = \frac{\int p_4(x, y)dx + f_1(y)}{p_0(x, y)},$$

на підставі формули (1.1) знаходимо шуканий загальний розв'язок ДРЧП (1.10)

$$U(x, y) = e^{-\int \frac{p_1(x, y)}{p_0(x, y)} dy} \cdot \left[f_2(x) + \int \frac{\int p_4(x, y)dx + f_1(y)}{p_0(x, y)} \cdot e^{\int \frac{p_1(x, y)}{p_0(x, y)} dy} dy \right].$$

II. Випадок рівнянь параболічного типу. Розглянемо лінійне ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними параболічного типу, задане в канонічній формі, яка містить тільки однойменні похідні – наприклад, за змінною x :

$$p_0(x, y)U_{xx} + p_1(x, y)U_x + p_2(x, y)U(x, y) = p_3(x, y), \quad (1.11)$$

де $p_0(x, y)$, $p_1(x, y)$, $p_2(x, y)$, $p_3(x, y)$ – відомі неперервні в області задання рівняння функції, причому $p_0(x, y) \neq 0$.

ДРЧП (1.11) інтегрується в квадратурах зокрема в наступних випадках.

1. Якщо $p_1 = p_2 \equiv 0$, то з (1.11) одержимо

$$U_{xx}(x, y) = q(x, y), \quad q(x, y) = \frac{p_3(x, y)}{p_0(x, y)}. \quad (1.12)$$

Загальний розв'язок рівняння (1.12) знаходиться шляхом двократного інтегрування аналогічно до рівняння (1.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_x}{\partial x} = q(x, y) &\Rightarrow U_x = \int q(x, y)dx + f_1(y); \\ \frac{\partial U}{\partial x} = \int q(x, y)dx + f_1(y) &\Rightarrow U = \iint q(x, y)dx^2 + \int f_1(y)dx + f_2(y), \end{aligned}$$

звідки одержуємо загальний розв'язок ДРЧП (1.12) у вигляді

$$U(x, y) = \iint q(x, y)dx^2 + xf_1(y) + f_2(y),$$

де $f_1(y)$, $f_2(y)$ – довільні функції аргумента y .

2. Якщо $p_2 \equiv 0$, то з (1.11) одержимо

$$U_{xx} + p(x, y)U_x(x, y) = q(x, y), \quad p(x, y) = \frac{p_1(x, y)}{p_0(x, y)} \quad q(x, y) = \frac{p_3(x, y)}{p_0(x, y)}. \quad (1.13)$$

Введемо в (1.13) підстановку $U_x = Z(x, y)$. Тоді відносно нової невідомої функції $Z(x, y)$ дістанемо лінійне ДРЧП першого порядку

$$Z_x + p(x, y)Z = q(x, y). \quad (1.14)$$

Застосувавши до рівняння (1.14) формулу (1.1), маємо

$$Z(x, y) = e^{-\int p(x, y) dx} \cdot \left[f_1(y) + \int q(x, y) e^{\int p(x, y) dx} dx \right].$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (1.5) знаходиться шляхом інтегрування знайденої функції $Z(x, y)$ за змінною x :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = Z(x, y) \Rightarrow U = \int Z(x, y) dx + f_2(y).$$

Зауважимо, що у випадку $p(x, y) \equiv p(y)$ ліва частина рівняння (1.13) подається у вигляді частинної похідної

$$\frac{\partial}{\partial x} [U_x + p(y)U] = q(x, y),$$

звідки шляхом інтегрування за змінною x отримуємо лінійне ДРЧП першого порядку

$$U_x + p(y)U = \int q(x, y) dx + f_1(y),$$

із якого шуканий розв'язок $U(x, y)$ знаходиться на підставі формули (1.1).

3. Якщо коефіцієнт $p_1(x, y)$ ДРЧП (1.11) допускає подання

$$p_1(x, y) = \bar{p}_1(x, y) + \bar{\bar{p}}_1(x, y)$$

із виконанням умов

$$\frac{\partial p_0(x, y)}{\partial x} = \bar{p}_1(x, y), \quad \frac{\partial \bar{\bar{p}}_1(x, y)}{\partial x} = p_2(x, y),$$

тоді ліва частина рівняння подається у вигляді частинної похідної

$$\frac{\partial}{\partial x} [p_0(x, y)U_x + \bar{\bar{p}}_1(x, y)U] = p_3(x, y), \quad (1.15)$$

звідки шляхом інтегрування за змінною x отримуємо лінійне ДРЧП першого порядку

$$p_0(x, y)U_x + \bar{\bar{p}}_1(x, y)U = \int p_3(x, y) dx + f_1(y).$$

Подавши останню рівність у вигляді

$$U_x + \frac{\bar{\bar{p}}_1(x, y)}{p_0(x, y)}U = \frac{\int p_3(x, y) dx + f_1(y)}{p_0(x, y)},$$

на підставі формули (1.1) знаходимо шуканий загальний розв'язок ДРЧП (1.15)

$$U(x, y) = e^{-\int \frac{\bar{\bar{p}}_1(x, y)}{p_0(x, y)} dx} \cdot \left[f_2(y) + \int \frac{\int p_3(x, y) dx + f_1(y)}{p_0(x, y)} \cdot e^{\int \frac{\bar{\bar{p}}_1(x, y)}{p_0(x, y)} dx} dx \right].$$

Зазначимо, що аналогічні випадки можна виділити і для ДРЧП типу (1.11), яке містить похідні тільки за змінною y :

$$p_0(x, y)U_{yy} + p_1(x, y)U_y + p_2(x, y)U(x, y) = p_3(x, y).$$

III. Задачі Коші та Гурса. Як уже згадувалося вище, загальний розв'язок ДРЧП другого порядку із двома незалежними змінними обов'язково має містити дві довільні функції f_1 та f_2 , аргументами яких є характеристики вихідного рівняння. Ці функції можна до визначити, якщо до рівняння додаються **початкові умови**. На відміну від звичайних диференціальних рівнянь, для яких початкові умови задаються в певній

точці, у випадку ДРЧП з двома незалежними змінними носієм початкових умов є деяка крива на площині. Наприклад, для рівнянь (1.2) або (1.11) початкові умови, задані на кривій $x = \alpha(y)$ або $y = \beta(x)$, запишуться у вигляді

$$U[\alpha(y), y] = \varphi(y), \quad U_x[\alpha(y), y] = \psi(y) \quad (1.16)$$

або

$$U[x, \beta(x)] = \varphi(x), \quad U_y[x, \beta(x)] = \psi(x). \quad (1.17)$$

Означення 2. Задача знаходження такого розв'язку ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними, який справджує початкові умови (1.16) або (1.17), носієм яких є крива, що не входить до сім'ї характеристик заданого ДРЧП, називається *задачею Коші* для ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними.

Означення 3. Задачу знаходження такого розв'язку ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними, який справджує початкові умови (1.16) або (1.17), носієм яких є крива, що входить до сім'ї характеристик заданого ДРЧП, будемо називати *характеристичною задачею Коші* для ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними.

Означення 4. Задачу знаходження такого розв'язку ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними гіперболічного типу, який справджує початкові умови вигляду

$$U[\alpha(y), y] = \varphi(y), \quad U[x, \beta(x)] = \psi(x),$$

носіями яких є дві характеристики $x = \alpha(y)$ та $y = \beta(x)$ заданого ДРЧП, що мають спільну точку перетину, називають *задачею Гурса* для ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними гіперболічного типу.

Щоб розв'язати задачу Коші для ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними за початкових умов вигляду (1.16) або (1.17), треба зінтегрувати задане ДРЧП і підкласти знайдений загальний розв'язок у відповідні початкові умови, після чого отримуємо систему двох рівнянь для визначення довільних функцій f_1 та f_2 .

Розв'язок задачі Коші одержується шляхом підстановки визначених зі згаданої системи функцій f_1 та f_2 у загальний розв'язок вихідного ДРЧП.

Задача Коші, початкові умови якої задані не на характеристиці розглядуваного ДРЧП, завжди має єдиний розв'язок. Натомість характеристична задача Коші може мати безліч розв'язків або взагалі не мати розв'язку.

Джерела:

- [1] Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – С. 45-47.
- [2] Перестюк М. О., Маринець В. В., Рего В. Л. Збірник задач з математичної фізики. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – С. 30-41.