

## КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

### 1. Крайові задачі для прямокутних областей. Метод відокремлення змінних

**Приклад 1.1.** Знайти положення рівноваги однорідної квадратної мембрани зі стороною довжини  $a$ , якщо край мембрани  $x = 0$  нерухомо закріплений, краї  $y = 0$  та  $y = a$  вільні, а на краї  $x = a$  задане відхилення  $\mu(y) = Py^2(y - a)^2$ , де  $P = \text{const} \neq 0$ .

**Розв'язання.** Математична модель задачі: в області  $\mathbf{D} = \{(x, y) \mid 0 < x, y < a\}$  знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$\Delta U(x, y) \equiv U_{xx} + U_{yy} = 0, \quad (1.1)$$

який на краях мембрани справджує крайові умови

$$\begin{aligned} U(0, y) = 0, \quad U(a, y) = Py^2(y - a)^2, \quad 0 \leq y \leq a; \\ U_y(x, 0) = 0, \quad U_y(x, a) = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Зауважимо, що крайові умови (1.2) є узгодженими, оскільки  $\mu'(0) = \mu'(a) = 0$ . Отже, для розв'язання задачі (1.1)-(1.2) застосовний метод відокремлення змінних. Згідно з алгоритмом цього методу розв'язок шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$U(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \neq 0, \quad (1.3)$$

кожна з яких знаходиться окремо з урахуванням рівняння (1.1) та крайових умов (1.2). Підставивши (1.3) у рівняння Лапласа (1.1), одержимо:

$$X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = 0 \Rightarrow -X''(x) \cdot Y(y) = X(x) \cdot Y''(y).$$

Відокремивши змінні шляхом ділення лівої та правої частин останньої рівності на величину  $X(x) \cdot Y(y) \neq 0$ , маємо

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Одержана рівність виконується для всіх  $(x, y) \in \mathbf{D}$  тільки тоді, коли

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda = \text{const},$$

звідки маємо

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \quad Y(y) \neq 0; \quad (1.4)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0. \quad (1.5)$$

Підставивши (1.3) в однорідні крайові умови задачі (1.1)-(1.2), одержимо

$$X(x) \cdot Y'(0) = 0, \quad X(x) \cdot Y'(a) = 0,$$

звідки, враховуючи, що  $X(x) \neq 0$ , маємо

$$Y'(0) = 0, \quad Y'(a) = 0. \quad (1.6)$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (1.4)-(1.6). Для цього зауважимо, що характеристичне рівняння для ДР зі сталими коефіцієнтами (1.4)

$$k^2 - \lambda = 0$$

залежно від значення параметра  $\lambda$  може мати дійсні різні, кратні або комплексні корені. Тому для повного дослідження слід розглянути три випадки.

**1.** Нехай  $\lambda > 0$ . Тоді  $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$  і загальний розв'язок рівняння (1.4) запишеться у вигляді  $Y(y) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}y} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}y}$ . Підставивши цей розв'язок у крайові умови (1.6), одержимо лінійну однорідну систему відносно невідомих сталих  $C_1, C_2$ :

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(C_1 - C_2) = 0; \\ \sqrt{\lambda}(C_1 e^{\sqrt{\lambda}a} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda}a}) = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи  $\Delta = -2\lambda \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}a \neq 0$ , оскільки  $\sqrt{\lambda}a > 0$ . Отже,  $C_1 = C_2 = 0$ , а тому  $Y(y) \equiv 0$  і у випадку  $\lambda > 0$  власних значень не існує.

**2.** Нехай  $\lambda = 0$ . Тоді  $k_{1,2} = 0$ ,  $Y(y) = C_3 y + C_4$  і з крайових умов (1.6) одержимо:

$$\begin{cases} C_3 = 0; \\ C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки  $C_3 = 0$ ,  $C_4$  – довільна стала. Отже, нетривіальний розв'язок існує при  $C_4 \neq 0$ , а тому  $\lambda = 0$  є власним значенням, якому відповідає власна функція  $Y(y) = C_4$ .

**3.** При  $\lambda < 0$   $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}i$  і загальний розв'язок рівняння (1.4) запишеться у вигляді  $Y(y) = C_5 \cos \sqrt{-\lambda}y + C_6 \sin \sqrt{-\lambda}y$ . Із крайових умов (1.6) одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}C_6 = 0; \\ \sqrt{-\lambda}(C_6 \cos \sqrt{-\lambda}a - C_5 \sin \sqrt{-\lambda}a) = 0, \end{cases}$$

звідки  $C_6 = 0$  і  $-\sqrt{-\lambda}C_5 \sin \sqrt{-\lambda}a = 0$ . Отже, нетривіальний розв'язок задачі (1.4)-(1.6) існує тільки для тих значень параметра  $\lambda$ , які є розв'язками тригонометричного

рівняння  $\sin \sqrt{-\lambda}a = 0$ , звідки  $\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$ , а відповідні власні функції матимуть

вигляд  $Y_n(y) = C_5 \cos \frac{\pi n}{a} y$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Об'єднавши випадки  $\lambda = 0$  і  $\lambda < 0$ , і взявши для визначеності  $C_4 = C_5 = 1$ , одержимо систему власних значень і власних функцій ЗШЛ (1.4)-(1.6):

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \quad Y_n(y) = \cos \frac{\pi n}{a} y, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (1.7)$$

Підставивши знайдені власні значення в (1.5), отримаємо рівняння для визначення функцій  $X(x)$

$$X_n''(x) - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 X_n(x) = 0, \quad n = \overline{0, \infty},$$

загальний розв'язок якого має різний вигляд для випадків  $n = 0$  та  $n > 0$ :

$$n = 0 \Rightarrow X_0(x) = A_0x + B_0;$$

$$n > 0 \Rightarrow X_n(x) = A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{a} x + B_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} x,$$

де  $A_n, B_n, n = \overline{0, \infty}$  – довільні сталі.

Згідно з (1.3) функції

$$U_0(x, y) = X_0(x) \cdot Y_0(y) = A_0x + B_0,$$

$$U_n(x, y) = \left( A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{a} x + B_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} x \right) \cos \frac{\pi n}{a} y, \quad n \in \mathbb{N},$$

є частинними розв'язками рівняння Лапласа (1.1), що справджують однорідні крайові умови з (1.2). Тоді загальний розв'язок рівняння Лапласа, що справджує однорідні крайові умови задачі (1.1)-(1.2), запишеться у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків

$$U(x, y) = A_0x + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{a} x + B_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} x \right) \cos \frac{\pi n}{a} y. \quad (1.8)$$

Визначимо коефіцієнти ряду (1.8) таким чином, щоб він справджував і неоднорідні крайові умови задачі (1.1)-(1.2). Безпосередня підстановка (1.8) у згадані умови дає

$$U(0, y) \equiv B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n}{a} y = 0, \quad (1.9)$$

$$U(a, y) \equiv A_0a + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} \pi n + B_n \operatorname{sh} \pi n) \cos \frac{\pi n}{a} y = Py^2(y-a)^2.$$

Із першого рівняння системи (1.9) очевидно отримуємо

$$B_0 = 0; \quad A_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.10)$$

Для знаходження решти невідомих коефіцієнтів із другого рівняння системи (1.9) розкладемо функцію  $\mu(y) = Py^2(y-a)^2$  у ряд Фур'є по системі власних функцій (1.7) на проміжку  $y \in [0, a]$ :

$$Py^2(y-a)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{\pi n}{a} y, \quad (1.11)$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами

$$\alpha_n = \frac{P \int_0^a \xi^2 (\xi - a)^2 \cos \frac{\pi n}{a} \xi d\xi}{\int_0^a \cos^2 \frac{\pi n}{a} \xi d\xi} = \begin{cases} \frac{Pa^4}{30}, & n = 0, \\ -\frac{24a^4 P}{(\pi n)^4} [(-1)^n + 1], & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Підставивши (1.11) у друге рівняння системи (1.9), з урахуванням (1.10) маємо

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{a} = \frac{Pa^3}{30},$$

$$B_n = \frac{\alpha_n}{\operatorname{sh} \pi n} = -\frac{24a^4 P \cdot [(-1)^n + 1]}{(\pi n)^4 \cdot \operatorname{sh} \pi n} = \begin{cases} 0, & n = 2k - 1, \\ -\frac{3a^4 P}{(\pi k)^4 \cdot \operatorname{sh} 2\pi k}, & n = 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд (1.8), одержимо шуканий розв'язок крайової задачі (1.1)-(1.2).

**Відповідь.**

$$U(x, y) = \frac{Pa^3 x}{30} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3a^4 P}{(\pi k)^4 \cdot \operatorname{sh} 2\pi k} \operatorname{sh} \frac{2\pi k}{a} x \cos \frac{2\pi k}{a} y.$$

**Приклад 1.2.** Зінтегрувати крайову задачу та дати її фізичну інтерпретацію:

$$\begin{aligned} U_{xx} + U_{yy} &= 12y + x^2(x - \pi)^2 \sin \gamma y, & 0 < x < \pi, & \quad 0 < y < 1; \\ U_x(0, y) &= 0, \quad U_x(\pi, y) = 0, & 0 \leq y \leq 1; \\ U(x, 0) &= 0, \quad U_y(x, 1) + U(x, 1) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned} \quad (2.1)$$

де  $\gamma = \operatorname{const} > 0$  є розв'язком рівняння  $\gamma = -\operatorname{tg} \gamma$ .

**Розв'язання.** Фізична інтерпретація:

**а)** Знайти положення рівноваги однорідної прямокутної мембрани  $\pi \times 1$ , яка піддається дії зовнішньої сили інтенсивності  $-T[12y + x^2(x - \pi)^2 \sin \gamma y]$ , де  $T$  – величина сили натягу, якщо край мембрани  $y = 0$  нерухомо закріплений, краї  $x = 0$  та  $x = \pi$  вільні, а край  $y = 1$  пружно закріплений – або

**б)** Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці  $\pi \times 1$ , всередині якої діють джерела тепла інтенсивності  $-k[12y + x^2(x - \pi)^2 \sin \gamma y]$ , де  $k$  – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, якщо край пластинки  $y = 0$  підтримується при нульовій температурі, краї  $x = 0$  та  $x = \pi$  теплоізовані, а на краї  $y = 1$  відбувається теплообмін із довкіллям нульової температури.

Крайові умови задачі (2.1) очевидно є узгодженими, однак для вільного члена у рівнянні Пуассона не виконується однорідна крайова умова на краї  $y = 1$ , тому безпосередньо застосувати метод власних функцій не можна. Аби зробити це застосування можливим, приберемо з рівняння «зайвий» доданок  $12y$  шляхом введення допоміжної функції. Отже, на першому етапі будемо шукати розв'язок задачі (2.1) у вигляді

$$U(x, y) = V(x, y) + \omega(y), \quad (2.2)$$

де  $V(x, y)$  – нова невідома функція, а  $\omega(y)$  – розв'язок крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$\omega''(y) = 12y, \quad \omega(0) = 0, \quad \omega'(1) + \omega(1) = 0. \quad (2.3)$$

Інтегруючи задачу (2.3), отримуємо

$$\omega'(y) = 6y^2 + C_1 \Rightarrow \omega(y) = 2y^3 + C_1 y + C_2;$$

$$\omega(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$

$$\omega'(1) + \omega(1) = 0 \Rightarrow C_1 = -4,$$

а отже,  $\omega(y) = 2y^3 - 4y$ , і підстановка (2.2) запишеться у вигляді

$$U(x, y) = V(x, y) + 2y^3 - 4y. \quad (2.4)$$

Ввівши підстановку (2.4) у рівняння та крайові умови задачі (2.1) з урахуванням (2.3) і незалежності  $\omega(y)$  від змінної  $x$ , відносно  $V(x, y)$  отримуємо крайову задачу для спрощеного рівняння Пуассона

$$\begin{aligned} \Delta V(x, y) &\equiv V_{xx} + V_{yy} = x^2(x - \pi)^2 \sin \gamma y, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1; \\ V_x(0, y) &= 0, \quad V_x(\pi, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ V(x, 0) &= 0, \quad V_y(x, 1) + V(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Цього разу вільний член рівняння Пуассона справджує всі чотири однорідні крайові умови задачі (2.5), тому розв'язок цієї задачі можна знайти за допомогою методу власних функцій. Для цього (див. [3], Тема 1) спочатку розв'язуємо відповідну задачу на власні значення з крайовими умовами, аналогічними до крайових умов задачі (2.5):

$$\begin{aligned} \Delta W(x, y) &= \lambda W(x, y), \quad \lambda = \text{const}, \\ W_x(0, y) &= W_x(\pi, y) = 0, \quad W(x, 0) = W_y(x, 1) + W(x, 1) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Шукаючи власні функції задачі (2.6) методом відокремлення змінних у вигляді  $W(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \neq 0$ , маємо:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \alpha = \text{const}, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \beta = \text{const}, \quad \alpha + \beta = \lambda,$$

$$X'(0) \cdot Y(y) = 0, \quad X'(\pi) \cdot Y(y) = 0, \quad X(x) \cdot Y(0) = 0, \quad X(x) \cdot [Y'(1) + Y(1)] = 0,$$

звідки отримуємо дві одновимірні задачі Штурма-Ліувілля

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0; \quad (2.7)$$

$$Y''(y) - \beta Y(y) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y'(1) + Y(1) = 0. \quad (2.8)$$

Зауважимо, що задача (2.7) очевидно аналогічна вже дослідженій у Прикладі 1.1 ЗШЛ (1.4)-(1.6), а тому її систему власних значень і власних функцій можна виписати з урахуванням формул (1.7):

$$\alpha_n = -n^2, \quad X_n(x) = \cos nx, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (2.9)$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (2.8). Як відомо, для повного дослідження необхідно розглянути три випадки.

**1.** Нехай  $\beta > 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння з (2.8) запишеться у вигляді

$Y(y) = C_1 e^{\sqrt{\beta}y} + C_2 e^{-\sqrt{\beta}y}$ . Підставивши цей розв'язок у крайові умови задачі (2.8), одержимо:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ \sqrt{\beta}(C_1 e^{\sqrt{\beta}} - C_2 e^{-\sqrt{\beta}}) + C_1 e^{\sqrt{\beta}} + C_2 e^{-\sqrt{\beta}} = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи  $\Delta = -2(\sqrt{\beta} \operatorname{ch} \sqrt{\beta} + \operatorname{sh} \sqrt{\beta}) \neq 0$ , оскільки  $\beta > 0$ . Отже,  $C_1 = C_2 = 0$ , а тому  $Y(y) \equiv 0$  і у випадку  $\beta > 0$  власних значень не існує.

**2.** Нехай  $\beta = 0$ . Тоді  $Y(y) = C_3 y + C_4$  і з крайових умов задачі (2.8) одержимо:

$$\begin{cases} C_4 = 0; \\ 2C_3 + C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки  $C_3 = C_4 = 0$ , а тому  $Y(y) \equiv 0$  і  $\beta = 0$  не є власним значенням.

3. При  $\beta < 0$  загальний розв'язок рівняння із (2.8) запишеться у вигляді

$Y(y) = C_5 \cos \sqrt{-\beta} y + C_6 \sin \sqrt{-\beta} y$ . Із крайових умов задачі (2.8) одержимо:

$$\begin{cases} C_5 = 0; \\ \sqrt{-\beta}(C_6 \cos \sqrt{-\beta} - C_5 \sin \sqrt{-\beta}) + C_5 \cos \sqrt{-\beta} + C_6 \sin \sqrt{-\beta} = 0, \end{cases}$$

звідки  $C_6(\sin \sqrt{-\beta} + \sqrt{-\beta} \cos \sqrt{-\beta}) = 0$ . Отже, нетривіальний розв'язок задачі (2.8)

існує тільки для тих значень параметра  $\beta$ , які є розв'язками трансцендентного рівняння

$$\sqrt{-\beta} = -\operatorname{tg} \sqrt{-\beta}. \quad (2.10)$$

Останнє рівняння має безліч коренів (це можна легко показати графічно), які не знаходяться в явному вигляді. Введемо задля зручності позначення  $\mu_m = \sqrt{-\beta_m}$ , де  $\beta_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  – множина від'ємних коренів рівняння (2.10). Тоді, взявши для визначеності  $C_6 = 1$ , одержимо систему власних значень і власних функцій ЗШЛ (2.8):

$$\beta_m = -\mu_m^2, \quad Y_m(y) = \sin \mu_m y, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

З урахуванням (2.9), (2.11) можемо записати систему власних значень і власних функцій двовимірної задачі (2.6):

$$\begin{aligned} \lambda_{n,m} &= \alpha_n + \beta_m = -n^2 - \mu_m^2, & n = \overline{0, \infty}, \quad m \in \mathbb{N}. \\ W_{n,m}(x,y) &= X_n(x) \cdot Y_m(y) = \cos nx \sin \mu_m y, \end{aligned} \quad (2.12)$$

Тепер розв'язок задачі (2.5) можна шукати у вигляді ряду по системі знайдених власних функцій (2.12)

$$V(x,y) = \sum_{\substack{n=0 \\ m=1}}^{\infty} C_{n,m} \cos nx \sin \mu_m y. \quad (2.13)$$

Із (2.6) очевидно випливає, що ряд (2.13) справджує крайові умови задачі (2.5). Отже, залишається вибрати коефіцієнти  $C_{n,m}$  таким чином, щоб ряд (2.13) справджував також і рівняння задачі (2.5). Для цього спершу розкладемо вільний член рівняння Пуассона в подвійний ряд Фур'є по системі власних функцій (2.12) у прямокутнику  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq 1$ :

$$\begin{aligned} x^2(x-\pi)^2 \sin \gamma y &= \sum_{\substack{n=0 \\ m=1}}^{\infty} \varphi_{n,m} \cos nx \sin \mu_m y, \\ \varphi_{n,m} &= \frac{\int_0^{\pi} \int_0^1 \xi^2 (\xi - \pi)^2 \sin \gamma \eta \cos n \xi \sin \mu_m \eta d\eta d\xi}{\int_0^{\pi} \int_0^1 \cos^2 n \xi \sin^2 \mu_m \eta d\eta d\xi}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Для обчислення коефіцієнтів Фур'є скористаємося результатами, отриманими в Прикладі 1.1 за подібного розкладу, а також тим, що за умовою задачі  $\gamma = \operatorname{const} > 0$  є розв'язком рівняння  $\gamma = -\operatorname{tg} \gamma$  (тобто входить у множину значень  $\mu_m$ , а отже, при інтегруванні за змінною  $\eta$  маємо резонансний випадок). Нехай  $\gamma = \mu_p$ , де  $p$  – цілком

визначене натуральне число. Тоді значення коефіцієнтів Фур'є можна записати у вигляді

$$\varphi_{n,m} = 0, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad m \neq p;$$

$$\varphi_{n,p} = \begin{cases} \frac{\pi^4}{30}, & n = 0, \\ -\frac{24}{n^4} [(-1)^n + 1] = \begin{cases} 0, & n = 2k - 1, \\ -\frac{3}{k^4}, & n = 2k, \end{cases} & k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Підставивши (2.13) і (2.14) у рівняння Пуассона задачі (2.5), одержимо:

$$-\sum_{\substack{n=0 \\ m=1}}^{\infty} C_{n,m} (n^2 + \mu_m^2) \cos nx \sin \mu_m y = \sum_{\substack{n=0 \\ m=1}}^{\infty} \varphi_{n,m} \cos nx \sin \mu_m y,$$

звідки очевидно випливає рівність

$$C_{n,m} = -\frac{\varphi_{n,m}}{n^2 + \mu_m^2},$$

і згідно з (2.13) розв'язок задачі (2.5) матиме вигляд

$$V(x, y) = -\sum_{\substack{n=0 \\ m=1}}^{\infty} \frac{\varphi_{n,m}}{n^2 + \mu_m^2} \cos nx \sin \mu_m y.$$

Остаточний розв'язок задачі (2.5) одержимо, підставивши в останню формулу знайдені коефіцієнти Фур'є (2.15) з урахуванням рівності  $\gamma = \mu_p$ :

$$V(x, y) = \left[ -\frac{\pi^4}{30\gamma^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cos 2kx}{k^4 (4k^2 + \gamma^2)} \right] \sin \gamma y. \quad (2.16)$$

Підставивши (2.16) у (2.4), одержимо шуканий розв'язок крайової задачі (2.1).

**Відповідь.**

$$U(x, y) = \left[ -\frac{\pi^4}{30\gamma^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cos 2kx}{k^4 (4k^2 + \gamma^2)} \right] \sin \gamma y + 2y^3 - 4y.$$

**Приклад 1.3.** Знайти розв'язок задачі Неймана для рівняння Пуассона в прямокутнику:

$$\begin{aligned} U_{xx} + U_{yy} &= 18xy, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ U_x(0, y) &= 0, \quad U_x(a, y) = 9a^2 y + \cos \frac{2\pi}{b} y, \quad 0 \leq y \leq b; \\ U_y(x, 0) &= U_y(x, b) = 1 + 3x^3, \quad 0 \leq x \leq a. \end{aligned} \quad (3.1)$$

**Розв'язання.** Беручи до уваги умову стаціонарності теплового поля для прямокутника (див. [3], Тема 5), бачимо, що для задачі (3.1) не виконується одна з умов коректності постановки, а саме на сторонах  $x = 0$  та  $x = a$ , оскільки

$$\int_0^b 0 \cdot dy \neq \int_0^b \left( 9a^2 y + \cos \frac{2\pi}{b} y \right) dy.$$

Отже, спробуємо звести задачу Неймана для рівняння Пуассона (3.1) до задачі для рівняння Лапласа підстановкою

$$U(x, y) = V(x, y) + \omega(x, y), \quad (3.2)$$

де  $V(x, y)$  нова невідома функція, а  $\omega(x, y)$  – частинний розв’язок неоднорідного рівняння

$$\omega_{xx} + \omega_{yy} = 18xy, \quad (3.3)$$

який вимагається підібрати таким чином, щоб після підстановки (3.2) відносно  $V(x, y)$  отримати коректно поставлену задачу Неймана для рівняння Лапласа.

З огляду на вільний член рівняння (3.3) частинний розв’язок очевидно можна шукати у вигляді

$$\omega(x, y) = Ax^3 y + Bxy^3 + Cxy + Dx + Ey + F,$$

де згідно з (3.3)

$$6A + 6B = 18 \Rightarrow A + B = 3,$$

а інші коефіцієнти визначатимемо з урахуванням вимоги коректності постановки задачі Неймана для нової невідомої функції  $V(x, y)$ .

Щоб отримати задачу для  $V(x, y)$ , підставимо (3.2) у вигляді

$$U(x, y) = V(x, y) + Ax^3 y + Bxy^3 + Cxy + Dx + Ey + F \quad (3.4)$$

у рівняння та крайові умови задачі (3.1). Маємо:

$$V_{xx} + 6Axy + V_{yy} + 6Bxy = 18xy;$$

$$V_x(0, y) + By^3 + Cy + D = 0, \quad V_x(a, y) + 3Aa^2 y + By^3 + Cy + D = 9a^2 y + \cos \frac{2\pi}{b} y; \quad (3.5)$$

$$V_y(x, 0) + Ax^3 + Cx + E = 1 + 3x^3, \quad V_y(x, b) + Ax^3 + 3Bb^2 x + Cx + E = 1 + 3x^3.$$

Коректно поставлену задачу для рівняння Лапласа отримаємо за одночасного виконання рівностей

$$\begin{cases} A + B = 3; \\ \int_0^a (1 + 3x^3 - Ax^3 - Cx - E) dx = \int_0^a (1 + 3x^3 - Ax^3 - 3Bb^2 x - Cx - E) dx; \\ - \int_0^b (By^3 + Cy + D) dy = \int_0^b \left( 9a^2 y + \cos \frac{2\pi}{b} y - 3Aa^2 y - By^3 - Cy - D \right) dy, \end{cases}$$

або після спрощення з обчисленням інтегралу від косинуса

$$A + B = 3, \quad 0 = - \int_0^a 3Bb^2 x dx, \quad 0 = \int_0^b (9a^2 y - 3Aa^2 y) dy.$$

Звідси  $A = 3$ ,  $B = 0$ . Інші коефіцієнти у (3.4) не мають суттєвого значення, тому їх можна прирівняти до нуля, однак задля подальшого спрощення задачі (3.5) доцільно покласти  $E = 1$ .

Підклавши знайдені коефіцієнти у (3.4) і (3.5), можемо констатувати: підстановкою

$$U(x, y) = V(x, y) + y(3x^3 + 1) \quad (3.6)$$

задача (3.1) зводиться до коректно поставленої задачі Неймана для рівняння Лапласа вигляду

$$\begin{aligned} V_{xx} + V_{yy} &= 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ V_x(0, y) &= 0, \quad V_x(a, y) = \cos \frac{2\pi}{b} y, \quad 0 \leq y \leq b; \\ V_y(x, 0) &= V_y(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Зауважимо, що крайові умови отриманої задачі (3.7) є узгодженими, а отже, для знаходження її розв'язку застосовний метод відокремлення змінних. Згідно з алгоритмом цього методу розв'язок шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$V(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \neq 0. \quad (3.8)$$

Підставивши (3.8) у рівняння і крайові умови задачі (3.7) та відокремивши змінні аналогічно до Прикладу 1.1, дістанемо рівняння (1.5) для функції  $X(x)$  і задачу Штурма-Ліувілля з рівнянням (1.4) та крайовими умовами

$$Y'(0) = 0, \quad Y'(b) = 0 \quad (3.9)$$

для функції  $Y(y)$ .

Дослідивши ЗШЛ (1.4)-(3.9) згідно з алгоритмом розв'язання аналогічної задачі (1.4)-(1.6) із Прикладу 1.1, отримаємо систему власних значень і власних функцій

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \quad Y_n(y) = \cos \frac{\pi n}{b} y, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (3.10)$$

Підставивши знайдені власні значення в (1.5), отримаємо рівняння для визначення функцій  $X(x)$

$$X_n''(x) - \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 X_n(x) = 0, \quad n = \overline{0, \infty},$$

загальний розв'язок якого має різний вигляд для випадків  $n = 0$  та  $n > 0$ :

$$n = 0 \Rightarrow X_0(x) = A_0 x + B_0;$$

$$n > 0 \Rightarrow X_n(x) = A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{b} x + B_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{b} x,$$

де  $A_n, B_n, n = \overline{0, \infty}$  – довільні сталі.

Згідно з (3.8) функції

$$\begin{aligned} V_0(x, y) &= X_0(x) \cdot Y_0(y) = A_0 x + B_0, \\ V_n(x, y) &= \left( A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{b} x + B_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{b} x \right) \cos \frac{\pi n}{b} y, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

є частинними розв'язками рівняння Лапласа, що справджують однорідні крайові умови з (3.7). Тоді загальний розв'язок рівняння Лапласа, що справджує однорідні крайові умови задачі (3.7), запишеться у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків

$$V(x, y) = A_0 x + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{b} x + B_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{b} x \right) \cos \frac{\pi n}{b} y. \quad (3.11)$$

Визначимо коефіцієнти ряду (3.11) таким чином, щоб він справджував і неоднорідні крайові умови задачі (3.7). Безпосередня підстановка (3.11) у згадані умови дає

$$\begin{aligned} V_x(0, y) &\equiv A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{b} B_n \cos \frac{\pi n}{b} y = 0, \\ V_x(a, y) &\equiv A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{b} \left( A_n \operatorname{sh} \frac{\pi n a}{b} + B_n \operatorname{ch} \frac{\pi n a}{b} \right) \cos \frac{\pi n}{b} y = \cos \frac{2\pi}{b} y. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Із першого рівняння системи (3.12) очевидно отримуємо

$$A_0 = 0; \quad B_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.13)$$

Тоді із другого рівняння системи (3.12) з урахуванням (3.13) і того факту, що вільний член у правій частині рівності є власною функцією (3.10) при  $n = 2$  (**резонансний випадок**), маємо

$$A_n = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}, \\ \frac{b}{2\pi} \operatorname{sh}^{-1} \frac{2\pi a}{b}, & n = 2. \end{cases}$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд (3.11), одержимо розв'язок задачі (3.7):

$$V(x, y) = B_0 + \frac{b}{2\pi} \operatorname{sh}^{-1} \frac{2\pi a}{b} \operatorname{ch} \frac{2\pi}{b} x \cos \frac{2\pi}{b} y,$$

де  $B_0$  довільна стала (як відомо, розв'язок задачі Неймана на площині визначається з точністю до сталого доданка). А тоді шуканий розв'язок вихідної задачі (3.1) отримується згідно з формулою (3.6).

**Відповідь.**

$$U(x, y) = \frac{b}{2\pi} \operatorname{sh}^{-1} \frac{2\pi a}{b} \operatorname{ch} \frac{2\pi}{b} x \cos \frac{2\pi}{b} y + y(1 + 3x^3) + \text{const}.$$

Більше прикладів на розв'язування крайових задач для рівнянь еліптичного типу у прямокутних областях див. [2], стор. 144-155.

## 2. Крайові задачі для круга та кільця. Метод відокремлення змінних

Зауважимо, що методи інтегрування крайових задач для рівняння Лапласа у крузі, зовні круга та в кільці детально викладені в Циклі лекцій по темах розділу «Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу» (див. [3], Тема 3). Тому на практичному занятті зосередимося на розв'язуванні крайових задач для рівняння Пуассона.

**Приклад 2.1.** Зінтегрувати крайову задачу та дати її фізичну інтерпретацію:

$$\begin{aligned} \Delta U(\rho, \varphi) &\equiv U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot U_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot U_{\varphi\varphi} = 21\rho \sin 4\varphi, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ U_{\rho}(1, \varphi) + 2U(1, \varphi) &= 8 - 15 \sin 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (4.1)$$

**Розв'язання.** Фізична інтерпретація:

**a)** Знайти положення рівноваги однорідної мембрани, яка має форму круга одиничного радіуса з центром у початку координат, і піддається дії зовнішньої сили інтенсивності  $-21T\rho\sin 4\varphi$ , де  $T$  – величина сили натягу, якщо край мембрани пружно закріплений за допомогою пружини з нежорстко зафіксованим краєм – або

**б)** Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній пластинці, яка має форму круга одиничного радіуса з центром у початку координат, якщо всередині пластинки діють джерела тепла інтенсивності  $-21k\rho\sin 4\varphi$ , де  $k$  – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, а на краї пластинки відбувається теплообмін із довкіллям змінної температури.

Оскільки маємо внутрішню крайову задачу для круга, то в процесі знаходження її розв'язку окрім рівностей (3.1) необхідно враховувати додаткові умови:

**a)** шуканий розв'язок буде неперервною функцією в замиканні заданої області за виконання умови неперервності в центрі круга, яку можна записати у вигляді границі

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |U(\rho, \varphi)| < \infty; \quad (4.2)$$

**б)** поставлена крайова задача матиме єдиний розв'язок  $U(\rho, \varphi)$  на полярній площині, якщо вільний член у рівнянні Пуассона і  $U(\rho, \varphi)$  будуть функціями, періодичними з періодом  $2\pi$  за змінною  $\varphi$  (зауважимо, що для вільного члена рівняння  $21\rho\sin 4\varphi$  ця умова очевидно справджується), тобто для шуканої функції повинна виконуватися умова

$$U(\rho, \varphi) = U(\rho, \varphi + 2\pi). \quad (4.3)$$

Спробуємо звести задачу для рівняння Пуассона до простішої задачі для рівняння Лапласа за допомогою підстановки

$$U(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi) + \omega(\rho, \varphi), \quad (4.4)$$

де  $V(\rho, \varphi)$  – нова невідома функція, а  $\omega(\rho, \varphi)$  деякий частинний розв'язок рівняння Пуассона

$$\Delta\omega(\rho, \varphi) \equiv \omega_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \omega_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \omega_{\varphi\varphi} = 21\rho\sin 4\varphi. \quad (4.5)$$

Виходячи з вигляду вільного члена рівняння (4.5), можна припустити існування частинного розв'язку вигляду

$$\omega(\rho, \varphi) = A\rho^3 \sin 4\varphi, \quad (4.6)$$

де  $A$  – невідома стала. Підстановка (4.6) у (4.5) дає

$$6A\rho\sin 4\varphi + \frac{1}{\rho} \cdot 3A\rho^2 \sin 4\varphi - \frac{1}{\rho^2} \cdot 16A\rho^3 \sin 4\varphi = 21\rho\sin 4\varphi \Rightarrow A = -3,$$

звідки  $\omega(\rho, \varphi) = -3\rho^3 \sin 4\varphi$ . Для знайденого частинного розв'язку очевидно виконуються додаткові умови (4.2) і (4.3) – а отже, підстановка (4.4) набуде вигляду

$$U(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi) - 3\rho^3 \sin 4\varphi. \quad (4.7)$$

Запишемо крайову задачу для нової невідомої функції  $V(\rho, \varphi)$ . Для цього підставимо функцію (4.7) у рівності (4.1):

$$V_{\rho\rho} - 18\rho\sin 4\varphi + \frac{1}{\rho} \cdot (V_{\rho} - 9\rho^2 \sin 4\varphi) + \frac{1}{\rho^2} \cdot (V_{\varphi\varphi} + 48\rho^3 \sin 4\varphi) = 21\rho\sin 4\varphi,$$

$$V_{\rho}(1, \varphi) - 9\sin 4\varphi + 2[V(1, \varphi) - 3\sin 4\varphi] = 8 - 15\sin 4\varphi,$$

або після спрощення і врахування додаткових умов (4.2) та (4.3)

$$\Delta V(\rho, \varphi) \equiv V_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot V_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot V_{\varphi\varphi} = 0, \quad (4.8)$$

$$V_{\rho}(1, \varphi) + 2V(1, \varphi) = 8,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |V(\rho, \varphi)| < \infty, \quad V(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi + 2\pi). \quad (4.9)$$

Оскільки крайова умова на межі круга не залежить від полярного кута, то можемо шукати розв'язок отриманої задачі (4.8)-(4.9) у вигляді  $V(\rho, \varphi) \equiv V(\rho)$ . У цьому випадку умова періодичності з (4.9) виконується автоматично, а сама задача спрощується до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$V''(\rho) + \frac{1}{\rho} \cdot V'(\rho) = 0, \quad (4.10)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |V(\rho)| < \infty, \quad V'(1) + 2V(1) = 8.$$

Рівняння з задачі (4.10) інтегрується шляхом виділення точної похідної:

$$\rho V''(\rho) + V'(\rho) = 0 \Rightarrow [\rho V'(\rho)]' = 0 \Rightarrow \rho V'(\rho) = C_1 \Rightarrow V'(\rho) = \frac{C_1}{\rho},$$

звідки

$$V(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2, \quad (4.11)$$

де  $C_1, C_2$  довільні сталі. Зауважимо, що умова неперервності в центрі круга для функції (4.11) виконується, якщо покласти  $C_1 = 0$ . Таким чином,  $V(\rho) = C_2$ , і значення цієї сталої визначається з крайової умови на межі круга:

$$V'(1) + 2V(1) \equiv 2C_2 = 8 \Rightarrow C_2 = 4.$$

Отже, розв'язком крайової задачі (4.10) є функція  $V(\rho) = 4$ . Підставивши це значення у формулу (4.7) замість  $V(\rho, \varphi)$ , одержимо шуканий розв'язок внутрішньої задачі для круга (4.1) – (4.3).

**Відповідь.**  $U(\rho, \varphi) = 4 - 3\rho^3 \sin 4\varphi$ .

**Приклад 2.2.** Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній пластинці з коефіцієнтом внутрішньої теплопровідності  $k = 1$ , яка має форму кільця, обмеженого колами  $\rho = 1/2$  та  $\rho = 1$ , якщо всередині пластинки діють джерела тепла інтенсивності  $48 \sin 2\varphi$ , зовнішній край пластинки підтримується при сталій температурі 1, а на внутрішньому краї відбувається теплообмін із довкіллям нульової температури, причому коефіцієнт зовнішньої теплопровідності рівний  $\alpha = 4$ .

**Розв'язання.** Математична модель задачі: у класі функцій  $C^2(\mathbf{D}_2) \cap C^1(\bar{\mathbf{D}}_2)$ , де  $\mathbf{D}_2$  – внутрішність, а  $\bar{\mathbf{D}}_2 = \{(\rho, \varphi) \mid 0,5 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$  замикання заданого кільця, знайти розв'язок рівняння Пуассона

$$\Delta U(\rho, \varphi) \equiv U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot U_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot U_{\varphi\varphi} = -48 \sin 2\varphi, \quad (5.1)$$

який на межах кільця  $\mathbf{D}_2$  справджує крайові умови

$$U_\rho\left(\frac{1}{2}, \varphi\right) - 4U\left(\frac{1}{2}, \varphi\right) = 0, \quad U(1, \varphi) = 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (5.2)$$

З огляду на особливості розглядуваної області й полярної площини загалом окрім крайових умов (5.2) слід враховувати також умову періодичності (4.3).

Підібрати частинний розв'язок для рівняння (5.1) значно важче, ніж це вийшло у Прикладі 2.1, тому застосуємо загальний метод інтегрування крайових задач для рівняння Пуассона в крузі, зовні круга чи в кільці: розв'язок задачі (5.1)-(5.2)-(4.3) будемо шукати у вигляді ряду по системі знайдених при дослідженні задачі Діріхле для круга (див. [3], Тема 3) власних функцій відповідної задачі для рівняння Лапласа

$$U(\rho, \varphi) = X_0(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} [X_n(\rho) \cos n\varphi + Y_n(\rho) \sin n\varphi], \quad (5.3)$$

який очевидно справджує умову періодичності (4.3). Невідомі коефіцієнти визначимо шляхом безпосередньої підстановки ряду (5.3) у рівняння Пуассона (5.1) та крайові умови (5.2).

Задля зручності запишемо рівняння (5.1) у вигляді

$$\rho^2 U_{\rho\rho} + \rho U_\rho + U_{\varphi\varphi} = -48\rho^2 \sin 2\varphi.$$

Підставивши в останню рівність замість  $U(\rho, \varphi)$  ряд (5.3), після групування подібних доданків одержимо

$$\begin{aligned} \rho^2 X_0''(\rho) + \rho X_0'(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} [\rho^2 X_n''(\rho) + \rho X_n'(\rho) - n^2 X_n(\rho)] \cos n\varphi + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [\rho^2 Y_n''(\rho) + \rho Y_n'(\rho) - n^2 Y_n(\rho)] \sin n\varphi = -48\rho^2 \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Підстановка (5.3) у крайові умови (5.2) дає

$$\begin{aligned} X_0'\left(\frac{1}{2}\right) - 4X_0\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} [X_n'\left(\frac{1}{2}\right) - 4X_n\left(\frac{1}{2}\right)] \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} [Y_n'\left(\frac{1}{2}\right) - 4Y_n\left(\frac{1}{2}\right)] \sin n\varphi = 0, \\ X_0(1) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(1) \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(1) \sin n\varphi = 1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Оскільки у правих частинах рівностей (5.4)-(5.5) фігурують лише власні функції з точністю до множників, незалежних від полярного кута (маємо резонансний випадок), то шляхом безпосереднього прирівнювання виразів при однакових власних функціях для шуканих коефіцієнтів ряду (5.3) одержуємо наступні співвідношення:

$$\rho^2 X_0''(\rho) + \rho X_0'(\rho) = 0, \quad X_0'\left(\frac{1}{2}\right) - 4X_0\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad X_0(1) = 1; \quad (5.6)$$

$$\rho^2 X_n''(\rho) + \rho X_n'(\rho) - n^2 X_n(\rho) = 0, \quad X_n'\left(\frac{1}{2}\right) - 4X_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad X_n(1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (5.7)$$

$$\rho^2 Y_n''(\rho) + \rho Y_n'(\rho) - n^2 Y_n(\rho) = \begin{cases} -48\rho^2, & n = 2, \\ 0, & n \neq 2; \end{cases} \quad (5.8)$$

$$Y_n'\left(\frac{1}{2}\right) - 4Y_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad Y_n(1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Дослідимо отримані крайові задачі (5.6) – (5.8).

**1.** Рівняння задачі (5.6) інтегрується шляхом виділення точної похідної:

$$\rho X_0''(\rho) + X_0'(\rho) = 0 \Rightarrow [\rho X_0'(\rho)]' = 0 \Rightarrow \rho X_0'(\rho) = A_0 \Rightarrow X_0'(\rho) = \frac{A_0}{\rho},$$

звідки

$$X_0(\rho) = A_0 \ln \rho + B_0, \quad (5.9)$$

де  $A_0, B_0$  довільні сталі, значення яких знаходимо безпосередньою підстановкою (5.9) у крайові умови задачі (5.6):

$$\begin{cases} X_0'(\frac{1}{2}) - 4X_0(\frac{1}{2}) \equiv \frac{A_0}{2} - 4(A_0 \ln \frac{1}{2} + B_0) = 0, \\ X_0(1) \equiv B_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_0 = \frac{8}{1 + 8 \ln 2}.$$

Тоді на підставі (5.9) розв'язок крайової задачі (5.6) рівний

$$X_0(\rho) = \frac{8 \ln \rho}{1 + 8 \ln 2} + 1.$$

**2.** У задачах (5.7) усі рівняння та крайові умови є однорідними, тому жодна з цих задач не матиме нетривіального розв'язку, а отже, можемо констатувати, що

$$X_n(\rho) \equiv 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**3.** У задачах (5.8) усі крайові умови також є однорідними, натомість одне з рівнянь (при  $n = 2$ ) є неоднорідним. Тому за аналогією з попереднім випадком можемо констатувати, що

$$Y_n(\rho) \equiv 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2\},$$

а функцію  $Y_2(\rho)$  слід знайти окремо як розв'язок крайової задачі

$$\rho^2 Y_2''(\rho) + \rho Y_2'(\rho) - 4Y_2(\rho) = -48\rho^2, \quad (5.10)$$

$$Y_2'(\frac{1}{2}) - 4Y_2(\frac{1}{2}) = 0, \quad Y_2(1) = 0. \quad (5.11)$$

Рівняння (5.10) є рівнянням Ейлера, яке зводиться до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною незалежної змінної  $\rho = e^t$ ,  $t = \ln \rho$ . Отже, маємо

$$Y_2'(\rho) = e^{-t} Y_2'(t), \quad Y_2''(\rho) = e^{-2t} [Y_2''(t) - Y_2'(t)],$$

і таким чином після вказаної підстановки рівність (5.10) набуде вигляду

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} [Y_2''(t) - Y_2'(t)] + e^t \cdot e^{-t} Y_2'(t) - 4Y_2(t) = -48e^{2t},$$

або після спрощення

$$Y_2''(t) - 4Y_2(t) = -48e^{2t}. \quad (5.12)$$

Загальний розв'язок отриманого лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами рівний сумі загального розв'язку  $Y_{2_{з.о.}}(t)$  відповідного однорідного рівняння та деякого частинного розв'язку  $Y_{2_{ч.н.}}(t)$  неоднорідного рівняння (5.10).

Згідно з методом Ейлера отримуємо

$$Y_{2_{з.о.}}(t) = A_2 e^{2t} + B_2 e^{-2t},$$

де  $A_2, B_2$  довільні сталі. Частинний розв'язок рівняння (5.12) згідно з правилами методу невизначених коефіцієнтів будемо шукати у вигляді  $Y_{2_{ч.н.}}(t) = Ct e^{2t}$ ,  $C = const$ .

Тоді  $Y_{2_{ч.н.}}'(t) = C e^{2t} (2t + 1)$ ,  $Y_{2_{ч.н.}}''(t) = C e^{2t} (4t + 4)$ , і після підстановки у (5.12) маємо

$$C e^{2t} (4t + 4) - 4Ct e^{2t} = -48e^{2t} \Rightarrow C = -12,$$

а тому  $Y_{2_{ч.н.}}(t) = -12t e^{2t}$  і загальний розв'язок рівняння (5.12) запишеться як

$$Y_2(t) = A_2 e^{2t} + B_2 e^{-2t} - 12t e^{2t}.$$

Звідси після зворотної заміни  $t = \ln \rho$  отримуємо загальний розв'язок рівняння Ейлера (5.10)

$$Y_2(\rho) = A_2 \rho^2 + B_2 \rho^{-2} - 12 \ln \rho \cdot \rho^2, \quad (5.13)$$

тоді  $Y_2'(\rho) = 2A_2 \rho - 2B_2 \rho^{-3} - 12\rho(1 + 2 \ln \rho)$ . Значення сталих  $A_2, B_2$  обчислюємо шляхом безпосередньої підстановки (5.13) у крайові умови (5.11):

$$\begin{cases} Y_2'(\frac{1}{2}) - 4Y_2(\frac{1}{2}) \equiv A_2 - 16B_2 - 6(1 + 2 \ln \frac{1}{2}) - 4\left(\frac{A_2}{4} + 4B_2 - 3 \ln \frac{1}{2}\right) = 0, \\ Y_2(1) \equiv A_2 + B_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_2 = -\frac{3}{16}, \\ A_2 = \frac{3}{16}, \end{cases}$$

звідки згідно з (5.13) отримуємо розв'язок крайової задачі (5.10)-(5.11)

$$Y_2(\rho) = \frac{3}{16}(\rho^2 - \rho^{-2}) - 12\rho^2 \cdot \ln \rho.$$

На підставі проведеного дослідження можемо констатувати, що ряд (5.3) для шуканого розв'язку крайової задачі (5.1)-(5.2)-(4.3) після вилучення нульових коефіцієнтів спроститься до вигляду

$$U(\rho, \varphi) = X_0(\rho) + Y_2(\rho) \sin 2\varphi.$$

Остаточний результат отримаємо, підклавши в останню формулу знайдені функції  $X_0(\rho)$  та  $Y_2(\rho)$ .

**Відповідь.** 
$$U(\rho, \varphi) = 1 + \frac{8 \ln \rho}{1 + 8 \ln 2} + \left[ \frac{3}{16}(\rho^2 - \rho^{-2}) - 12\rho^2 \cdot \ln \rho \right] \cdot \sin 2\varphi.$$

**Приклад 2.3.** Визначити, за якого значення сталої  $A$  є коректно поставленою задачею Неймана для круга

$$\begin{aligned} \Delta U(\rho, \varphi) &= 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ U_\rho(1, \varphi) &= A + 4 \sin^2 \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Дати фізичну інтерпретацію отриманої задачі та знайти її розв'язок.

**Розв'язання.** Маємо внутрішню задачу Неймана для рівняння Лапласа, яка буде коректно поставленою за виконання умови стаціонарності теплового поля для круга (див. [3], Тема 5) у вигляді

$$\int_0^{2\pi} (A + 4 \sin^2 \varphi) d\varphi = 0.$$

Звідси  $A = -2$ . Після підстановки цього значення в (6.1) і врахування тотожності  $4 \sin^2 \varphi - 2 = -2 \cos 2\varphi$  для розв'язування отримуємо задачу

$$\Delta U(\rho, \varphi) \equiv U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot U_\rho + \frac{1}{\rho^2} \cdot U_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (6.2)$$

$$U_\rho(1, \varphi) = -2 \cos 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Фізична інтерпретація [один із можливих варіантів для задачі (6.2)]:

У середині нескінченного кругового циліндра одиничного радіуса відбувається рух нестисливої рідини. Вважаючи рух сталим, потенціальним і плоскопаралельним,

знайти закон цього руху, якщо проекція швидкості  $\vec{v}$  на зовнішню нормаль  $\vec{n}$  циліндра в кожній його точці задається формулою:  $\text{пр}_{\vec{n}} \vec{v} = -2 \cos 2\varphi$ .

Оскільки маємо внутрішню крайову задачу для круга, то, як і в Прикладі 2.1, у процесі знаходження її розв'язку окрім рівностей (6.2) необхідно враховувати додатково умову неперервності в центрі круга (4.2), а також умову періодичності (4.3).

Для побудови розв'язку задачі (6.2)-(4.2)-(4.3) застосуємо метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Згідно з алгоритмом цього методу розв'язок слід шукати у вигляді добутку двох функцій

$$U(\rho, \varphi) = X(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0, \quad (6.3)$$

кожна з яких знаходиться окремо з урахуванням рівностей (6.2) та додаткових умов (4.2)-(4.3). Підставивши (6.3) у рівняння Лапласа з (6.2), одержимо:

$$X''(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho} \cdot X'(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2} \cdot X(\rho) \cdot \Phi''(\varphi) = 0,$$

або

$$\rho^2 X''(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + \rho X'(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + X(\rho) \cdot \Phi''(\varphi) = 0.$$

Відокремивши змінні шляхом ділення лівої та правої частин останньої рівності на величину  $X(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0$ , маємо

$$\frac{\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho)}{X(\rho)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0,$$

звідки випливає, що

$$-\frac{\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho)}{X(\rho)} = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda = \text{const},$$

а отже,

$$\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho) + \lambda X(\rho) = 0, \quad X(\rho) \neq 0; \quad (6.4)$$

$$\Phi''(\varphi) - \lambda \Phi(\varphi) = 0, \quad \Phi(\varphi) \neq 0. \quad (6.5)$$

Згідно з (4.3) для функції  $\Phi(\varphi)$  повинна виконуватися умова періодичності

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \quad (6.6)$$

Після знаходження нетривіальних розв'язків задачі (6.5)-(6.6) та інтегрування рівняння (6.4) згідно з алгоритмом, детально викладеним у Циклі лекцій по темах розділу «Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу» (див. [3], Тема 3), отримуємо загальний розв'язок рівняння Лапласа, що справджує умову періодичності (4.3), у вигляді ряду

$$U(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{2} + B_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n \rho^n + C_n \rho^{-n}) \cos n\varphi + (B_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \sin n\varphi]. \quad (6.7)$$

Зауважимо, що умова (4.2) неперервності в центрі круга для ряду (6.7) виконується, якщо покласти  $B_0 = 0$ ;  $C_n = D_n = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Таким чином, розв'язок рівняння Лапласа з урахуванням умов (4.2) та (4.3) запишеться у вигляді

$$U(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cdot (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (6.8)$$

Визначимо коефіцієнти ряду (6.8) таким чином, щоб він справджував крайову умову на межі круга з (6.2). Безпосередня підстановка (6.8) у згадану умову дає

$$U_\rho(1, \varphi) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = -2 \cos 2\varphi. \quad (6.9)$$

Рівність (6.9) очевидно виконується, якщо покласти

$$A_n = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}, \\ -1, & n = 2; \end{cases} \quad B_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Підклавши знайдені коефіцієнти у (6.8), отримаємо шуканий розв'язок задачі Неймана (6.2)

$$U(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{2} - \rho^2 \cos 2\varphi,$$

де  $A_0$  довільна стала (як відомо, розв'язок задачі Неймана на площині визначається з точністю до сталого доданка).

**Відповідь.** Задача Неймана (6.1) коректно поставлена при значенні  $A = -2$ ; у цьому випадку розв'язок рівний  $U(\rho, \varphi) = -\rho^2 \cos 2\varphi + const$ .

### 3. Крайові задачі для кругового сектора та криволінійного прямокутника. Метод відокремлення змінних

Зауважимо, що методи інтегрування крайових задач для рівняння Лапласа у круговому та кільцевому секторах за однорідних крайових умов на прямолінійних краях детально викладені в Циклі лекцій по темах розділу «Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу» (див. [3], Тема 4). Тому на практичному занятті зосередимося на розв'язуванні задач складніших типів.

**Приклад 3.1.** Зінтегрувати крайову задачу та дати її фізичну інтерпретацію:

$$\Delta U(\rho, \varphi) \equiv U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot U_\rho + \frac{1}{\rho^2} \cdot U_{\varphi\varphi} = \cos \varphi + \sin \varphi, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2};$$

$$U(R, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}; \quad (7.1)$$

$$U_\varphi(\rho, 0) - U(\rho, 0) = 0, \quad U_\varphi\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) + U\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq R.$$

**Розв'язання.** Фізична інтерпретація:

**а)** Знайти положення рівноваги однорідної мембрани, яка має форму сектора, що відповідає центральному куту  $90^\circ$  круга радіуса  $R$  із центром у початку координат, і піддається дії зовнішньої сили інтенсивності  $-T(\sin \varphi + \cos \varphi)$ , де  $T$  – величина сили натягу, якщо криволінійний край мембрани нерухомо закріплений, а інші краї пружно закріплені за допомогою пружин із жорстко зафіксованим краєм – або

**б)** Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній пластинці, яка має форму сектора, що відповідає центральному куту  $90^\circ$  круга радіуса  $R$  із центром у початку координат, якщо всередині пластинки діють джерела тепла інтенсивності  $-k(\sin \varphi + \cos \varphi)$ , де  $k$  – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, криволінійний край пластинки підтримується при нульовій температурі, а на інших краях відбувається теплообмін із довкіллям нульової температури.

Оскільки маємо крайову задачу для кругового сектора, то в процесі знаходження її розв'язку окрім рівностей (7.1) необхідно враховувати додатково умову неперервності в центрі круга (4.2).

Для інтегрування задачі (7.1)-(4.2) застосуємо загальну схему методу Фур'є у випадку крайових задач для рівняння Пуассона за однорідних крайових умов на прямолінійних краях кругового сектора: будемо шукати розв'язок у вигляді ряду

$$U(\rho, \varphi) = \sum_n X_n(\rho) \cdot \Phi_n(\varphi), \quad (7.2)$$

де  $\Phi_n(\varphi)$  – власні функції ЗШЛ, що отримується з відповідної однорідної задачі для рівняння Лапласа

$$\Delta V(\rho, \varphi) \equiv V_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot V_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot V_{\varphi\varphi} = 0, \quad (7.3)$$

із крайовими умовами

$$V_{\varphi}(\rho, 0) - V(\rho, 0) = 0, \quad V_{\varphi}\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) + V\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (7.4)$$

а  $X_n(\rho)$  – невідомі коефіцієнти, які визначають шляхом безпосередньої підстановки ряду (7.2) у рівняння задачі (7.1) з урахуванням крайової умови на дузі  $\rho = R$  та умови неперервності (4.2).

Для знаходження власних функцій  $\Phi_n(\varphi)$  застосуємо до задачі (7.3)-(7.4) метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Згідно з алгоритмом цього методу  $V(\rho, \varphi)$  слід шукати у вигляді добутку двох функцій

$$V(\rho, \varphi) = Q(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0, \quad (7.5)$$

де  $Q(\rho)$  допоміжна функція, знаходити яку не вимагається. Підставивши (7.5) у рівняння (7.3), одержимо:

$$Q''(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho} \cdot Q'(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2} \cdot Q(\rho) \cdot \Phi''(\varphi) = 0,$$

або

$$\rho^2 Q''(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + \rho Q'(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + Q(\rho) \cdot \Phi''(\varphi) = 0.$$

Відокремивши змінні шляхом ділення лівої та правої частин останньої рівності на величину  $Q(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0$ , маємо

$$\frac{\rho^2 Q''(\rho) + \rho Q'(\rho)}{Q(\rho)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0,$$

звідки випливає, що

$$-\frac{\rho^2 Q''(\rho) + \rho Q'(\rho)}{Q(\rho)} = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda = const,$$

а отже, для функції  $\Phi(\varphi)$  отримуємо рівняння з параметром (6.5).

Підстановка (7.5) у крайові умови (7.4) дає

$$Q(\rho)\Phi'(0) - Q(\rho)\Phi(0) = 0, \quad Q(\rho)\Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) + Q(\rho)\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

звідки, враховуючи, що згідно з (7.5)  $Q(\rho) \neq 0$ , дістанемо крайові умови для функції  $\Phi(\varphi)$

$$\Phi'(0) - \Phi(0) = 0, \quad \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (7.6)$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (6.5)-(7.6). Як відомо, для повного дослідження необхідно розглянути три випадки.

**1.** Нехай  $\lambda > 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (6.5) запишеться у вигляді

$\Phi(\varphi) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\varphi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\varphi}$ . Підставивши цей розв'язок у крайові умови (7.6), одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(C_1 - C_2) - C_1 - C_2 = 0; \\ \sqrt{\lambda}\left(C_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}} - C_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}\right) + C_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}} = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи  $\Delta = 2\sqrt{\lambda} + 2\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} + 2\sqrt{\lambda}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} \neq 0$ , оскільки  $\lambda > 0$ . Отже,

$C_1 = C_2 = 0$ , а тому  $\Phi(\varphi) \equiv 0$  і у випадку  $\lambda > 0$  власних значень не існує.

**2.** Нехай  $\lambda = 0$ . Тоді  $\Phi(\varphi) = C_3\varphi + C_4$  і з крайових умов (7.6) одержимо:

$$\begin{cases} C_3 - C_4 = 0; \\ C_3 - C_3 \cdot \frac{\pi}{2} - C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки  $C_3 = C_4 = 0$ , а тому  $\Phi(\varphi) \equiv 0$  і  $\lambda = 0$  не є власним значенням.

**3.** При  $\lambda < 0$  загальний розв'язок рівняння (6.5) запишеться у вигляді

$\Phi(\varphi) = C_5 \cos\sqrt{-\lambda}\varphi + C_6 \sin\sqrt{-\lambda}\varphi$ . Із крайових умов (7.6) одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}C_6 - C_5 = 0; \\ \sqrt{-\lambda}\left(C_6 \cos\frac{\sqrt{-\lambda}\pi}{2} - C_5 \sin\frac{\sqrt{-\lambda}\pi}{2}\right) + C_5 \cos\frac{\sqrt{-\lambda}\pi}{2} + C_6 \sin\frac{\sqrt{-\lambda}\pi}{2} = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} C_5 = \sqrt{-\lambda}C_6; \\ C_6\left[2\sqrt{-\lambda}\cos\frac{\sqrt{-\lambda}\pi}{2} + (\lambda + 1)\sin\frac{\sqrt{-\lambda}\pi}{2}\right] = 0. \end{cases}$$

Отже, нетривіальний розв'язок задачі (6.5)-(7.6) існує тільки для тих значень параметра  $\lambda$ , які є розв'язками трансцендентного рівняння

$$2\sqrt{-\lambda}\cos\frac{\sqrt{-\lambda}\pi}{2} + (\lambda + 1)\sin\frac{\sqrt{-\lambda}\pi}{2} = 0. \quad (7.7)$$

Останнє рівняння має безліч коренів (це можна легко показати графічно), які не

знаходяться в явному вигляді. Введемо задля зручності позначення  $\mu_n = \sqrt{-\lambda_n}$ , де  $\lambda_n$ ,

$n \in \mathbb{N}$  – множина від'ємних коренів рівняння (7.7). Тоді, взявши для визначеності  $C_6 = 1$ , одержимо систему власних значень і власних функцій ЗШЛ (6.5)-(7.6):

$$\lambda_n = -\mu_n^2, \quad \Phi_n(\varphi) = \mu_n \cos\mu_n\varphi + \sin\mu_n\varphi, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.8)$$

Отже, тепер ряд (7.2) для розв'язку задачі (7.1)-(4.2) можна записати у вигляді

$$U(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\rho) \cdot (\mu_n \cos\mu_n\varphi + \sin\mu_n\varphi). \quad (7.9)$$

Для визначення коефіцієнтів  $X_n(\rho)$  підставимо ряд (7.9) у рівняння та першу крайову умову задачі (7.1). Маємо:

$$\Delta U(\rho, \varphi) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[ X_n''(\rho) + \frac{1}{\rho} X_n'(\rho) - \frac{\mu_n^2}{\rho^2} X_n(\rho) \right] \cdot (\mu_n \cos \mu_n \varphi + \sin \mu_n \varphi) = \cos \varphi + \sin \varphi;$$

$$U(R, \varphi) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} X_n(R) \cdot (\mu_n \cos \mu_n \varphi + \sin \mu_n \varphi) = 0.$$

Зауважимо, що  $\lambda_p = -1$ , де  $p$  – цілком визначене натуральне число, очевидно є коренем трансцендентного рівняння (7.7), якому відповідає власна функція (7.8) при значенні  $\mu_p = \sqrt{-\lambda_p} = 1$ , тобто

$$\Phi_p(\varphi) = \cos \varphi + \sin \varphi,$$

а отже, вільний член у рівнянні Пуассона входить у множину власних функцій (7.8) ЗШЛ (6.5)-(7.6), тобто маємо резонансний випадок. Таким чином, з урахуванням умови неперервності (4.2) для знаходження коефіцієнтів  $X_n(\rho)$  отримуємо крайові задачі

$$X_n''(\rho) + \frac{1}{\rho} X_n'(\rho) - \frac{\mu_n^2}{\rho^2} X_n(\rho) = \begin{cases} 0, & n \neq p, \\ 1, & n = p; \end{cases} \quad (7.10)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |X_n(\rho)| < \infty, \quad X_n(R) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

У задачах (5.8) усі крайові умови також є однорідними, натомість одне з рівнянь (при  $n = p$ ) є неоднорідним. Тому можемо констатувати, що

$$X_n(\rho) \equiv 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{p\},$$

а функцію  $X_p(\rho)$ , якій відповідає значення  $\mu_p = 1$ , слід знайти окремо як розв'язок крайової задачі

$$\rho^2 X_p''(\rho) + \rho X_p'(\rho) - X_p(\rho) = \rho^2, \quad (7.11)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |X_p(\rho)| < \infty, \quad X_p(R) = 0. \quad (7.12)$$

Інтегруючи рівняння Ейлера (7.11) аналогічно до рівняння (5.10) у Прикладі 2.2, отримуємо його загальний розв'язок

$$X_p(\rho) = A_p \rho + B_p \rho^{-1} + \frac{\rho^2}{3},$$

де  $A_p, B_p$  довільні сталі, що визначаються з додаткових умов (7.12). Так, з умови неперервності впливає  $B_p = 0$ , а крайова умова при  $\rho = R$  дає значення другого коефіцієнта:

$$A_p R + \frac{R^2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_p = -\frac{R}{3}.$$

Таким чином, розв'язок задачі (7.11)-(7.12) рівний

$$X_p(\rho) = \frac{\rho^2 - R\rho}{3}.$$

На підставі одержаних результатів можемо констатувати, що ряд (7.9) для шуканого розв'язку крайової задачі (7.1)-(4.2) після вилучення нульових коефіцієнтів спроститься до вигляду

$$U(\rho, \varphi) = X_p(\rho) \cdot (\cos \varphi + \sin \varphi).$$

Остаточну відповідь отримаємо, підклавши в останню формулу знайдену функцію  $X_p(\rho)$ .

**Відповідь.** 
$$U(\rho, \varphi) = \frac{\rho^2 - R\rho}{3} \cdot (\cos \varphi + \sin \varphi).$$

**Приклад 3.2.** Знайти положення рівноваги однорідної мембрани, яка має форму криволінійного прямокутника, що відповідає центральному куту  $45^\circ$  кільця, обмеженого колами радіусів  $R = 1/2$  та  $R_1 = 1$  із центрами в початку координат, якщо відхилення краю мембрани  $\rho = 1$  рівне  $\mu(\varphi) = 6 - \cos 2\varphi$ , край  $\varphi = 0$  вільний, а на краї  $\rho = 1/2$  та  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  діють сили відповідно  $v_1(\varphi) = T(\cos 2\varphi - 3 \cos 8\varphi)$  та  $v_2(\rho) = 2T\rho^2$ , де  $T$  – величина сили натягу.

**Розв'язання.** Математична модель задачі: у класі функцій  $C^2(\mathbf{D}_4) \cap C^1(\overline{\mathbf{D}}_4)$ , де  $\mathbf{D}_4$  – внутрішність, а  $\overline{\mathbf{D}}_4 = \{(\rho, \varphi) \mid \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\}$  замикання заданого кільцевого сектора, знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$\Delta U(\rho, \varphi) \equiv U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot U_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot U_{\varphi\varphi} = 0, \quad (8.1)$$

який на межах області  $\mathbf{D}_4$  справджує крайові умови

$$\begin{aligned} U_{\rho}\left(\frac{1}{2}, \varphi\right) &= 3 \cos 8\varphi - \cos 2\varphi, & U(1, \varphi) &= 6 - \cos 2\varphi, & 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{4}; \\ U_{\varphi}(\rho, 0) &= 0, & U_{\varphi}\left(\rho, \frac{\pi}{4}\right) &= 2\rho^2, & \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Крайові умови на прямолінійних краях неоднорідні, тому для застосування методу Фур'є слід попередньо звести ці умови до однорідних підстановкою

$$U(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi) + \omega(\rho, \varphi), \quad (8.3)$$

де  $V(\rho, \varphi)$  – нова невідома функція, а  $\omega(\rho, \varphi)$  – допоміжна функція, що справджує неоднорідні крайові умови на прямолінійних краях

$$\omega_{\varphi}(\rho, 0) = 0, \quad \omega_{\varphi}\left(\rho, \frac{\pi}{4}\right) = 2\rho^2. \quad (8.4)$$

Допоміжну функцію будемо шукати в «періодичному» вигляді

$$\omega(\rho, \varphi) = a(\rho) \cos \beta \varphi + b(\rho) \sin \beta \varphi, \quad (8.5)$$

де коефіцієнти  $a(\rho)$ ,  $b(\rho)$  і константа  $\beta > 0$  визначаються шляхом безпосередньої підстановки виразу (8.5) у крайові умови (8.4). Отже, маємо

$$\omega_{\varphi}(\rho, 0) \equiv \beta \cdot b(\rho) = 0 \Rightarrow b(\rho) = 0;$$

$$\omega_{\varphi}\left(\rho, \frac{\pi}{4}\right) \equiv \beta \cdot [b(\rho) \cos \frac{\beta\pi}{4} - a(\rho) \sin \frac{\beta\pi}{4}] = 2\rho^2 \Rightarrow \beta \cdot a(\rho) \sin \frac{\beta\pi}{4} = -2\rho^2.$$

Остання рівність виконується, якщо покласти, наприклад,  $\beta = 2$ ,  $a(\rho) = -\rho^2$ . Тоді на підставі (8.5) отримуємо допоміжну функцію

$$\omega(\rho, \varphi) = -\rho^2 \cos 2\varphi,$$

і підстановка (8.3) набуває вигляду

$$U(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi) - \rho^2 \cos 2\varphi. \quad (8.6)$$

Щоб отримати крайову задачу для нової невідомої функції  $V(\rho, \varphi)$ , введемо підстановку (8.6) у рівняння (8.1) та крайові умови (8.2). Маємо

$$\begin{aligned} V_{\rho\rho} - 2 \cos 2\varphi + \frac{1}{\rho}(V_{\rho} - 2\rho \cos 2\varphi) + \frac{1}{\rho^2} \cdot (V_{\varphi\varphi} + 4\rho^2 \cos 2\varphi) &= 0; \\ V_{\rho}\left(\frac{1}{2}, \varphi\right) - \cos 2\varphi &= 3 \cos 8\varphi - \cos 2\varphi, \quad V(1, \varphi) - \cos 2\varphi = 6 - \cos 2\varphi, \\ V_{\varphi}(\rho, 0) &= 0, \quad V_{\varphi}\left(\rho, \frac{\pi}{4}\right) + 2\rho^2 = 2\rho^2, \end{aligned}$$

або після спрощення

$$\Delta V(\rho, \varphi) \equiv V_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot V_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot V_{\varphi\varphi} = 0, \quad (\rho, \varphi) \in \mathbf{D}_4, \quad (8.7)$$

$$V_{\rho}\left(\frac{1}{2}, \varphi\right) = 3 \cos 8\varphi, \quad V(1, \varphi) = 6, \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{4}; \quad (8.8)$$

$$V_{\varphi}(\rho, 0) = 0, \quad V_{\varphi}\left(\rho, \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1.$$

Крайові умови задачі (8.7)-(8.8) є узгодженими, отже, до неї застосовний метод Фур'є. Згідно з алгоритмом цього методу розв'язок слід шукати у вигляді добутку двох функцій

$$V(\rho, \varphi) = X(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0, \quad (8.9)$$

кожна з яких знаходиться окремо з урахуванням рівняння (8.7) та крайових умов (8.8). Підставивши (8.9) у рівняння Лапласа (8.7), одержимо:

$$X''(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho} \cdot X'(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2} \cdot X(\rho) \cdot \Phi''(\varphi) = 0,$$

або

$$\rho^2 X''(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + \rho X'(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + X(\rho) \cdot \Phi''(\varphi) = 0.$$

Відокремивши змінні шляхом ділення лівої та правої частин останньої рівності на величину  $X(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0$ , маємо

$$\frac{\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho)}{X(\rho)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0.$$

Одержана рівність виконується для всіх  $(\rho, \varphi) \in \mathbf{D}_4$  тільки тоді, коли

$$-\frac{\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho)}{X(\rho)} = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda = const,$$

а отже, для функцій  $X(\rho)$  та  $\Phi(\varphi)$  отримуємо рівняння з параметром (6.4) та (6.5) відповідно.

Підставивши (8.9) в однорідні крайові умови з (8.8), одержимо

$$X(\rho) \cdot \Phi'(0) = 0, \quad X(\rho) \cdot \Phi'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

звідки, враховуючи, що  $X(\rho) \neq 0$ , маємо

$$\Phi'(0) = 0, \quad \Phi'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0. \quad (8.10)$$

Дослідивши ЗШЛ (6.5)-(8.10) згідно з алгоритмом розв'язання аналогічних задач (1.4)-(1.6) із Прикладу 1.1 та (1.4)-(3.9) із Прикладу 1.3, отримаємо систему власних значень і власних функцій

$$\lambda_n = -16n^2, \quad \Phi_n(\varphi) = \cos 4n\varphi, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (8.11)$$

Підставивши знайдені власні значення в (6.4), дістанемо рівняння для визначення функцій  $X(\rho)$ . Підставивши знайдені власні значення у (3.8), отримаємо рівняння для визначення функцій  $X(\rho)$ , яке матиме різний вигляд для випадків  $\lambda = 0$  та  $\lambda < 0$ :

$$\rho^2 X_0''(\rho) + \rho X_0'(\rho) = 0, \quad (8.12)$$

$$\rho^2 X_n''(\rho) + \rho X_n'(\rho) - 16n^2 X_n(\rho) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8.13)$$

Рівняння (8.12) інтегрується шляхом виділення точної похідної:

$$\rho X_0''(\rho) + X_0'(\rho) = 0 \Rightarrow [\rho X_0'(\rho)]' = 0 \Rightarrow \rho X_0'(\rho) = A_0 \Rightarrow X_0'(\rho) = \frac{A_0}{\rho},$$

звідки

$$X_0(\rho) = A_0 \ln \rho + B_0,$$

де  $A_0, B_0$  довільні сталі.

Рівняння (8.13) є рівнянням Ейлера, яке зводиться до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною незалежної змінної  $\rho = e^t, t = \ln \rho$ . Отже, маємо

$$X_n'(\rho) = e^{-t} X_n'(t), \quad X_n''(\rho) = e^{-2t} [X_n''(t) - X_n'(t)],$$

і таким чином після вказаної підстановки рівність (8.13) набуде вигляду

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} [X_n''(t) - X_n'(t)] + e^t \cdot e^{-t} X_n'(t) - 16n^2 X_n(t) = 0,$$

або після спрощення

$$X_n''(t) - 16n^2 X_n(t) = 0.$$

Загальний розв'язок отриманого лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами рівний

$$X_n(t) = A_n e^{4nt} + B_n e^{-4nt},$$

а отже, загальний розв'язок рівняння Ейлера (8.13) має вигляд

$$X_n(\rho) = A_n \rho^{4n} + B_n \rho^{-4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де  $A_n, B_n$  довільні сталі.

Згідно з (8.9) функції

$$V_0(\rho, \varphi) = X_0(\rho) \cdot \Phi_0(\varphi) = A_0 \ln \rho + B_0,$$

$$V_n(\rho, \varphi) = (A_n \rho^{4n} + B_n \rho^{-4n}) \cos 4n\varphi, \quad n \in \mathbb{N},$$

є частинними розв'язками рівняння Лапласа (8.7), що справджують однорідні крайові умови з (8.8). Тоді загальний розв'язок рівняння Лапласа (8.7), що справджує однорідні крайові умови з (8.8), запишеться у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків

$$V(\rho, \varphi) = A_0 \ln \rho + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \rho^{4n} + B_n \rho^{-4n}) \cos 4n\varphi. \quad (8.14)$$

Визначимо коефіцієнти ряду (8.14) таким чином, щоб він справджував і неоднорідні крайові умови з (8.8). Безпосередня підстановка (8.14) у згадані умови дає

$$V_\rho\left(\frac{1}{2}, \varphi\right) \equiv 2A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 4n \cdot (A_n \cdot 2^{1-4n} - B_n \cdot 2^{4n+1}) \cos 4n\varphi = 3 \cos 8\varphi, \quad (8.15)$$

$$V(1, \varphi) \equiv B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \cos 4n\varphi = 6.$$

Оскільки у правих частинах рівностей (8.15) фігурують лише власні функції (8.11) з точністю до числових коефіцієнтів (маємо резонансний випадок), то шляхом безпосереднього прирівнювання виразів при однакових власних функціях для шуканих коефіцієнтів ряду (8.14) одержуємо співвідношення:

$$\begin{cases} A_0 = 0, & B_0 = 6; \\ A_n + B_n = 0, & n \in \mathbb{N}, \\ 4n \cdot (A_n \cdot 2^{1-4n} - B_n \cdot 2^{4n+1}) = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}, \\ 3, & n = 2. \end{cases} \end{cases}$$

З останньої системи маємо  $A_n = B_n = 0$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ , а у випадку  $n = 2$  знаходимо

$$\begin{cases} A_2 + B_2 = 0, \\ \frac{A_2}{128} - 512B_2 = \frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow A_2 = \frac{48}{65537}, \quad B_2 = -\frac{48}{65537}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд (8.14), дістанемо розв'язок крайової задачі (8.7)-(8.8)

$$V(\rho, \varphi) = 6 + \frac{48}{65537} (\rho^8 - \rho^{-8}) \cos 8\varphi.$$

Тоді шуканий розв'язок задачі (8.1)-(8.2) отримується на підставі формули (8.6).

**Відповідь.**  $U(\rho, \varphi) = 6 + \frac{48}{65537} (\rho^8 - \rho^{-8}) \cos 8\varphi - \rho^2 \cos 2\varphi.$

Більше прикладів на розв'язування крайових задач для рівнянь еліптичного типу у кругових областях див. [2], стор. 157-163.

### Джерела:

- [1] Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – С. 196-209.
- [2] Перестюк М. О., Маринець В. В., Рего В. Л. Збірник задач з математичної фізики. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – С. 141-163.
- [3] Цикл лекцій по темах розділу – Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу.