

До Модуля 3

Практичне заняття по темах розділу:

ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Приклад 1. Знайти розподіл температури в однорідному ($a = 0,5$) необмеженому стрижні з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо початкова температура стрижня описується функцією

$$\varphi(x) = \begin{cases} 4, & x \geq 0, \\ 4e^{-x^2}, & x < 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Відповідна математична модель: знайти обмежений в області $\Omega = \{(t, x) | t > 0, x \in \mathbb{R}\}$ розв'язок задачі Коші для однорідного рівняння теплопровідності

$$\begin{aligned} U_t &= 0,25U_{xx}, \\ U(0, x) &= \varphi(x) = \begin{cases} 4, & x \geq 0, \\ 4e^{-x^2}, & x < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Як відомо (див. [3], Тема 2), розв'язок задачі Коші (1.1) подається формулою Пуассона, яка з урахуванням заданих значень $a = 0,5$ і початкової температури набуває вигляду

$$U(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{4}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{t} - \xi^2} d\xi + \frac{4}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{t}} d\xi. \quad (1.2)$$

Для обчислення першого інтеграла в формулі (1.2) виділимо в показнику степеня експоненти повний квадрат за змінною ξ . Одержимо:

$$\begin{aligned} -\frac{(\xi-x)^2}{t} - \xi^2 &= -\frac{\xi^2(t+1) - 2\xi x + x^2}{t} = -\frac{\left[\xi\sqrt{t+1} - \frac{x}{\sqrt{t+1}}\right]^2 - \frac{x^2}{t+1} + x^2}{t} = \\ &= -\frac{[\xi(t+1) - x]^2}{t(t+1)} - \frac{x^2}{t+1}. \end{aligned}$$

Таким чином, перший інтеграл із формули (1.2) перепишеться у вигляді

$$I_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{t} - \xi^2} d\xi = \frac{4e^{-\frac{x^2}{t+1}}}{\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{[\xi(t+1) - x]^2}{t(t+1)}} d\xi. \quad (1.3)$$

Введемо підстановку

$$\alpha = \frac{\xi(t+1) - x}{\sqrt{t(t+1)}}, \quad d\xi = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}} d\alpha.$$

Тоді з (1.3) маємо

$$I_1 = \frac{4e^{-\frac{x^2}{t+1}}}{\sqrt{\pi(t+1)}} \cdot \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{t(t+1)}}} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{4e^{-\frac{x^2}{t+1}}}{\sqrt{\pi(t+1)}} \cdot \left[\int_{-\infty}^0 e^{-\alpha^2} d\alpha + \int_0^{-\frac{x}{\sqrt{t(t+1)}}} e^{-\alpha^2} d\alpha \right] =$$

$$= \frac{4e^{-\frac{x^2}{t+1}}}{\sqrt{\pi(t+1)}} \cdot \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi\left(-\frac{x}{\sqrt{t(t+1)}}\right) \right] = \frac{2e^{-\frac{x^2}{t+1}}}{\sqrt{t+1}} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t(t+1)}}\right) \right],$$

де $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$ – «інтеграл помилок». Зауважимо, що в процесі останніх

перетворень ми скористалися відомим значенням невласного інтеграла

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ а також непарністю функції «інтеграла помилок»}.$$

Для обчислення другого інтеграла з формули (1.2) введемо підстановку

$$\alpha = \frac{\xi - x}{\sqrt{t}}, \quad d\xi = \sqrt{t} d\alpha.$$

Тоді маємо

$$I_2 = \frac{4}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{t}} d\xi = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[\int_{-\frac{x}{\sqrt{t}}}^0 e^{-\alpha^2} d\alpha + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \right] =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[- \int_0^{-\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \right] = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[-\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi\left(-\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right] = 2 \cdot \left[1 + \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right].$$

Зауважимо, що в процесі останніх перетворень ми скористалися відомим значенням

невласного інтеграла $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, а також непарністю функції «інтеграла

помилки».

Згідно з формулою (1.2) шуканий розв'язок задачі Коші (1.1) є сумою обчислених інтегралів: $U(t, x) = I_1 + I_2$.

Відповідь. $U(t, x) = \frac{2e^{-\frac{x^2}{t+1}}}{\sqrt{t+1}} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t(t+1)}}\right) \right] + 2 \cdot \left[1 + \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right]$, де $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$.

Більше прикладів на розв'язування задач Коші для рівняння теплопровідності – див. [2], стор. 119-121.

Приклад 2. Зінтегрувати мішану задачу та дати її фізичну інтерпретацію:

$$\begin{aligned} U_t &= U_{xx} - U, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ U(0, x) &= -2e^{-x}, \quad x \geq 0, \\ U_x(t, 0) &= 2e^{-t}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Розв'язання. Фізична інтерпретація: знайти розподіл температури в однорідному ($a = 1$) напівобмеженому стрижні, якщо початкова температура стрижня рівна $-2e^{-x}$, на кінці стрижня $x = 0$ заданий тепловий потік $-2k\sigma e^{-t}$, де k – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, σ – площа поперечного перерізу стрижня, а через бічну поверхню стрижня проходить теплообмін ($b = 1$) із довкіллям нульової температури. Для застосування формул, виведених у лекційному матеріалі [3], спершу необхідно звести задачу (2.1) до задачі зі спрощеним рівнянням і однорідною крайовою умовою. На першому кроці розв'язання спростимо рівняння заміною (див. [3], Тема 4, Зауваження 2)

$$U(t, x) = e^{-bt} \cdot V(t, x) = e^{-t} \cdot V(t, x), \quad (2.2)$$

де $V(t, x)$ нова невідома функція. Підставляючи (2.2) в (2.1), маємо

$$\begin{aligned} -e^{-t} \cdot V + e^{-t} \cdot V_t &= e^{-t} \cdot V_{xx} - e^{-t} \cdot V, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ V(0, x) &= -2e^{-x}, \quad x \geq 0, \\ e^{-t} \cdot V_x(t, 0) &= 2e^{-t}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Виконавши спрощення в отриманих рівностях, дістанемо мішану задачу для нової невідомої функції $V(t, x)$:

$$\begin{aligned} V_t &= V_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ V(0, x) &= -2e^{-x}, \quad x \geq 0, \\ V_x(t, 0) &= 2, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

На другому кроці розв'язання зведемо задачу (2.3) з неоднорідною крайовою умовою другого роду до задачі з однорідною крайовою умовою заміною (див. [3], Тема 4, Зауваження 3)

$$V(t, x) = Z(t, x) - 2e^{-x}. \quad (2.4)$$

де $Z(t, x)$ нова невідома функція. Підставляючи (2.4) в (2.3), маємо

$$\begin{aligned} Z_t &= Z_{xx} - 2e^{-x}, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ Z(0, x) - 2e^{-x} &= -2e^{-x}, \quad x \geq 0, \\ Z_x(t, 0) + 2 &= 2, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Виконавши спрощення в отриманих рівностях, дістанемо мішану задачу для нової невідомої функції $Z(t, x)$:

$$\begin{aligned} Z_t &= Z_{xx} - 2e^{-x}, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ Z(0, x) &= 0, \quad x \geq 0, \\ Z_x(t, 0) &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для розв'язання мішаної задачі (2.5) застосуємо метод відображень (див. [3], Тема 4), тобто побудуємо еквівалентну задачу Коші шляхом парного продовження (оскільки маємо крайову умову другого роду) початкових функцій на від'ємну піввісь:

$$Z(t, x) = W(t, x)|_{x \geq 0},$$

де $W(t, x)$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{aligned} W_t &= W_{xx} + f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ W(0, x) &= \varphi(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

причому

$$f(t, x) = \begin{cases} -2e^{-x}, & x \geq 0, \\ -2e^x & x < 0. \end{cases}$$

Для побудови розв'язку задачі Коші (2.6) скористаємося виведеною в лекційному матеріалі (див. [3], Тема 3) формулою розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння теплопровідності, яка з урахуванням даних задачі (2.6) набуває вигляду

$$\begin{aligned} W(t, x) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi + \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, \xi) \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau = \\ &= -\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)} + \xi} d\xi + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)} - \xi} d\xi \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для обчислення внутрішніх інтегралів у формулі (2.7) виділимо в показниках степеня експонент повні квадрати за змінною ξ . Одержимо:

$$\begin{aligned} -\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)} \pm \xi &= -\frac{\xi^2 - 2\xi[x \pm 2(t-\tau)] + x^2}{4(t-\tau)} = -\frac{[\xi - x \mp 2(t-\tau)]^2 - [x \pm 2(t-\tau)]^2 + x^2}{4(t-\tau)} = \\ &= -\frac{[\xi - x \mp 2(t-\tau)]^2}{4(t-\tau)} \pm x + t - \tau. \end{aligned}$$

Таким чином, формула 2.7 перепишеться у вигляді

$$W(t, x) = -\int_0^t \frac{e^{t-\tau}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left[e^x \cdot \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{[\xi-x-2(t-\tau)]^2}{4(t-\tau)}} d\xi + e^{-x} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\frac{[\xi-x+2(t-\tau)]^2}{4(t-\tau)}} d\xi \right] d\tau. \quad (2.8)$$

Запишемо підстановку для обох внутрішніх інтегралів у вигляді

$$\alpha = \frac{\xi - x \mp 2(t-\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}, \quad d\xi = 2\sqrt{t-\tau} d\alpha.$$

Тоді з (2.8) маємо

$$W(t, x) = -\int_0^t \frac{2e^{t-\tau}}{\sqrt{\pi}} \left[e^x \cdot \int_{-\infty}^{-\frac{x+2(t-\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}} e^{-\alpha^2} d\alpha + e^{-x} \cdot \int_{\frac{x-2(t-\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}}{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \right] d\tau. \quad (2.9)$$

Обчислимо внутрішні інтеграли в формулі (2.9), скориставшись методом розбиття на два проміжки інтегрування, проілюстрованим у Прикладі 1:

$$\int_{-\infty}^{\frac{x+2(t-\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}} e^{-\alpha^2} d\alpha = \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha^2} d\alpha + \int_0^{\frac{x+2(t-\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi\left(\frac{x+2(t-\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right),$$

$$\int_{-\frac{x-2(t-\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \int_{-\frac{x-2(t-\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}}^0 e^{-\alpha^2} d\alpha + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi\left(\frac{x-2(t-\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Підставивши знайдені значення у (2.9), дістанемо розв'язок задачі Коші (2.6), який в області $x \geq 0$ співпадає з розв'язком мішаної задачі (2.5), тобто маємо

$$\begin{aligned} Z(t,x) &= -\int_0^t e^{t-\tau} \cdot \left[2\operatorname{ch}x - e^x \cdot \Phi\left(\frac{x+2(t-\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) + e^{-x} \cdot \Phi\left(\frac{x-2(t-\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \right] d\tau = \\ &= 2(1 - e^t) \operatorname{ch}x + \int_0^t e^{t-\tau} \cdot \left[e^x \cdot \Phi\left(\frac{x+2(t-\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) - e^{-x} \cdot \Phi\left(\frac{x-2(t-\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Формулу (2.10) залишаємо як остаточну, тому що залишковий інтеграл за змінною τ очевидно не знаходиться в явному вигляді.

Підставивши (2.10) у формулу (2.4), а (2.4) у свою чергу – у формулу (2.2), одержимо шуканий розв'язок мішаної задачі (2.1): $U(t,x) = e^{-t} \cdot V(t,x) = e^{-t} \cdot [Z(t,x) - 2e^{-x}]$.

Відповідь.

$$U(t,x) = \int_0^t e^{-\tau} \cdot \left[e^x \cdot \Phi\left(\frac{x+2(t-\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) - e^{-x} \cdot \Phi\left(\frac{x-2(t-\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \right] d\tau + 2(e^{-t} - 1) \operatorname{ch}x - 2e^{-(x+t)},$$

де $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$.

Більше прикладів на розв'язування мішаних задач для напівобмеженого стрижня – див. [2], стор. 122-125.

Джерела:

- [1] Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – С. 175-195.
- [2] Перестюк М. О., Маринець В. В., Рего В. Л. Збірник задач з математичної фізики. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – С. 119-126.
- [3] Цикл лекцій по темах розділу «Задачі Коші для рівняння теплопровідності».