Курс: «Рівняння в частинних похідних та їх застосування» **ст. викл. Рего В. Л.**
До Модуля 3
Цикл лекцій по темах розділу:

ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

1. Постановка задачі Коші для одновимірного рівняння теплопровідності

Розглянемо однорідний стрижень досить великої довжини, всередині якого відбувається процес поширення тепла. Якщо дослідження цього процесу проводиться тільки для деякої ділянки даного стрижня, яка знаходиться на значній відстані від його кінців, то очевидно, що протягом певного проміжку часу розподіл температури на цій ділянці не залежатиме від теплових режимів на кінцях стрижня.
У задачах такого типу стрижень зазвичай вважають необмеженим. Математичною моделлю такої задачі є ***задача Коші*** для одновимірного рівняння теплопровідності, яка не містить крайових умов.

Розглянемо задачу: знайти розподіл температури в однорідному необмеженому стрижні з теплоізольованою бічною поверхнею, всередині якого діють джерела тепла інтенсивності $c\rho f(t,x)$, де c – питома теплоємність, ρ – густина стрижня, якщо початкова температура стрижня рівна $\varphi(x)$.
Відповідна математична модель: в області $\Omega = \{(t,x) \mid t>0, x\in \mathrm{R}\}$ знайти обмежений розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності

$$U_t = a^2 U_{xx} + f(t,x), \tag{1.1}$$

який задовольняє початкову умову

$$U(0,x) = \varphi(x), \quad x\in \mathrm{R}, \tag{1.2}$$

де $f(t,x)$, $\varphi(x)$ – відомі функції, неперервні й обмежені в областях Ω та $x\in \mathrm{R}$ відповідно.
Справедлива наступна

Теорема 1.1 ***(про єдиність розв'язку задачі Коші)***. Якщо в класі обмежених у всьому фазовому просторі Ω функцій існує розв'язок задачі Коші (1.1)-(1.2), то він є єдиним.

2. Існування розв'язку задачі Коші для однорідного рівняння теплопровідності

Розглянемо задачу: знайти розподіл температури в однорідному необмеженому стрижні з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо початкова температура стрижня рівна $\varphi(x)$.
Відповідна математична модель: в області $\Omega = \{(t,x) \mid t>0, x\in \mathrm{R}\}$ знайти обмежений розв'язок ДРЧП

$$U_t = a^2 U_{xx}, \tag{2.1}$$

який справджує початкову умову (1.2), де $\varphi(x)$ – відома неперервна й обмежена в області $x \in \mathrm{R}$ функція.

Для побудови розв'язку задачі Коші (2.1)-(1.2) застосуємо вже відомий метод відокремлення змінних. Згідно з цим методом розв'язок шукається у вигляді добутку двох функцій

$$U(t,x) = T(t) \cdot X(x) \neq 0, \tag{2.2}$$

кожна з яких знаходиться окремо з урахуванням рівняння (2.1) та умови (1.2).

Підставивши (2.2) у рівняння (2.1), одержимо:

$$T'(t) \cdot X(x) = a^2 T(t) \cdot X''(x).$$

Відокремивши змінні шляхом ділення лівої та правої частин останньої рівності на величину $a^2 T(t) \cdot X(x) \neq 0$, маємо

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Одержана рівність виконується для всіх $(t,x) \in \Omega$ тільки тоді, коли

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = const,$$

звідки маємо

$$T'(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0; \tag{2.3}$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0. \tag{2.4}$$

Дослідимо існування обмежених розв'язків рівняння (2.4) за аналогією з дослідженням задачі Штурма-Ліувілля. Для цього зауважимо, що характеристичне рівняння для ДР зі сталими коефіцієнтами (2.4)

$$k^2 - \lambda = 0$$

залежно від значення параметра λ може мати дійсні різні, кратні або комплексні корені. Тому для повного дослідження слід розглянути три випадки.

1. Нехай $\lambda > 0$. Тоді $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ і загальний розв'язок рівняння (2.4) запишеться у вигляді $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Ця функція є обмеженою при $x \in \mathrm{R}$ тільки за умови $C_1 = C_2 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$, тобто у випадку $\lambda > 0$ рівняння (2.4) не має ненульових обмежених розв'язків.

2. Нехай $\lambda = 0$. Тоді $k_{1,2} = 0$, $X(x) = C_3 x + C_4$. Ця функція є обмеженою при $x \in \mathrm{R}$ за умови $C_3 = 0$, тобто у випадку $\lambda = 0$ ненульовий обмежений розв'язок рівняння (2.4) має вигляд $X(x) = C_4$.

3. При $\lambda < 0$ $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}i$ і загальний розв'язок рівняння (2.4) запишеться у вигляді $X(x) = C_5 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_6 \sin\sqrt{-\lambda}x$. Очевидно, що ця функція є обмеженою при $x \in \mathrm{R}$ незалежно від значень параметра λ і сталих C_5, C_6.

Покладемо задля зручності $\lambda = -\mu^2$, $\mu \in [0,+\infty)$. Тоді, об'єднавши випадки $\lambda = 0$ та $\lambda < 0$, можемо записати ненульові обмежені розв'язки рівняння (2.4) у загальному вигляді

$$X(x) = \gamma_1 \cos \mu x + \gamma_2 \sin \mu x, \quad \mu \in [0,+\infty).$$

Підставивши знайдені значення параметра λ у (2.3), отримаємо рівняння для визначення функцій $T(t)$

$$T'(t)+(a\mu)^2T(t)=0, \quad \mu\in[0,+\infty),$$

загальний розв'язок якого

$$T(t)=\gamma_3\,\mathrm{e}^{-(a\mu)^2 t}, \quad \mu\in[0,+\infty),$$

де γ_3 – довільна стала, очевидно є обмеженою функцією при $t\geq 0$.

Згідно з (2.2) функції

$$U(\mu,t,x)=\mathrm{e}^{-(a\mu)^2 t}\cdot[A(\mu)\cos\mu x+B(\mu)\sin\mu x], \quad \mu\in[0,+\infty),$$

де $A(\mu)=\alpha_1\alpha_3$, $B(\mu)=\alpha_2\alpha_3$ – довільні сталі, залежні від параметра μ, є частинними розв'язками ДРЧП (2.1). Тоді з урахуванням лінійності й однорідності ДРЧП (2.1) його загальний розв'язок запишеться у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків, яку з урахуванням області зміни параметра можна подати в інтегральній формі

$$U(t,x)=\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(a\mu)^2 t}\cdot[A(\mu)\cos\mu x+B(\mu)\sin\mu x]d\mu. \tag{2.5}$$

Визначимо коефіцієнти інтеграла (2.5) таким чином, щоб він справджував початкову умову (1.2). Підстановка (2.5) в (1.2) дає

$$\varphi(x)=\int\limits_0^{+\infty}[A(\mu)\cos\mu x+B(\mu)\sin\mu x]d\mu. \tag{2.6}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів із рівності (2.6) подамо функцію $\varphi(x)$ інтегралом Фур'є:

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\mu(\xi-x)d\xi d\mu=\\&=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\cos\mu x\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\mu\xi d\xi+\sin\mu x\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\mu\xi d\xi\right]d\mu.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Порівнюючи (2.7) і (2.6), маємо

$$A(\mu)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\mu\xi d\xi, \quad B(\mu)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\mu\xi d\xi.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у (2.5), одержимо

$$U(t,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,\mathrm{e}^{-(a\mu)^2 t}\cdot\cos\mu(\xi-x)d\xi d\mu,$$

або після зміни порядку інтегрування

$$U(t,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(a\mu)^2 t}\cdot\cos\mu(\xi-x)d\mu d\xi. \tag{2.8}$$

Обчислимо внутрішній інтеграл у формулі (2.8):

$$\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(a\mu)^2 t}\cdot\cos\mu(\xi-x)d\mu=\mathrm{Re}\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(a\mu)^2 t+i\mu(\xi-x)}\,d\mu=$$

$$= \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{-\left[a\sqrt{t}\mu-\frac{i(\xi-x)}{2a\sqrt{t}}\right]^2-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\mu = e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\cdot\mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{-\left[a\sqrt{t}\mu-\frac{i(\xi-x)}{2a\sqrt{t}}\right]^2}d\mu .$$

В останньому інтегралі введемо підстановку

$$a\sqrt{t}\mu-\frac{i(\xi-x)}{2a\sqrt{t}}=\alpha,\quad d\mu=\frac{d\alpha}{a\sqrt{t}}.$$

Тоді маємо

$$e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\cdot\mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{-\left[a\sqrt{t}\mu-\frac{i(\xi-x)}{2a\sqrt{t}}\right]^2}d\mu = e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\cdot\mathrm{Re}\int_{-\frac{i(\xi-x)}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha^2}}{a\sqrt{t}}d\alpha =$$

$$= e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha^2}}{a\sqrt{t}}d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}.$$

Зауважимо, що на останньому кроці обчислень ми скористалися відомим значенням невласного інтеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\sqrt{\pi}\quad\Rightarrow\quad\int_0^{+\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\int_{-\infty}^{0}e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{2.9}$$

Підклавши обчислене значення внутрішнього інтеграла у формулу (2.8), одержимо розв'язок задачі Коші (2.1)-(1.2) у вигляді

$$U(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi. \tag{2.10}$$

Формула (2.10) називається ***формулою Пуассона***.
Справедлива наступна

Теорема 2.1 ***(обґрунтування формули Пуассона)***. Якщо в початковій умові (1.2) функція $\varphi(x)$ є неперервною й обмеженою при $x\in\mathrm{R}$, тоді єдиний у класі неперервних і обмежених у всьому фазовому просторі Ω функцій розв'язок задачі Коші (2.1)-(1.2) дається формулою Пуассона (2.10).

3. Побудова розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння теплопровідності

Повернемося знову до задачі, поставленої в Темі 1: в області $\Omega=\{(t,x)\,|\,t>0,x\in\mathrm{R}\}$ знайти обмежений розв'язок неоднорідного рівняння теплопровідності (1.1), який справджує початкову умову (1.2).
Розв'язок задачі Коші (1.1)-(1.2) будемо шукати у вигляді суми двох функцій

$$U(t,x)=Z(t,x)+V(t,x), \tag{3.1}$$

де $Z(t,x)$, $V(t,x)$ – розв'язки задач Коші

$$\begin{aligned} &Z_t=a^2Z_{xx},\quad (t,x)\in\Omega,\\ &Z(0,x)=\varphi(x),\quad x\in\mathrm{R}; \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} &V_t = a^2 V_{xx} + f(t,x), \quad (t,x) \in \Omega, \\ &V(0,x) = 0, \quad x \in \mathrm{R}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Задача (3.2) очевидно аналогічна вже розв'язаній задачі (2.1)-(1.2), тож її розв'язок подається формулою Пуассона (2.10).

Для розв'язання задачі Коші (3.3) застосуємо уже відомий із теми «Вимушені коливання необмеженої струни» ***принцип Дюгамеля***. Розв'язок згаданої задачі будемо шукати у вигляді ***інтеграла Дюгамеля***

$$V(t,x) = \int_0^t W(t-\tau,x)d\tau\,, \tag{3.4}$$

де $W(t-\tau,x)$ знаходиться із задачі Коші

$$\begin{aligned} &W_t = a^2 W_{xx}, \quad t-\tau > 0, \quad x \in \mathrm{R}, \\ &W(t-\tau,x)\big|_{t=\tau} = f(\tau,x), \quad x \in \mathrm{R}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Зауважимо, що інтеграл Дюгамеля (3.4) очевидно справджує початкову умову задачі (3.3). Підставляючи (3.4) у рівняння задачі (3.3), маємо:

$$W(t-\tau,x)\big|_{\tau=t} + \int_0^t W_t(t-\tau,x)d\tau = a^2 \int_0^t W_{xx}(t-\tau,x)d\tau + f(t,x)$$

або в еквівалентному вигляді

$$W(t-\tau,x)\big|_{\tau=t} + \int_0^t [W_t - a^2 W_{xx}]d\tau = f(t,x)\,.$$

Остання рівність є тотожністю на підставі (3.5), а це й означає, що інтеграл Дюгамеля (3.4) справді дає розв'язок задачі Коші (3.3).

Оскільки (3.5) є задачею Коші для однорідного рівняння теплопровідності, то її розв'язок дається формулою Пуассона (2.10), яка у випадку задачі (3.5) набуває вигляду

$$W(t-\tau,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau,\xi)\cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\xi\,. \tag{3.6}$$

Підклавши (3.6) у (3.4), а потім функції $Z(t,x)$ у вигляді (2.10) та $V(t,x)$ у вигляді (3.4) у формулу (3.1), одержимо розв'язок задачі Коші (1.1)-(1.2):

$$U(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}\,d\xi + \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau,\xi)\cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\xi d\tau\,. \tag{3.7}$$

Справедлива наступна

Теорема 3.1 ***(про неперервну залежність розв'язку задачі Коші від початкової температури та інтенсивності джерел тепла)***. Нехай $U_1(t,x)$, $U_2(t,x)$ із класу обмежених у всьому фазовому просторі Ω функцій є розв'язками задач Коші

$$\begin{aligned} &U_{i_t} = a^2 U_{i_{xx}} + f_i(t,x), \quad (t,x) \in \Omega, \\ &U_i(0,x) = \varphi_i(x), \quad x \in \mathrm{R} \end{aligned} \qquad (i = 1,2)\,,$$

де $f_i(t,x)$, $\varphi_i(x)$, $i=1,2$ – відомі функції, неперервні й обмежені в областях Ω та $x\in\mathrm{R}$ відповідно.
Тоді $\forall\varepsilon,t_1>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon,t_1)>0$, що як тільки

$$|f_1(t,x)-f_2(t,x)|<\delta,\quad (t,x)\in\Omega_1=\{0<t<t_1,x\in\mathrm{R}\},$$
$$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|<\delta,\quad x\in\mathrm{R},$$

то

$$|U_1(t,x)-U_2(t,x)|<\varepsilon\quad\forall(t,x)\in\Omega_1.$$

Зауважимо, що інтеграли, які входять у формули (2.10) та (3.7), у деяких простіших випадках вдається обчислити безпосередньо шляхом зведення до невласного інтеграла типу (2.9) або подання результату через так званий «інтеграл помилок»

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z \mathrm{e}^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

4. Поширення тепла в напівобмеженому стрижні з теплоізольованою бічною поверхнею

Розглянемо однорідний стрижень досить великої довжини з теплоізольованою бічною поверхнею, всередині якого відбувається процес поширення тепла. Якщо дослідження цього процесу проводиться тільки для деякої ділянки даного стрижня, яка знаходиться біля одного з його кінців на значній відстані від другого кінця, то очевидно, що протягом певного проміжку часу розподіл температури на цій ділянці не залежатиме від теплового режиму на дальшому кінці стрижня.
У задачах такого типу стрижень зазвичай вважають напівобмеженим із кінцем у початку координат. Математичною моделлю такої задачі є мішана задача для одновимірного рівняння теплопровідності з однією крайовою умовою, заданою в точці з абсцисою $x=0$.

Розглянемо задачу: знайти закон розподілу температури в однорідному ($c\rho=1$) напівобмеженому стрижні з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо всередині стрижня діють джерела тепла сумарної інтенсивності $f(t,x)$, початкова температура стрижня задана функцією $\varphi(x)$, а на його кінці (у точці з абсцисою $x=0$)

1) заданий закон зміни температури $\mu(t)$;
2) заданий тепловий потік $\nu(t)$, що поступає у стрижень через поперечний переріз σ;
3) відбувається теплообмін із довкіллям температури $\gamma(t)$ з коефіцієнтом зовнішньої теплопровідності $\alpha>0$.

Зауважимо: у випадку $\mu(t)\equiv 0$ кажуть, що кінець стрижня ***підтримується при нульовій температурі***; якщо ж $\nu(t)\equiv 0$, то кінець називають ***теплоізольованим***.
Відповідна математична модель: в області $\Omega=\{(t,x)\,|\,t>0,x>0\}$ знайти розв’язок одновимірного рівняння теплопровідності

$$U_t=a^2U_{xx}+f(t,x),\tag{4.1}$$

який задовольняє початкову умову

$$U(0,x)=\varphi(x), \quad x\ge 0, \tag{4.2}$$

та одну з відповідних крайових умов:

$$U(t,0)=\mu(t), \quad t\ge 0, \tag{4.3}$$

$$-k\sigma U_x(t,0)=\nu(t), \quad t\ge 0, \tag{4.4}$$

де k – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, або

$$U_x(t,0)-h[U(t,0)-\gamma(t)]=0, \quad t\ge 0, \tag{4.5}$$

де $h=\alpha k^{-1}$.

Задачі (4.1)-(4.2)-(4.3), (4.1)-(4.2)-(4.4), (4.1)-(4.2)-(4.5) називаються відповідно першою, другою та третьою мішаними задачами для напівобмеженого стрижня.

Якщо початкова та крайова умови не суперечні, тобто, наприклад, у випадку крайової умови першого роду (4.3)

$$\mu(0)=\varphi(0),$$

а за крайової умови другого роду (4.4)

$$\nu(0)=-k\sigma\varphi'(0),$$

то кажуть, що початкова та крайова умови є ***узгодженими***, тобто мішана задача поставлена коректно.

Для розв’язання першої та другої мішаних задач для напівобмеженого стрижня використовують уже знайомі з розділу «Мішані задачі для напівобмеженої струни» методи парного та непарного продовження, які в сукупності називають ***методом відображень***. Суть цих методів полягає у зведенні мішаної задачі для напівобмеженого стрижня до еквівалентної задачі Коші. Тому їх застосування можливе тільки в тому випадку, якщо всі початкові дані й сам розв’язок задачі є неперервними й обмеженими функціями у відповідних областях їх задання (це випливає з обґрунтування алгоритмів побудови розв’язків задач Коші, викладених у Темах 2-3).

Метод непарного продовження. Розглянемо задачу: знайти розподіл температури в однорідному напівобмеженому стрижні з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо початкова температура стрижня рівна $\varphi(x)$, а кінець стрижня $x=0$ підтримується при нульовій температурі.

Відповідна математична модель: в області $\Omega=\{(t,x)\,|\,t>0, x>0\}$ знайти розв’язок однорідного рівняння теплопровідності

$$U_t=a^2U_{xx}, \tag{4.6}$$

який справджує початкову умову (4.2) та крайову умову

$$U(t,0)=0, \quad t\ge 0. \tag{4.7}$$

Для розв’язання поставленої задачі застосуємо метод непарного продовження: побудуємо відповідну до мішаної задачі (4.6)-(4.2)-(4.7) задачу Коші шляхом непарного продовження початкової функції на від’ємну піввісь $x<0$. Маємо:

$$\begin{aligned} &V_t=a^2V_{xx}, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}, \\ &V(0,x)=\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\ge 0,\\ -\varphi(-x), & x<0.\end{cases}\end{aligned} \tag{4.8}$$

Покажемо, що в області $x \geq 0$ задача Коші (4.8) еквівалентна мішаній задачі (4.6)-(4.2)-(4.7). Для цього достатньо показати, що розв'язок задачі Коші (4.8) $V(t,x)$ справджує крайову умову (4.7), адже рівняння й початкова умова в розглядуваній області співпадають.

Як відомо, розв'язок задачі Коші (4.8) дається формулою Пуассона

$$V(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) \cdot e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \, d\xi. \tag{4.9}$$

Підставивши в (4.9) значення $x = 0$, одержимо

$$V(0,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) \cdot e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \, d\xi = 0,$$

що випливає з непарності підінтегральної функції як добутку непарної та парної функцій, і симетричності проміжку інтегрування. Отже, в області $x \geq 0$ задача Коші (4.8) еквівалентна мішаній задачі (4.6)-(4.2)-(4.7), а тому розв'язком останньої мішаної задачі буде функція

$$U(t,x) = V(t,x)\big|_{x \geq 0}.$$

Зауважимо, що з (4.9) можна отримати й безпосередню розрахункову формулу для знаходження розв'язку задачі Коші (4.8). Із урахуванням початкової умови задачі (4.8) маємо:

$$V(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[\int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \, d\xi - \int_{-\infty}^{0} \varphi(-\xi) \cdot e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \, d\xi \right].$$

Ввівши в другому інтегралі підстановку $\eta = -\xi$, $d\xi = -d\eta$, дістанемо

$$V(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[\int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \, d\xi + \int_{+\infty}^{0} \varphi(\eta) \cdot e^{-\frac{(\eta + x)^2}{4a^2 t}} \, d\eta \right],$$

звідки після зведення двох інтегралів до одного одержимо остаточну формулу:

$$V(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot \left[e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(\xi + x)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi. \tag{4.10}$$

Метод парного продовження. Розглянемо задачу: знайти закон зміни температури в однорідному напівобмеженому стрижні з теплоізольованими бічною поверхнею та кінцем $x = 0$, якщо початкова температура стрижня рівна $\varphi(x)$.

Відповідна математична модель: в області $\Omega = \{(t,x) \mid t > 0, x > 0\}$ знайти розв'язок однорідного рівняння теплопровідності (4.6), який справджує початкову умову (4.2) та крайову умову

$$U_x(t,0) = 0, \quad t \geq 0. \tag{4.11}$$

Для розв'язання поставленої задачі застосуємо метод парного продовження: побудуємо відповідну до мішаної задачі (4.6)-(4.2)-(4.11) задачу Коші шляхом парного продовження початкової функції на від'ємну піввісь $x < 0$. Маємо:

$$V_t = a^2 V_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathrm{R},$$
$$V(0,x) = \Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \ge 0, \\ \varphi(-x), & x < 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

Покажемо, що в області $x \ge 0$ задача Коші (4.12) еквівалентна мішаній задачі (4.6)-(4.2)-(4.11). Для цього достатньо показати, що розв’язок задачі Коші (4.12) $V(t,x)$ справджує крайову умову (4.11), адже рівняння й початкові умови в розглядуваній області співпадають.

Як відомо, розв’язок задачі Коші (4.12) дається формулою Пуассона (4.9). Для підстановки в крайову умову (4.11) знайдемо похідну

$$V_x(t,x) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi t^3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)\cdot(\xi - x)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}\, d\xi. \tag{4.13}$$

Підставивши в (4.13) значення $x = 0$, одержимо

$$V_x(t,0) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi t^3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)\cdot\xi\cdot \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}}\, d\xi = 0,$$

що випливає з непарності підінтегральної функції як добутку двох парних і однієї непарної функцій, і симетричності проміжку інтегрування. Отже, в області $x \ge 0$ задача Коші (4.12) еквівалентна мішаній задачі (4.6)-(4.2)-(4.11), а тому розв’язком останньої мішаної задачі буде функція

$$U(t,x) = V(t,x)\big|_{x \ge 0}.$$

Зауважимо, що з (4.9) можна отримати й безпосередню розрахункову формулу для знаходження розв’язку задачі Коші (4.12). Із урахуванням початкової умови задачі (4.12) маємо:

$$V(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\int_0^{+\infty} \varphi(\xi)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}\, d\xi + \int_{-\infty}^{0} \varphi(-\xi)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}\, d\xi\right].$$

Ввівши в другому інтегралі підстановку $\eta = -\xi$, $d\xi = -d\eta$, дістанемо

$$V(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\int_0^{+\infty} \varphi(\xi)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}\, d\xi - \int_{+\infty}^{0} \varphi(\eta)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(\eta+x)^2}{4a^2 t}}\, d\eta\right],$$

звідки після зведення двох інтегралів до одного одержимо остаточну формулу:

$$V(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi)\cdot\left[\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} + \mathrm{e}^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2 t}}\right] d\xi. \tag{4.14}$$

Висновок. Отже, для того, щоб розв’язати мішану задачу (4.6)-(4.2)-(4.7) або (4.6)-(4.2)-(4.11), достатньо знайти розв’язок відповідної задачі Коші (4.8) або (4.12), і обмежити його «нефіктивною» областю $x \ge 0$. Для знаходження розв’язку задачі Коші (4.8) або (4.12) можна скористатися виведеними розрахунковими формулами (4.10) і (4.14) відповідно.

Зауваження 1. У випадку мішаної задачі для неоднорідного рівняння теплопровідності вигляду (4.1)-(4.2)-(4.7) або (4.1)-(4.2)-(4.11) для побудови еквівалентної задачі Коші слід вводити відповідно непарне або парне продовження не тільки початкової температури $\varphi(x)$, але й інтенсивності внутрішніх джерел тепла $f(t,x)$. Тоді для знаходження розв'язку еквівалентної задачі Коші замість формули Пуассона (2.10) використовують формулу (3.7).

Зауваження 2. Якщо бічна поверхня стрижня не теплоізольована, тобто рівняння поширення тепла у напівобмеженому стрижні має вигляд

$$U_t = a^2 U_{xx} - bU + f_1(t,x),$$

де $b = const > 0$, то це рівняння слід спершу звести до вигляду (4.1) підстановкою

$$U(t,x) = \mathrm{e}^{-bt} \cdot V(t,x),$$

де $V(t,x)$ нова невідома функція.

Зауваження 3. У випадку мішаної задачі для напівобмеженого стрижня з неоднорідною крайовою умовою вигляду (4.3) або (4.4) для застосування методу відображень задану крайову умову необхідно звести до однорідної. Це завжди можна зробити, підібравши деяку обмежену допоміжну функцію, яка справджує цю крайову умову. Зокрема, підстановкою $U(t,x) = V(t,x) + \mu(t)$ зоднорідню́ється крайова умова (4.3), а підстановкою $U(t,x) = V(t,x) + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}\,\nu(t)}{k\sigma}$ – крайова умова (4.4).

Джерела:

[1] *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – С. 175-195.
[2] *Перестюк М. О., Маринець В. В., Рего В. Л.* Збірник задач з математичної фізики. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – С. 119-126.