МЕТОД ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ ДЛЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Зауважимо, що в темах 5-6 використовується нумерація, введена в Циклі лекцій №1 (теми 1-4 даного розділу)[1].

5. Загальна мішана задача для рівняння теплопровідності

Означення 1. ***Загальною мішаною задачею*** для рівняння теплопровідності називається мішана задача для цього рівняння з неоднорідними (загалом залежними від часу *t*) крайовими умовами.

Правило інтегрування загальної мішаної задачі. Якщо у мішаній задачі хоча б одна з крайових умов неоднорідна (загалом залежна від часу *t*), тоді для застосування методу відокремлення змінних необхідно спершу звести крайові умови до однорідних. Розв’язок шукаємо у вигляді суми

$$U(t,x) = V(t,x) + \omega(t,x), \qquad (5.1)$$

де $V(t,x)$ – нова невідома функція, а допоміжну функцію $\omega(t,x)$ підбираємо таким чином, щоб вона справджувала крайові умови вихідної задачі. Тоді для функції $V(t,x)$ одержимо одну з розглянутих вище (див. Цикл лекцій №1 до даного розділу) мішану задачу для однорідного або неоднорідного рівняння теплопровідності, до якої за умови її коректної постановки можна застосувати метод Фур’є.

Правила знаходження допоміжної функції. Допоміжну функцію $\omega(t,x)$ рекомендується шукати у наступному вигляді:

а) $\omega(t,x) = a(t)x^2 + b(t)x$, якщо крайові умови мають вигляд

$$U_x(t,0) = \nu_1(t), \ \ U_x(t,l) = \nu_2(t), \quad t \ge 0; \qquad (5.2)$$

б) $\omega(t,x) = a(t)x + b(t)$ за крайових умов будь-якого іншого вигляду.

У обох випадках коефіцієнти $a(t)$ і $b(t)$ визначаються з крайових умов.

Для ілюстрації наведених правил розглянемо задачу: в області $\Omega = \{(t,x) \,|\, t > 0, 0 < x < l\}$ знайти розв’язок одновимірного рівняння теплопровідності

$$U_t = a^2 U_{xx} + f_1(t,x), \qquad (5.3)$$

який задовольняє початкову умову

$$U(0,x) = \varphi_1(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (5.4)$$

[1] Теми розділів «Метод відокремлення змінних для рівняння коливань струни» і «Метод відокремлення змінних для рівнянь параболічного типу» викладені за єдиним планом із метою більш наочної ілюстрації аналогій у типах мішаних задач і алгоритмах методу Фур’є для рівняння коливань струни та рівняння теплопровідності, адже чітке усвідомлення таких аналогій на мою думку є суттєвим для кращого засвоєння навчального матеріалу. – *Ст. викл. Рего В. Л.*

та крайові умови

$$U(t,0)=\mu_1(t),\quad U(t,l)=\mu_2(t),\quad t\ge 0. \tag{5.5}$$

Крайові умови (5.5) неоднорідні та залежні від часу, тому маємо загальну мішану задачу. Для застосування методу відокремлення змінних необхідно спершу звести задачу (5.3)-(5.4)-(5.5) до задачі з однорідними крайовими умовами підстановкою (5.1), де $V(t,x)$ – нова невідома функція, а допоміжна функція $\omega(t,x)$ повинна справджувати крайові умови (4.5), тобто

$$\omega(t,0)=\mu_1(t),\quad \omega(t,l)=\mu_2(t),\quad t\ge 0. \tag{5.6}$$

Крайові умови (5.5) відмінні від (5.2), тому допоміжну функцію шукаємо за правилом ***б)*** у вигляді $\omega(t,x)=a(t)x+b(t)$. Коефіцієнти знаходяться безпосередньою підстановкою у (5.6):

$$\omega(t,0)\equiv b(t)=\mu_1(t),\quad \omega(t,l)\equiv a(t)l+b(t)=\mu_2(t),\quad t\ge 0,$$

звідки

$$b(t)=\mu_1(t),\quad a(t)=\frac{\mu_2(t)-\mu_1(t)}{l},$$

тобто

$$\omega(t,x)=\mu_1(t)+xl^{-1}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right].$$

Тоді підстановка (5.1) запишеться у вигляді

$$U(t,x)=V(t,x)+\mu_1(t)+xl^{-1}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]. \tag{5.7}$$

Введемо підстановку (5.7) у рівняння (5.1), початкові умови (5.2) та крайові умови (5.3). Маємо:

$$\begin{gathered}
V_t+\mu_1'(t)+xl^{-1}\left[\mu_2'(t)-\mu_1'(t)\right]=a^2V_{xx}+f_1(t,x),\\
V(0,x)+\mu_1(0)+xl^{-1}\left[\mu_2(0)-\mu_1(0)\right]=\varphi_1(x),\\
V(t,0)+\mu_1(t)+0\cdot l^{-1}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=\mu_1(t),\\
V(t,l)+\mu_1(t)+l\cdot l^{-1}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=\mu_2(t).
\end{gathered}$$

Після спрощення останніх рівностей отримаємо мішану задачу для визначення нової невідомої функції $V(t,x)$:

$$\begin{aligned}
&V_t=a^2V_{xx}+f(t,x),\quad (t,x)\in\Omega,\\
&V(0,x)=\varphi(x),\quad 0\le x\le l,\\
&V(t,0)=0,\quad V(t,l)=0,\quad t\ge 0,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

де $f(t,x)=f_1(t,x)-\mu_1'(t)-xl^{-1}\left[\mu_2'(t)-\mu_1'(t)\right]$, $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\mu_1(0)-xl^{-1}\left[\mu_2(0)-\mu_1(0)\right]$. Задача (5.8) очевидно аналогічна уже розглянутій мішаній задачі для неоднорідного рівняння теплопровідності (2.1)-(2.2)-(3.2), і її розв’язок дається формулою (4.11). Отже, шуканий розв’язок загальної мішаної задачі (5.3)-(5.4)-(5.5) визначається формулою (5.7), де $V(t,x)$ записується у вигляді (4.11) з урахуванням виражень функцій $f(t,x)$ та $\varphi(x)$ та через задані в умові задачі величини.

Приклад 5.1. Знайти допоміжну функцію $\omega(t,x)$ для випадку загальної мішаної задачі з крайовими умовами вигляду (5.2).

Розв’язання. Допоміжна функція $\omega(t,x)$ повинна справджувати крайові умови (5.2), тобто

$$\omega_x(t,0) = \nu_1(t), \quad \omega_x(t,l) = \nu_2(t), \quad t \ge 0. \qquad (5.9)$$

У випадку крайових умов (5.2) допоміжну функцію шукаємо за правилом ***а)*** у вигляді $\omega(t,x) = a(t)x^2 + b(t)x$. Коефіцієнти знаходяться безпосередньою підстановкою в (5.9):

$$\omega_x(t,0) \equiv b(t) = \nu_1(t), \quad \omega_x(t,l) \equiv 2a(t)l + b(t) = \nu_2(t), \quad t \ge 0,$$

звідки

$$b(t) = \nu_1(t), \quad a(t) = \frac{\nu_2(t) - \nu_1(t)}{2l},$$

тобто

$$\omega(t,x) = x\nu_1(t) + 0{,}5x^2 l^{-1}[\nu_2(t) - \nu_1(t)].$$

Відповідь. $\omega(t,x) = x\nu_1(t) + 0{,}5x^2 l^{-1}[\nu_2(t) - \nu_1(t)]$.

Приклад 5.2. Звести до задачі з однорідними крайовими умовами загальну мішану задачу

$$U_t = U_{xx} + x^3 + x, \quad (t,x) \in \Omega_{l=1},$$

$$U(0,x) = 4\cos\frac{3\pi}{2}x, \quad 0 \le x \le 1,$$

$$U_x(t,0) = t, \quad U(t,1) = 2t, \quad t \ge 0.$$

Розв'язання. Розв'язок наведеної загальної мішаної задачі шукаємо у вигляді (5.1), де допоміжна функція $\omega(t,x)$ повинна справджувати задані крайові умови

$$\omega_x(t,0) = t, \quad \omega(t,1) = 2t, \quad t \ge 0. \qquad (5.10)$$

Крайові умови (5.10) відмінні від (5.2), тому допоміжну функцію шукаємо за правилом ***б)*** у вигляді $\omega(t,x) = a(t)x + b(t)$. Коефіцієнти знаходяться безпосередньою підстановкою в (5.10):

$$\omega_x(t,0) \equiv a(t) = t, \quad \omega(t,1) \equiv a(t) + b(t) = 2t, \quad t \ge 0,$$

звідки

$$a(t) = t, \quad b(t) = t,$$

тобто

$$\omega(t,x) = t(x+1).$$

Тоді підстановка (5.1) запишеться у вигляді

$$U(t,x) = V(t,x) + t(x+1). \qquad (5.11)$$

Введемо підстановку (5.11) у рівняння, початкові та крайові умови вихідної задачі. Маємо:

$$V_t + x + 1 = V_{xx} + x^3 + x,$$

$$V(0,x) = 4\cos\frac{3\pi}{2}x,$$

$$V_x(t,0) + t = t, \quad V(t,1) + 2t = 2t.$$

Зауважимо, що початкова умова для $V(t,x)$ не змінилася тому, що $\omega(0,x) = 0$. Після спрощення останніх рівностей отримаємо мішану задачу для визначення нової невідомої функції $V(t,x)$:

$$
\begin{aligned}
&V_t = V_{xx} + x^3 - 1, \quad (t,x) \in \Omega_{l=1}, \\
&V(0,x) = 4\cos\frac{3\pi}{2}x, \quad 0 \le x \le 1, \\
&V_x(t,0) = 0, \quad V(t,1) = 0, \quad t \ge 0.
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

Відповідь. Вихідна загальна мішана задача зводиться до задачі з однорідними крайовими умовами (5.12) підстановкою (5.11).

6. Задача зі стаціонарними неоднорідностями для рівняння теплопровідності

Означення 2. Мішана задача для рівняння теплопровідності називається ***задачею зі стаціонарними неоднорідностями***, якщо вільний член у рівнянні і крайові умови не залежать явно від змінної часу.
Задача зі стаціонарними неоднорідностями є частинним випадком загальної мішаної задачі, однак метод її інтегрування має свою специфіку.

Правило інтегрування задачі зі стаціонарними неоднорідностями. Якщо у мішаній задачі вільний член у рівнянні і крайові умови не залежать явно від змінної часу, тоді розв’язок шукаємо у вигляді суми

$$
U(t,x) = V(t,x) + \omega(x), \tag{6.1}
$$

де $V(t,x)$ – нова невідома функція, а допоміжну функцію $\omega(x)$, яка у випадку рівняння теплопровідності має назву ***стаціонарної температури***, підбираємо таким чином, щоб вона справджувала не тільки крайові умови, а й рівняння вихідної задачі. Тоді для функції $V(t,x)$ однозначно одержимо розглянуту вище (див. Цикл лекцій №1 до даного розділу) мішану задачу для однорідного рівняння теплопровідності, до якої за умови її коректної постановки можна застосувати метод Фур’є.

Зауваження до знаходження стаціонарної температури. Стаціонарна температура $\omega(x)$ визначається з крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку, яка для деяких типів крайових умов, зокрема якщо крайові умови вихідної задачі мають вигляд (5.2), може не мати розв’язку. У такому випадку – якщо стаціонарна температура не існує – вихідну задачу зі стаціонарними неоднорідностями слід інтегрувати як загальну мішану задачу (див. тему 5).

Для ілюстрації наведених правил розглянемо задачу: в області $\Omega = \{(t,x) \mid t > 0, 0 < x < l\}$ знайти розв’язок одновимірного рівняння теплопровідності

$$
U_t = a^2 U_{xx} + f(x), \tag{6.2}
$$

який задовольняє початкову умову (5.4) та крайові умови

$$
U(t,0) = \mu_1 = const, \quad U(t,l) = \mu_2 = const, \quad t \ge 0. \tag{6.3}
$$

Вільний член у рівнянні і крайові умови (6.3) не залежать явно від змінної часу, тому маємо задачу зі стаціонарними неоднорідностями. Для застосування методу відокремлення змінних необхідно спершу звести задачу (6.2)-(5.4)-(6.3) до однорідної підстановкою (6.1), де $V(t,x)$ – нова невідома функція, а стаціонарна температура $\omega(x)$ має справджувати рівняння (6.2) та крайові умови (6.3), тобто має бути розв'язком наступної крайової задачі (отримується шляхом безпосередньої підстановки):

$$\begin{gathered} a^2\omega''(x)+f(x)=0, \\ \omega(0)=\mu_1, \quad \omega(l)=\mu_2. \end{gathered} \tag{6.4}$$

Зінтегруємо крайову задачу (6.4). Із рівняння маємо

$$\omega''=-\frac{f(x)}{a^2} \quad\Rightarrow\quad \omega'=-\frac{1}{a^2}\int_0^x f(\xi)d\xi+C_1 \quad\Rightarrow\quad \omega=-\frac{1}{a^2}\int_0^x (x-\xi)f(\xi)d\xi+C_1x+C_2 .$$

З урахуванням крайових умов

$$\omega(0)=\mu_1 \quad\Rightarrow\quad C_2=\mu_1 ,$$

$$\omega(l)=\mu_2 \quad\Rightarrow\quad C_1=\frac{\mu_2-\mu_1}{l}+\frac{1}{a^2 l}\int_0^l (l-\xi)f(\xi)d\xi .$$

Отже, крайова задача (6.4) має єдиний розв'язок, тобто існує стаціонарна температура

$$\omega(x)=-\frac{1}{a^2}\int_0^x (x-\xi)f(\xi)d\xi+\left[\frac{\mu_2-\mu_1}{l}+\frac{1}{a^2 l}\int_0^l (l-\xi)f(\xi)d\xi\right]x+\mu_1 . \tag{6.5}$$

Введемо підстановку (6.1) у рівняння (6.2), початкову умову (5.4) та крайові умови (6.3). Маємо:

$$\begin{gathered} V_t=a^2[V_{xx}+\omega''(x)]+f(x), \\ V(0,x)+\omega(x)=\varphi_1(x), \\ V(t,0)+\omega(0)=\mu_1, \;\; V(t,l)+\omega(l)=\mu_2 . \end{gathered}$$

Після спрощення останніх рівностей з урахуванням (6.4) отримаємо мішану задачу для визначення нової невідомої функції $V(t,x)$:

$$\begin{aligned} &V_t=a^2V_{xx}, \quad (t,x)\in\Omega, \\ &V(0,x)=\varphi(x), \quad 0\le x\le l, \\ &V(t,0)=0, \quad V(t,l)=0, \quad t\ge 0, \end{aligned} \tag{6.6}$$

де $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\omega(x)$, а стаціонарна температура $\omega(x)$ визначається формулою (6.5). Задача (6.6) очевидно аналогічна уже розглянутій мішаній задачі для однорідного рівняння теплопровідності (3.1)-(2.2)-(3.2), і її розв'язок дається формулою (3.14). Отже, шуканий розв'язок задачі зі стаціонарними неоднорідностями (6.2)-(5.4)-(6.3) визначається формулою (6.1), де $V(t,x)$ записується у вигляді (3.14) з урахуванням вираження функції $\varphi(x)$ через задані в умові задачі величини, а стаціонарна температура $\omega(x)$ подається формулою (6.5).

Приклад 6.1. Визначити умову існування стаціонарної температури у випадку задачі зі стаціонарними неоднорідностями для рівняння (6.2) з початковою умовою (5.4) та стаціонарними крайовими умовами вигляду (5.2)

$$U_x(t,0)=\nu_1=const\,, \;\; U_x(t,l)=\nu_2=const\,, \;\; t\ge 0 .$$

Розв'язання. Стаціонарна температура $\omega(x)$ має бути розв'язком крайової задачі (отримується шляхом безпосередньої підстановки):

$$\begin{aligned} &a^2\omega''(x) + f(x) = 0, \\ &\omega'(0) = \nu_1, \quad \omega'(l) = \nu_2 . \end{aligned} \tag{6.8}$$

Загальний розв'язок рівняння з (6.8) аналогічний уже отриманому для задачі (6.4):

$$\omega(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x (x-\xi) f(\xi) d\xi + C_1 x + C_2, \tag{6.9}$$

а його перша похідна рівна

$$\omega'(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x f(\xi) d\xi + C_1 . \tag{6.10}$$

Підставимо функцію (6.10) у крайові умови задачі (6.8). Маємо

$$\omega'(0) = \nu_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \nu_1 ,$$

$$\omega'(l) = \nu_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \nu_2 + \frac{1}{a^2}\int_0^l f(\xi) d\xi .$$

Крайова задача (6.8) очевидно має розв'язок лише тоді, коли значення сталої C_1, визначені з двох останніх рівностей, співпадатимуть. У цьому випадку існує стаціонарна температура у вигляді (6.9), де сталій C_2 можна надавати будь-якого значення. У протилежному випадку стаціонарна температура не існує, а тому відповідну задачу зі стаціонарними неоднорідностями слід інтегрувати як загальну мішану задачу.

Відповідь. Стаціонарна температура для вихідної задачі існує тільки за виконання умови

$$\nu_1 = \nu_2 + \frac{1}{a^2}\int_0^l f(\xi) d\xi .$$

Приклад 6.2. Знайти стаціонарну температуру для мішаної задачі

$$U_t = 4U_{xx} - 24x, \quad (t,x) \in \Omega_{l=1},$$

$$U(0,x) = 2x+1, \quad 0 \le x \le 1,$$

$$U(t,0) = 1, \quad U_x(t,1) = 2, \quad t \ge 0$$

і звести задачу до однорідної.

Розв'язання. Розв'язок наведеної задачі зі стаціонарними неоднорідностями шукаємо у вигляді (6.1), де стаціонарна температура $\omega(x)$ має справджувати рівняння та крайові умови вихідної задачі, тобто має бути розв'язком наступної крайової задачі (отримується шляхом безпосередньої підстановки):

$$\begin{aligned} &4\omega''(x) - 24x = 0, \\ &\omega(0) = 1, \quad \omega'(1) = 2. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Розв'яжемо крайову задачу (6.11):

$$\omega''(x) = 6x \quad \Rightarrow \quad \omega'(x) = 3x^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad \omega(x) = x^3 + C_1 x + C_2 ;$$

$$\omega'(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad 3 + C_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1;$$

$$\omega(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1 .$$

Отже, стаціонарна температура для вихідної задачі рівна

$$\omega(x) = x^3 - x + 1,$$

а підстановка (6.1) запишеться у вигляді

$$U(t,x) = V(t,x) + x^3 - x + 1. \qquad (6.12)$$

Введемо підстановку (6.12) у рівняння, початкові та крайові умови вихідної мішаної задачі. Маємо:

$$V_t = 4[V_{xx} + 6x] - 24x,$$
$$V(0,x) + x^3 - x + 1 = 2x + 1,$$
$$V(t,0) + 1 = 1, \quad V_x(t,1) + 3 - 1 = 2.$$

Після спрощення останніх рівностей отримаємо мішану задачу для визначення нової невідомої функції $V(t,x)$:

$$\begin{aligned} &V_t = 4V_{xx}, \quad (t,x) \in \Omega_{l=1}, \\ &V(0,x) = 3x - x^3, \quad 0 \le x \le 1, \\ &V(t,0) = 0, \quad V_x(t,1) = 0, \quad t \ge 0. \end{aligned} \qquad (6.13)$$

Відповідь. Стаціонарна температура рівна $\omega(x) = x^3 - x + 1$; вихідна задача зі стаціонарними неоднорідностями зводиться до однорідної задачі (6.13) підстановкою (6.12).

Джерела:

[1] *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – С. 159-174.

[2] *Перестюк М. О., Маринець В. В., Рего В. Л.* Збірник задач з математичної фізики. – Кам’янець-Подільський: Аксіома, 2012. – С. 105-119.