

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОБМЕЖЕНОЇ СТРУНИ. МЕТОД ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

1. Постановка мішаних задач для обмеженої струни

Розглянемо задачу: вивчити процес коливань однорідної обмеженої струни довжини l під дією рівномірно розподіленої уздовж струни зовнішньої сили інтенсивності $f(t, x)$, якщо початкове відхилення точок струни рівне $\varphi(x)$, їх початкова швидкість рівна $\psi(x)$, а на кінцях струни (в точках з абсцисами $x = 0$ та $x = l$) задані одні з наступних коливних режимів:

1) кінці струни рухаються згідно з заданими законами $\mu_1(t)$ та $\mu_2(t)$ відповідно;

2) на кінці струни діють сили $v_1(t)$ та $v_2(t)$ відповідно;

3) кінці струни пружно закріплені.

Зауважимо: у випадку $\mu_1(t) = \mu_2(t) \equiv 0$ кажуть, що кінці струни **нерухомо (жорстко) закріплені**; якщо ж $v_1(t) = v_2(t) \equiv 0$, то кінці називають **вільними**.

Відповідна математична модель: в області $\Omega = \{(t, x) \mid t > 0, 0 < x < l\}$ знайти розв'язок рівняння коливань струни

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(t, x), \quad (1.1)$$

який задовольняє початкові умови

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad U_t(0, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.2)$$

та одну з відповідних пар крайових умов:

$$U(t, 0) = \mu_1(t), \quad U(t, l) = \mu_2(t), \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

$$-TU_x(t, 0) = v_1(t), \quad TU_x(t, l) = v_2(t) \quad t \geq 0, \quad (1.4)$$

де T – величина сили натягу, або

$$U_x(t, 0) - h_1[U(t, 0) - \gamma_1(t)] = 0, \quad U_x(t, l) + h_2[U(t, l) - \gamma_2(t)] = 0 \quad t \geq 0, \quad (1.5)$$

де $h_i = \alpha_i T^{-1}$, $\alpha_i = \text{const} > 0$ – коефіцієнти жорсткості пружин, $\gamma_i(t)$, $i = 1, 2$ – закони руху вільного кінця відповідної пружини.

Задачі (1.1)-(1.2)-(1.3), (1.1)-(1.2)-(1.4), (1.1)-(1.2)-(1.5) називаються відповідно першою, другою та третьою мішаними задачами для обмеженої струни.

Якщо початкові та крайові умови не суперечні, тобто, наприклад, у випадку крайових умов першого роду (1.3)

$$\mu_1(0) = \varphi(0), \quad \mu_1'(0) = \psi(0), \quad \mu_2(0) = \varphi(l), \quad \mu_2'(0) = \psi(l),$$

то кажуть, що початкові та крайові умови є **узгодженими**, тобто мішана задача поставлена коректно.

2. Вільні коливання обмеженої струни. Метод відокремлення змінних

Розглянемо задачу: знайти закон вільних коливань однорідної обмеженої струни довжини l із нерухомо закріпленими кінцями, якщо початкове відхилення точок струни рівне $\varphi(x)$, а їх початкова швидкість рівна $\psi(x)$.

Відповідна математична модель: в області $\Omega = \{(t, x) \mid t > 0, 0 < x < l\}$ знайти розв'язок ДРЧП

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad (2.1)$$

який справджує початкові умови (1.2) та крайові умови

$$U(t, 0) = 0, \quad U(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

Будемо вважати, що задача (2.1)-(1.2)-(2.2) поставлена коректно, тобто виконуються умови узгодженості у вигляді

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (2.3)$$

Для побудови розв'язку мішаної задачі (2.1)-(1.2)-(2.2) застосуємо так званий метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Згідно з цим методом розв'язок шукається у вигляді добутку двох функцій

$$U(t, x) = T(t) \cdot X(x) \neq 0, \quad (2.4)$$

кожна з яких знаходиться окремо з урахуванням рівняння (2.1) та умов (1.2), (2.2). Підставивши (2.4) у рівняння (2.1), одержимо:

$$T''(t) \cdot X(x) = a^2 T(t) \cdot X''(x).$$

Відокремивши змінні шляхом ділення лівої та правої частин останньої рівності на величину $a^2 T(t) \cdot X(x) \neq 0$, маємо

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Одержана рівність виконується для всіх $(t, x) \in \Omega$ тільки тоді, коли

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \text{const},$$

звідки маємо

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0; \quad (2.5)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0. \quad (2.6)$$

Підставивши (2.4) у крайові умови (2.2), одержимо

$$T(t) \cdot X(0) = 0, \quad T(t) \cdot X(l) = 0,$$

звідки, враховуючи, що $T(t) \neq 0$, маємо

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (2.7)$$

Означення 1. Ті значення параметра λ , для яких задача (2.6)-(2.7) має нетривіальні (тобто ненульові) розв'язки, називаються **власними значеннями**, а відповідні нетривіальні розв'язки цієї задачі – **власними функціями**.

Означення 2. Задача (2.6)-(2.7) знаходження власних значень і власних функцій називається **задачею Штурма-Ліувілля** (ЗШЛ).

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (2.6)-(2.7). Для цього зауважимо, що характеристичне рівняння для ДР зі сталими коефіцієнтами (2.6)

$$k^2 - \lambda = 0$$

залежно від значення параметра λ може мати дійсні різні, кратні або комплексні корені. Тому для повного дослідження слід розглянути три випадки.

1. Нехай $\lambda > 0$. Тоді $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ і загальний розв'язок рівняння (2.6) запишеться у вигляді $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Підставивши цей розв'язок у крайові умови (2.7), одержимо лінійну однорідну систему відносно невідомих сталих C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи $\Delta = -2\text{sh}\sqrt{\lambda}l \neq 0$, оскільки $\sqrt{\lambda}l > 0$. Отже, $C_1 = C_2 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$, тобто у випадку $\lambda > 0$ власних значень не існує.

2. Нехай $\lambda = 0$. Тоді $k_{1,2} = 0$, $X(x) = C_3x + C_4$ і з крайових умов (2.7) одержимо:

$$\begin{cases} C_4 = 0; \\ C_3l + C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки $C_3 = C_4 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$ і $\lambda = 0$ також не є власним значенням.

3. При $\lambda < 0$ $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}i$ і загальний розв'язок рівняння (2.6) запишеться у вигляді $X(x) = C_5 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_6 \sin\sqrt{-\lambda}x$. Із крайових умов (2.7) одержимо:

$$\begin{cases} C_5 = 0; \\ C_6 \sin\sqrt{-\lambda}l + C_5 \cos\sqrt{-\lambda}l = 0, \end{cases}$$

звідки $C_5 = 0$ і $C_6 \sin\sqrt{-\lambda}l = 0$. Отже, нетривіальний розв'язок задачі (2.6)-(2.7) існує тільки для тих значень параметра λ , які є розв'язками тригонометричного рівняння

$\sin\sqrt{-\lambda}l = 0$, звідки $\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$. Тоді відповідні власні функції матимуть вигляд

(беремо для визначеності $C_6 = 1$)

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Підставивши знайдені власні значення у (2.5), отримаємо рівняння для визначення функцій $T(t)$

$$T_n''(t) + \left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.9)$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi na}{l}t + B_n \sin\frac{\pi na}{l}t, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.10)$$

де A_n, B_n – довільні сталі.

Згідно з (2.4) функції

$$U_n(t, x) = \left(A_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + B_n \sin \frac{\pi n a}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n \in \mathbb{N},$$

є частинними розв'язками ДРЧП (2.1), що справджують крайові умови (2.2). Тоді з урахуванням лінійності й однорідності ДРЧП (2.1) та крайових умов (2.2) загальний розв'язок ДРЧП (2.1), що справджує крайові умови (2.2), запишеться у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + B_n \sin \frac{\pi n a}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.11)$$

Визначимо коефіцієнти ряду (2.11) таким чином, щоб він справджував початкові умови (1.2). Підстановка (2.11) в (1.2) дає

$$U(0, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x), \quad U_t(0, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n a}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x = \psi(x). \quad (2.12)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів із системи (2.12) розкладемо функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ у ряди Фур'є (вважаючи це можливим) по системі власних функцій (2.8) на проміжку $x \in [0, l]$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.13)$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами

$$\alpha_n = \frac{\int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi}{\int_0^l \sin^2 \frac{\pi n}{l} \xi d\xi} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad \beta_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Порівнюючи ряди (2.12) і (2.13), маємо

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a} \beta_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у (2.9), одержимо розв'язок мішаної задачі (2.1)-(1.2)-(2.2) у вигляді

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \cos \frac{\pi n a}{l} t + \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{\pi n a}{l} t \right] \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.14)$$

Справедливі наступні теореми.

Теорема 2.1 (обґрунтування методу Фур'є для обмеженої струни). Якщо в початкових умовах (1.2) функція $\varphi(x)$ на проміжку $x \in [0, l]$ двічі неперервно-диференційовна, має кусково-неперервну третю похідну і справджує умови

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0,$$

а функція $\psi(x)$ на тому ж проміжку неперервно-диференційовна, має кусково-неперервну другу похідну і справджує умови узгодженості (2.3), тоді ряд (2.14)

збігається абсолютно й рівномірно в області $\bar{\Omega} = \{(t, x) \mid t \geq 0, 0 \leq x \leq l\}$, причому його

можна почленно диференціювати двічі за t і двічі за x , і отримані ряди збігаються абсолютно й рівномірно в області Ω .

Теорема 2.2 (про неперервну залежність розв'язку мішаної задачі для рівняння коливань струни від початкових даних). Нехай функції $U_1(t, x)$, $U_2(t, x)$ із класу $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ є розв'язками рівняння (2.1) і справджують однакові крайові умови (2.2), а в початковий момент часу

$$U_1(0, x) - U_2(0, x) = \varphi(x), \quad U_{1t}(0, x) - U_{2t}(0, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Тоді для всякого як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що як тільки

$$|\varphi(x)| < \delta, \quad |\varphi'(x)| < \delta, \quad |\psi(x)| < \delta \quad \forall x \in [0, l],$$

то

$$|U_1(t, x) - U_2(t, x)| < \varepsilon \quad \forall (t, x) \in \bar{\Omega}.$$

3. Вимушені коливання обмеженої струни. Метод відокремлення змінних

Розглянемо задачу: знайти закон вимушених коливань однорідної обмеженої струни довжини l із нерухомо закріпленими кінцями під дією рівномірно розподіленої уздовж струни зовнішньої сили інтенсивності $f(t, x)$, якщо початкове відхилення точок струни рівне $\varphi(x)$, а їх початкова швидкість рівна $\psi(x)$.

Відповідна математична модель: в області $\Omega = \{(t, x) | t > 0, 0 < x < l\}$ знайти розв'язок рівняння вимушених коливань струни (1.1), який справджує початкові умови (1.2) та крайові умови (2.2).

Розв'язок мішаної задачі (1.1)-(1.2)-(2.2) будемо шукати у вигляді суми двох функцій

$$U(t, x) = Z(t, x) + V(t, x), \quad (3.1)$$

де $Z(t, x)$, $V(t, x)$ – розв'язки мішаних задач

$$\begin{aligned} Z_{tt} &= a^2 Z_{xx}, \quad (t, x) \in \Omega, \\ Z(0, x) &= \varphi(x), \quad Z_t(0, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ Z(t, 0) &= 0, \quad Z(t, l) = 0, \quad t \geq 0; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} V_{tt} &= a^2 V_{xx} + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \\ V(0, x) &= 0, \quad V_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ V(t, 0) &= 0, \quad V(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Задача (3.2) очевидно аналогічна вже розв'язаній задачі (2.1)-(1.2)-(2.2), тож її розв'язок подається формулою (2.14).

Розв'язок другої задачі (3.3) будемо шукати у вигляді

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad (3.4)$$

де $X_n(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі (3.2). Оскільки остання задача аналогічна мішаній задачі (2.1)-(1.2)-(2.2), то можемо скористатися вже знайденими власними функціями (2.8), тобто записати ряд (3.4) як

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (3.5)$$

Функція (3.5) очевидно справджує крайові умови задачі (3.3). Залишилося визначити коефіцієнти $T_n(t)$ таким чином, щоб ряд (3.5) справджував неоднорідне рівняння та однорідні початкові умови задачі (3.3).

Будемо вважати, що функція $f(t, x)$ допускає розклад у ряд Фур'є по системі власних функцій (2.8) на проміжку $x \in [0, l]$, тобто подається у вигляді

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t, \xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (3.6)$$

Підставивши (3.5) і (3.6) у рівняння задачі (3.3), одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \sin \frac{\pi n}{l} x = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l} \right)^2 T_n(t) - f_n(t) \right] \sin \frac{\pi n}{l} x = 0.$$

Остання рівність можлива тоді й тільки тоді, коли

$$T_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l} \right)^2 T_n(t) = f_n(t), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Підставляючи (3.5) у початкові умови задачі (3.3), маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0,$$

звідки очевидно випливають початкові умови

$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Розв'яжемо задачі Коші (3.7)-(3.8) із застосуванням методу Лагранжа. Загальний розв'язок відповідного до (3.7) однорідного рівняння (2.9) має вигляд (2.10). Тоді згідно з методом варіації сталих загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.7) шукаємо у вигляді

$$T_n(t) = A_n(t) \cos \frac{\pi n a}{l} t + B_n(t) \sin \frac{\pi n a}{l} t, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.9)$$

де коефіцієнти $A_n(t)$, $B_n(t)$ знаходяться з системи Лагранжа

$$\begin{cases} A_n'(t) \cos \frac{\pi n a}{l} t + B_n'(t) \sin \frac{\pi n a}{l} t = 0, \\ \frac{\pi n a}{l} \left[-A_n'(t) \sin \frac{\pi n a}{l} t + B_n'(t) \cos \frac{\pi n a}{l} t \right] = f_n(t). \end{cases}$$

З останньої системи визначаємо

$$A_n'(t) = -\frac{l}{\pi n a} f_n(t) \sin \frac{\pi n a}{l} t \Rightarrow A_n(t) = -\frac{l}{\pi n a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi n a}{l} \tau d\tau + C_1,$$

$$B'_n(t) = \frac{l}{\pi na} f_n(t) \cos \frac{\pi na}{l} t \Rightarrow B_n(t) = \frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(\tau) \cos \frac{\pi na}{l} \tau d\tau + C_2.$$

Тоді на підставі (3.9)

$$T_n(t) = \left[-\frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi na}{l} \tau d\tau + C_1 \right] \cos \frac{\pi na}{l} t + \\ + \left[\frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(\tau) \cos \frac{\pi na}{l} \tau d\tau + C_2 \right] \sin \frac{\pi na}{l} t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Початкові умови (3.8) дають $C_1 = C_2 = 0$. Отже, розв'язки задач Коші (3.7)-(3.8) запишуться у вигляді

$$T_n(t) = -\frac{l}{\pi na} \int_0^t \sin \frac{\pi na}{l} \tau d\tau \cos \frac{\pi na}{l} t + \frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(\tau) \cos \frac{\pi na}{l} \tau d\tau \sin \frac{\pi na}{l} t = \\ = \frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(\tau) \left[\cos \frac{\pi na}{l} \tau \sin \frac{\pi na}{l} t - \sin \frac{\pi na}{l} \tau \cos \frac{\pi na}{l} t \right] d\tau = \\ = \frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi na}{l} (t - \tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді згідно з (3.5) розв'язком мішаної задачі (3.3) буде функція

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi na}{l} (t - \tau) d\tau \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (3.10)$$

Підставивши у (3.1) замість $Z(t, x)$ вираз (2.14), а замість $V(t, x)$ вираз (3.10) із урахуванням (3.6), одержимо розв'язок мішаної задачі (1.1)-(1.2)-(2.2)

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \cos \frac{\pi na}{l} t + \frac{2}{\pi na} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{\pi na}{l} t \right] \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi na} \int_0^t \int_0^l f(\tau, \xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{\pi na}{l} (t - \tau) d\tau \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (3.11)$$

Можна показати, що одержаний ряд (3.11) буде розв'язком поставленої задачі (1.1)-(1.2)-(2.2), якщо початкові функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ справджують умови Теорема 2.1, а функція $f(t, x)$ в області Ω неперервна, має неперервні похідні за змінною x до другого порядку включно і справджує умови

$$f(t, 0) = f(t, l) = 0, \quad t \geq 0.$$

Джерела:

- [1] Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – С. 108-120.
[2] Перестюк М.О., Маринець В.В., Рего В.Л. Збірник задач з математичної фізики. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – С. 78-90.