Курс: «Диференціальні рівняння» **ст. викл. Рего В. Л.**
До Модуля 3
Лекція на тему:

ЕКСПОНЕНТА МАТРИЦІ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Позначимо через $M_n(\mathrm{C})$ клас матриць розмірності $n \times n$ зі сталими (загалом кажучи, комплекснозначними) елементами.

Означення 1. ***Експонентою*** e^A матриці $A \in M_n(\mathrm{C})$ називається сума матричного ряду

$$\mathrm{e}^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots, \tag{1}$$

де E – одинична матриця. Ряд (1) є збіжним для будь-якої матриці $A \in M_n(\mathrm{C})$, а сума ряду e^A є матрицею тієї ж розмірності, що й A.

Властивості матричної експоненти:

1. Для кожної матриці $A \in M_n(\mathrm{C})$ справджується рівність:

$$\mathrm{e}^A = \lim_{m \to \infty} \left(E + \tfrac{1}{m} A\right).$$

2. Якщо матриці A та B комутують, тобто $AB = BA$, то

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B \cdot \mathrm{e}^A.$$

3. Матриця e^A є невиродженою для кожної $A \in M_n(\mathrm{C})$, оскільки

$$\det\ \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A},$$

де $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ – слід матриці A.

4. $(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$.

5. Експоненти подібних матриць є подібними матрицями, тобто якщо $A = HBH^{-1}$, то $\mathrm{e}^A = H\,\mathrm{e}^B H^{-1}$.

6. Для кожної невиродженої матриці $B \in M_n(\mathrm{C})$ існує така матриця A, що $B = \mathrm{e}^A$. Матрицю A називають логарифмом матриці B і записують $A = \ln B$.

7. Матриця $X(t) = \mathrm{e}^{At}$ є розв'язком лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX \tag{2}$$

за початкової умови

$$X(0) = E. \tag{3}$$

Нехай $\{x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)\}$, де $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ – n-вимірні вектори-стовпці, – деяка фундаментальна система частинних розв'язків (ФСЧР) системи (2). Складемо ***фундаментальну матрицю*** $X(t): n \times n$, $X(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t))$.

Означення 2. Фундаментальну матрицю $X(t)$, для якої виконується початкова умова $X(t_0)=E$, називають ***матрицантом*** системи (2), нормованим у точці $t=t_0$, і позначають $X(t,t_0)$.

Із властивостей експоненти матриці випливає: якщо відомий матрицант $X(t,0)$ системи (2), тобто матриця $X(t)=\mathrm{e}^{At}$, яка одержується як розв'язок задачі Коші (2), (3), тоді експонента матриці A рівна

$$\mathrm{e}^{A}=X(1).$$

Отже, обчислення експоненти матриці A можна проводити за наступною схемою:

1. Знаходимо власні значення матриці A і відповідну ФСЧР із системи (2).

2. Складаємо фундаментальну матрицю $X(t)$ системи (2).

3. Якщо для отриманої фундаментальної матриці не виконується умова (3), то нормалізуємо цю матрицю в точці $t=0$ шляхом знаходження такої сталої матриці C, для якої $X(0)\cdot C=E$. Тоді шуканий матрицант $X(t,0)=X(t)\cdot C$.

4. Отже, експонента матриці A рівна

$$\mathrm{e}^{A}=X(t,0)\big|_{t=1}. \tag{4}$$

Інший спосіб відшукання матрицанта $X(t,0)$ використовує канонічну жорданову форму матриці A.

Нехай $\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_m\}$ – множина всіх різних власних значень матриці A. Позначимо

$$J=\begin{pmatrix} J_{k_1(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_p(\lambda_m)} \end{pmatrix}$$

канонічну жорданову форму матриці A, де $J_k(\lambda_i)$ – жорданова клітина (жордановий блок) розмірності $k\times k$, що відповідає власному значенню λ_i. Ці клітини (блоки) формуються за наступними правилами:

а) кожному дійсному власному значенню λ, однократному в розумінні кореня характеристичного рівняння, відповідає один одновимірний блок

$$J_1(\lambda)=(\lambda);$$

б) кожній парі комплексно спряжених власних значень $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, однократних у розумінні коренів характеристичного рівняння, відповідають або два комплекснозначні блоки

$$J_1(\lambda_1)=(\alpha+i\beta),\quad J_1(\lambda_2)=(\alpha-i\beta),$$

або одна дійснозначна двовимірна жорданова клітина, що формується задля спрощення обчислень:

$$J_2(\lambda_{1,2})=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}; \tag{5}$$

в) k-кратному (у розумінні кореня характеристичного рівняння) дійсному власному значенню λ відповідають $s=n-\mathrm{rang}(A-\lambda E)$ жорданових клітин (по одній для кожного власного вектора), сумарна розмірність яких рівна k. Ці клітини записуються у вигляді:

$$J_p(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda \end{pmatrix},\quad J_p(\lambda): p\times p,$$

де λ позначає власний вектор, а одиниці – приєднані до нього вектори.

Нехай тепер H – матриця, складена з усіх власних і приєднаних векторів, що відповідають власним значенням $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_m$ матриці A:

$$H=(h_1,\ h_2,\ ...,\ h_n).$$

Задля спрощення обчислень у випадку комплексних власних векторів у матрицю H записуватимемо їх дійсну та уявну частини, тобто при $h_1=u+iv$, $h_2=u-iv$ за перші два стовпці матриці H будемо брати вектори u і v.
Тоді справджується рівність

$$H^{-1}AH=J, \tag{6}$$

звідки згідно з властивостями матричної експоненти

$$X(t,0)\equiv \mathrm{e}^{At}=H\,\mathrm{e}^{Jt}\,H^{-1}, \tag{7}$$

де

$$\mathrm{e}^{Jt}=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{J_{k_1}(\lambda_1)t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{J_{k_p}(\lambda_m)t} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

а матриці $\mathrm{e}^{J_p(\lambda)t}$ для дійсних λ визначаються згідно з формулами

$$\mathrm{e}^{J_p(\lambda)t}=\mathrm{e}^{\lambda t}\cdot\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ & 0 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(тут p – розмірність жорданової клітини). У випадку пари комплексно спряжених власних значень $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ жордановій клітині вигляду (5) відповідає блок

$$\mathrm{e}^{J_2(\alpha\pm i\beta)t}=\mathrm{e}^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

Обчисливши матрицант за формулою (7), експоненту матриці A знаходимо з рівності (4).

Таким чином, ще одна схема обчислення експоненти матриці A полягає в наступному:
1. Знаходимо власні значення матриці A.

2. Знаходимо власні та приєднані вектори, що відповідають знайденим власним значенням матриці A, і складаємо з них як зі стовпців матрицю перетворення H.
3. Будуємо канонічну жорданову форму матриці A за формулою (6). Зауважимо, що жорданова форма J легко виписується за відомими власними значеннями, тому формулу (6) можна використати просто як перевірку правильності обчислень на цьому етапі.
4. Знаходимо e^{Jt} у вигляді (8) за вказаними формулами для клітин цієї матриці.
5. За формулою (7) обчислюємо матрицант $X(t,0) = e^{At}$. Зауважимо, що для отриманої матриці повинна виконуватися умова (3), яку доцільно використати для перевірки правильності обчислень на цьому етапі.
6. Знаходимо експоненту матриці A з рівності (4).

Зауваження. Оскільки $X(t,0)$ є фундаментальною матрицею системи (2), то загальний розв'язок цієї системи можна записати у вигляді

$$X(t) = X(t,0)\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix},$$

де $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ – довільні сталі.

Аналогічно: оскільки $X(t,0)$ справджує умову (3), то розв'язок задачі Коші для системи (2) з довільною початковою умовою $X(0) = X_0$, де X_0 – заданий n-вимірний вектор-стовпець зі сталими елементами, знаходиться за формулою:

$$X(t) = X(t,0) \cdot X_0 .$$

Джерело: *Маринець К. В.* Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи диференціальних рівнянь першого порядку. – Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння», частина ІІ. – Ужгород: «Говерла», 2017. – С. 76-82.