

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ
ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ**

Постановка завдань:

1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі.
2. Записати множину розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного рівняння з частинними похідними першого порядку.
4. Знайти поверхню, що задовольняє вказане рівняння і проходить через задану криву.

Варіант 1

1. $\frac{dx}{2y-z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. 2. $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. 3. $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = 2x$ при $y = 1$.
4. $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x$, $x = 0$, $z = y^2$.

Варіант 2

1. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$. 2. $(x+2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. 3. $\frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = y$ при $x = 0$.
4. $x \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$, $y = 1$, $z = x^2$.

Варіант 3

1. $\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$. 2. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.
3. $2\sqrt{x} \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = y^2$ при $x = 1$. 4. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$, $x = 2$, $z = y^2 + 1$.

Варіант 4

1. $\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}$. 2. $(x-z) \frac{\partial u}{\partial x} + (y-z) \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.
3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = yz$ при $x = 1$. 4. $\operatorname{tg} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$, $y = x$, $z = x^3$.

Варіант 5

1. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{u} = \frac{dz}{x} = \frac{du}{y}$. 2. $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x - y$.

3. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x^2 + y^2$ при $z = 0$.

4. $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y)$, $x = 1$, $yz + 1 = 0$.

Варіант 6

1. $\frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{u-y} = \frac{du}{x-z}$. 2. $2x \frac{\partial z}{\partial x} + (y-x) \frac{\partial z}{\partial y} - x^2 = 0$.

3. $(x - 2e^y) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u(x, 0) = x$. 4. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$, $y = -2$, $z = x - x^2$.

Варіант 7

1. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$. 2. $xy \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = yz$. 3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u(x, 1, z) = xz$.

4. $yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy$, $x = a$, $y^2 + z^2 = a^2$.

Варіант 8

1. $\frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y}$. 2. $x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y + z$.

3. $xy \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = y$, $u(x, 0) = x^2$. 4. $z \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$, $x + y = 2$, $yz = 1$.

Варіант 9

1. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy + z}$. 2. $(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$.

3. $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = x - y$, $u(1, y) = y + e^y$. 4. $z \frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} + x = 0$, $y = x^2$, $z = 2x$.

Варіант 10

1. $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2 + 1}}$. 2. $2y^4 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = x\sqrt{z^2 + 1}$.

3. $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} = x^2$, $u(x, x) = 1 + \frac{x}{3}$. 4. $(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z - x) \frac{\partial z}{\partial y} = x - y$, $z = y = -x$.

Варіант 11

1. $\frac{dx}{x + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. 2. $x^2 z \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$.

3. $y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2$, $u|_{xy=1} = \frac{y^2}{1 + y^4}$. 4. $x \frac{\partial z}{\partial x} + (xz + y) \frac{\partial z}{\partial y} = z$, $x + y = 2z$, $xz = 1$.

Варіант 12

1. $\frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{z(z-y)} = \frac{dz}{y(y-z)}$. 2. $yz \frac{\partial z}{\partial x} - xz \frac{\partial z}{\partial y} = e^z$.
 3. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u - xy$, $u(x, 2) = 1 + x^2$. 4. $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$, $x - y = 0$, $x - yz = 1$.

Варіант 13

1. $-\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{xz}$. 2. $(z - y)^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy$.
 3. $x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} + 3z \frac{\partial u}{\partial z} = 4u$, $u(x, x, z) = z$. 4. $x \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = y$, $y = 2z$, $x + 2y = z$.

Варіант 14

1. $\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2 - xz}$. 2. $xy \frac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z) \frac{\partial z}{\partial y} = yz$.
 3. $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = 2x$ при $y = 1$. 4. $(y + 2z^2) \frac{\partial z}{\partial x} - 2x^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = x^2$, $x = z$, $y = x^2$.

Варіант 15

1. $\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = -\frac{dy}{y(z^2 + x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}$. 2. $y \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}$.
 3. $\frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = y$ при $x = 0$.
 4. $(x - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - z) \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$, $x - y = 2$, $z + 2x = 1$.

Варіант 16

1. $\frac{dx}{2y - z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. 2. $e^x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = ye^x$.
 3. $2\sqrt{x} \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = y^2$ при $y = 1$. 4. $xy^3 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 z^2 \frac{\partial z}{\partial y} = y^3 z$, $x = -z^3$, $y = z^2$.

Варіант 17

1. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$. 2. $\sin^2 x \frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{tg} z \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z$.
 3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = yz$ при $x = 1$. 4. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$, $y = x$, $z = x^2$.

Варіант 18

1. $\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}$. 2. $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = x+y$.
 3. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x^2 + y^2$ при $z = 0$. 4. $xy\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = yz$, $x = 1$, $z = 1 + y^2$.

Варіант 19

1. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{u} = \frac{dz}{x} = \frac{du}{y}$. 2. $(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x+yz)\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - z^2$.
 3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u(x,1,z) = xz$. 4. $\frac{\partial z}{\partial x} + (z-x^2)\frac{\partial z}{\partial y} = 2x$, $y = 2x^2$, $z = x^2 + x$.

Варіант 20

1. $\frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{u-y} = \frac{du}{x-z}$. 2. $(y+z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial z} = u$.
 3. $xy\frac{\partial u}{\partial x} + x^2\frac{\partial u}{\partial y} = y$, $u(x,0) = x^2$. 4. $y\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = yz$, $x = 0$, $z = -y^2$.

Варіант 21

1. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$. 2. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + (z+u)\frac{\partial u}{\partial z} = xy$.
 3. $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x - y$, $u(1,y) = y + e^y$. 4. $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + y$, $x = 3y^2$, $z = 4y^3$.

Варіант 22

1. $\frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y}$. 2. $(u-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (u-y)\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z} = x + y$.
 3. $x^2\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} = x^2$, $u(x,x) = 1 + \frac{x}{3}$. 4. $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 z$, $x = 2y$, $z = e^{0,5y^2}$.

Варіант 23

1. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy+z}$. 2. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
 3. $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2$, $u|_{xy=1} = \frac{y^2}{1+y^4}$. 4. $x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = z + 2x^2$, $y = \frac{1}{4} - x^2$, $z = x$.

Варіант 24

1. $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$. 2. $(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
 3. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u - xy$, $u(x,2) = 1 + x^2$. 4. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$, $y = x + 1$, $z = x + y$.

Варіант 25

$$1. -\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{xz}. \quad 2. xy \frac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z) \frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

$$3. \frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z = y \text{ при } x = 0. \quad 4. xy^3 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 z^2 \frac{\partial z}{\partial y} = y^3 z, \quad x = -z^3, \quad y = z^2.$$

Джерело: Маринець К. В. Стійкість систем звичайних диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку. – Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння», частина III. – Ужгород: «Говерла», 2017. – С. 44-50.

Примітка. Синім кольором позначені номери завдань із виявленими й виправленими друкарськими помилками.