МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Поляк І.Й.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З КУРСУ
ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ

Ужгород – 2007

РОЗДІЛ 1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Обчислити

$$z=(1-i)^{-10}(-\sqrt{3}+i)^9$$

Розв'язання. Маємо:

$$\arg(1-i)=-\frac{\pi}{4};\arg(-\sqrt{3}+i)=\pi-\alpha=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6};$$

$$|1-i|=\sqrt{2};\quad |-\sqrt{3}+i|=2$$

$$z=2^9(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})^9\cdot(\sqrt{2})^{-10}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]^{-10}=$$

$$=2^9(\cos\frac{45\pi}{6}+i\sin\frac{45\pi}{6})\cdot 2^{-5}(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2})=$$

$$=2^4(\cos\frac{20\pi}{2}+i\sin\frac{20\pi}{2})^9=16$$

Задача 2. Довести тотожність

$$\left|1-\bar{z}_1\cdot z_2\right|^2-\left|z_1-z_2\right|^2=(1-\left|z_1\right|^2)\cdot(1-\left|z_2\right|^2).$$

Розв'язання. Числа $z_1\neq 0$ і $z_2\neq 0$ запишемо в тригонометричній формі (якщо $z_1=0$ і $z_2=0$, то рівність очевидна). Маємо:

$$\overline{z_1}\cdot z_2=r_1\cdot r_2[\cos(\varphi_2-\varphi_1)+i\sin(\varphi_2-\varphi_1)];$$

$$\left|1-\bar{z}_1\cdot z_2\right|^2-\left|z_1-z_2\right|^2=[1-r_1\cdot r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)]^2+[r_1\cdot r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)]^2-$$

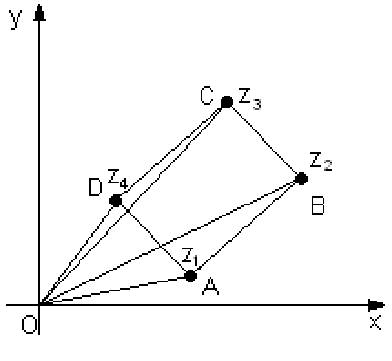
$$-(r_1\cos\varphi_1-r_2\cos\varphi_2)^2-(r_1\sin\varphi_1-r_2\sin\varphi_2)^2=1-2r_1\cdot r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)+$$

$$+r_1^2\cdot r_2^2\cos^2(\varphi_2-\varphi_1)+r_1^2\cdot r_2^2\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)-r_1^2\cos^2\varphi_1+2r_1\cdot r_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2-$$

$$-r_2^2\cos^2\varphi_2-r_1^2\sin^2\varphi_1+2r_1\cdot r_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2-r_2^2\sin^2\varphi_2=$$

$$=1-2r_1\cdot r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)+r_1^2\cdot r_2^2-r_1^2-r_2^2+2r_1\cdot r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)=(1-r_1^2)(1-r_2^2)$$

Задача 3. Дано три вершини паралелограма z_1, z_2, z_3. Знайти четверту вершину z_4, протилежну вершині z_2.



Розв'язання. Різниці комплексних чисел z_2 і z_1 на площині відповідає різниці відповідних векторів $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OA}$. Оскільки $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},$ то $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$, або $z_2-z_1=z_3-z_4$, звідки $z_4=z_1-z_2-z_3$

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

1. Виконати дії:

$$\frac{1}{i};\ \frac{1+i}{1-i};\ \left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3;\ \left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right);\ \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3};\ \frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x};$$

$$3-i+\frac{2i}{1+i};\ 1+\frac{i}{1-i}.$$

2. Знайти модулі і аргументи комплексних чисел:

$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\ (-4+3i)^3;-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7};\ -1-i\sqrt{3};\frac{1-i}{1+i};$$

$$(1+i)^8\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6};1+i^{123};\ 1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7};\ \sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}.$$

3. Довести рівності:

$$\operatorname{Re} z=\frac{z+\bar{z}}{2};\ \operatorname{Im} z=\frac{z-\bar{z}}{2i};\ \overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2;\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

4. Довести тотожність і з’ясувати її геометричний зміст:

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right).$$

5. Довести нерівність:

$$\left|\frac{z}{|z|}-1\right|\le|\arg z|.$$

6. Довести:

1) якщо $z_1+z_2+z_3=0$ і $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, то точки z_1,z_2,z_3 є вершинами правильного трикутника, вписаного в одиничне коло.
2) якщо $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ і $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$, то точки z_1,z_2,z_3,z_4 є вершинами прямокутника, або попарно співпадають.

7. Довести, що три попарно різні точки z_1,z_2,z_3 лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли $(z_3-z_1):(z_2-z_1)$ дійсне число.

8. Точки z_1 і z_2 − суміжні вершини правильного n-кутника. Знайти вершину z_3, суміжну з z_2 $(z_3\ne z_1)$.

9. Виразити $\cos n\varphi$ і $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$. Знайти $\cos 5\varphi$ і $\sin 5\varphi$.

РОЗДІЛ 2. КОРІНЬ СТЕПЕНЯ n З КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайти $\sqrt{3+4i}$.

Розв'язання. Позначимо $\sqrt{3+4i}=x+iy$. Тоді

$$3+4i=(x+iy)^2 \Leftrightarrow 3+4i=x^2-y^2+2ixy \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=4 \end{cases}$$

Остання система рівнянь має два розв'язки (-2,-1) і (2,1). Отже $\sqrt{3+4i}$ має два значення $\xi_0=-2-i,\ \xi_1=2+i.$

Задача 2. Обчислити $\sqrt[3]{-1+i}$.

Розв'язання. Маємо $|-1+i|=\sqrt{2};\ \arg(-1+i)=\frac{3}{4}\pi$, отже $\sqrt[3]{-1+i}$ має три значення:

$$\xi_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1+i}{\sqrt{2}};$$

$$\xi_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right);$$

$$\xi_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+4\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

Задача 3. Обчислити $\sqrt[4]{-1}$.

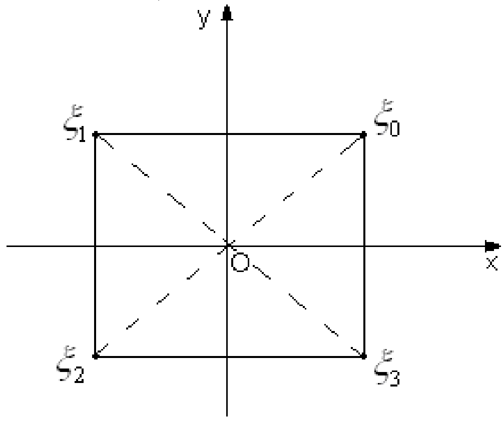
Розв'язання. Маємо $|-1|=1;\ \arg(-1)=\pi$, отже $\xi_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Враховуючи геометричний зміст $\sqrt[n]{z}$, без обчислень запишемо інші три корені:

$$\xi_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\xi_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\xi_3=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

10. Знайти всі значення наступних коренів і зобразити їх на площині:
$\sqrt[8]{1};\ \sqrt[3]{i};\ \sqrt[4]{-i};\ \sqrt{1-i};\ \sqrt[6]{-8};\ \sqrt{-4+3i};\ \sqrt[3]{-1+i\sqrt{3}};\ \sqrt[5]{2-3i}.$
11. Обчислити $\sqrt{5-12i}$ і $\sqrt{24+7i}$ не користуючись формулою для кореня квадратного.
12. Довести, що корені n-го степеня з комплексного числа $z\neq 0$ утворюють геометричну прогресію. Знайти її знаменник.

13. Розв'язати рівняння:

1) $z^7+1=0$; 2) $z^8=1+i$; 3) $\bar{z}=z^3$; 4) $|z|-z=1+2i$.

РОЗДІЛ 3. МНОЖИНИ ТОЧОК НА КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Визначити сімейство ліній в z-площині, заданого рівнянням

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z}=c \qquad (-\infty<c<+\infty,\ z\neq 0).$$

Розв'язання. Маємо:

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z}=\operatorname{Re}\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}, \text{ де } x^2+y^2\neq 0.$$

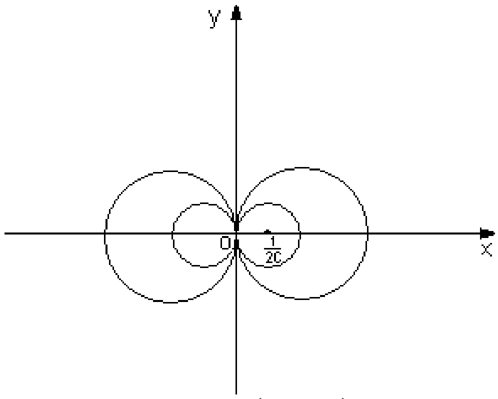
Дане рівняння прийме вид $\frac{x}{x^2+y^2}=c$ або $c\left(x^2+y^2\right)=x$.

При c=0 одержимо уявну вісь $x=0$ без точки $z=0$. Якщо $c\neq 0$, то маємо:

$$x^2+y^2=\frac{x}{c};$$

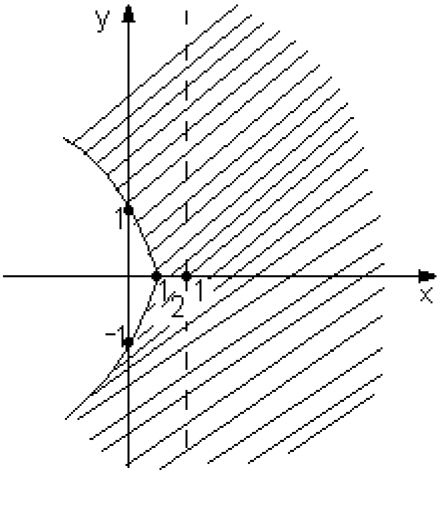
$$x^2-2\cdot\frac{1}{2c}x+\left(\frac{1}{2c}\right)^2-\left(\frac{1}{2c}\right)^2+y^2=c;$$

$$\left(x-\frac{1}{2c}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2c}\right)^2.$$



Останнє рівняння задає сімейство кіл з центром у точці $\left(\frac{1}{2c},0\right)$ і радіусом $\frac{1}{2|c|}$ без точки O.

Задача 2. Зобразити множину точок $E=\{z:\ |z|>1-\operatorname{Re}z\}$ на комплексній площині.



Розв'язання. При $x\geq 1$ нерівність $|z|>1-\operatorname{Re}z$, очевидно, має місце. При $x<1$ маємо:

$$\left(|z|>1-\operatorname{Re}z\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+y^2}>1-x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2>1-2x+x^2\right)\Leftrightarrow\left(y^2>1-2x\right).$$

Отже, множина E – частина площини, яка лежить з тієї ж сторони параболи $y^2=1-2x$, що й точка $z=1$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

14. З'ясувати геометричний зміст вказаних співвідношень:

1) $|z-z_0|\le r$; 2) $|z-2|+|z+2|=5$; 3) $|z-2|-|z+2|>3$;

4) $\operatorname{Re} z\ge C$; 5) $\operatorname{Im} z<0$; 6) $0<\operatorname{Re}(iz)<1$;

7) $\alpha<\arg z<\beta$; 8) $\alpha<\arg(z-z_0)<\beta$, $\quad(-\pi<\alpha<\beta<\pi)$;

9) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z<1$; 10) $|z|<Arg\ z$, $\quad 0\le Arg\ z<2\pi$.

15. *Які лінії визначаються рівняннями:*

1) $z^2+\bar{z}^2=2a^2$; 2) $|z-2|=|1-2\bar{z}|$; 3) $|z|=\operatorname{Re} z+1$;

4) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=1$; 5) $\operatorname{Re}\dfrac{z-a}{z+a}=0$; 6) $\operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z+1}=1$.

16. Визначити сімейства ліній в Z-площині, заданих рівняннями:

1) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}=c$; 2) $\operatorname{Re} z^2=c$; 3) $\operatorname{Im} z^2=c \quad (-\infty<c<\infty)$;

4) $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda \quad (\lambda>0)$; 5) $\arg\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=\alpha \quad (-\pi<\alpha<\pi)$.

17. На Z – площині зобразити вказані множини точок:

1) $\{z:|z-1|\le|z+1|\}$; 2) $\{z:\operatorname{Re}[z(1-i)]<\sqrt{2}\}$; 3) $\{z:\operatorname{Re} z^2<1\}$;

4) $\left\{z:\operatorname{Re}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)=0\right\}$; 5) $\{z:\operatorname{Re} z^4>\operatorname{Im} z^4\}$; 6) $\{z:2|z|>|1+z^2|\}$.

7) $z=t+it^2\ t\in[0;+\infty)$; 8) $z=\operatorname{Re}^{it};t\in[0;\pi]$; 9) $z=t+\dfrac{i}{t};t\in[1;+\infty)$.

РОЗДІЛ 4. ОБЧИСЛЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ СУМ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Вивести формули перетворення в добуток сум і різниць синусів і косинусів двох аргументів.

Розв'язання. Запишемо:

$$\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1+\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2=2\left(\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}+i\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2};$$

$$\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1-\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2=2\left(-\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}+i\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}.$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини в останніх рівностях, одержимо шукані формули.

<u>Задача 2.</u> Знайти суми

$$S = 1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx;$$

$$S^* = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx.$$

<u>Розв'язання.</u> Розглянемо вираз

$$S + iS^* = 1 + (\cos x + i\sin x) + (\cos 2x + i\sin 2x) + \ldots +$$

$$+(\cos nx + i\sin nx) = 1 + e(x) + e(2x) + \ldots + e(nx) =$$

$$1 + e(x) + e^2(x) + \ldots + e^n(x).$$

Користуючись формулою для суми членів геометричної прогресії, одержимо:

$$S + iS^* = \frac{e^{n+1}(x) - 1}{e(x) - 1} = \frac{e[(n+1)x] - e(0)}{e(x) - e(0)} = \frac{2ie\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\frac{n+1}{2}x}{2ie\left(\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= e\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = \left(\cos\frac{n}{2}x + i\sin\frac{n}{2}x\right)\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Виділивши дійсну та уявну частини останнього виразу, одержимо

$$S = \frac{\cos\frac{n}{2}x \cdot \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}, \; S^* = \frac{\sin\frac{n}{2}x \cdot \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

<u>ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ</u>

18. Знайти суми:

1) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x;$

2) $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x;$

3) $\sin x - \sin 2x + \ldots + (-1)^{n-1}\sin nx;$

4) $\cos x - \cos 2x + \ldots + (-1)^{n-1}\cos nx;$

5) $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \ldots + \cos(\alpha+n\beta);$

6) $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \ldots + \sin(\alpha+n\beta).$

19. Нехай z_k $\left(k = \overline{0, n-1}\right)$ - корені рівняння $z^n = 1$. Довести, що

$$z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1} = 0.$$

20. Знайти добуток усіх коренів рівняння $z^8 = 1 - i$.

РОЗДІЛ 5. ПОСЛІДОВНОСТІ І РЯДИ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. З'ясувати, при яких значеннях комплексного параметра a збігається послідовність $z_n = \dfrac{a^n}{1+a^n}$.

Розв'язання. Розглянемо всі можливі випадки.

1) Якщо $|a|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$. Тому існує $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a^n}{1+\lim\limits_{n\to\infty} a^n} = 0$.

2) Нехай $|a|>1$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}\right)^n = 0$. Отже, існує $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^n+1} = 1$.

3) При $a=1$ одержимо збіжну послідовність $z_n = \dfrac{1}{2}$.

4) Нехай $|\mathrm{a}|=1,\ a\neq 1$. Очевидно, можна вважати, що $\mathrm{a}^{\mathrm{n}}+1\neq 0 \Leftrightarrow a\neq \sqrt[n]{-1}$.

Тоді $a = e(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ z_n = \dfrac{1}{a^{-n}+1} = \dfrac{1}{e(-n\varphi)+1}$.

При $\varphi \neq 2k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$ послідовність $e(-n\varphi) = \cos n\varphi - i\sin n\varphi$ розбіжна (тому, що не існують границі $\cos n\varphi$ і $\sin n\varphi$ при $\mathrm{n}\to\infty$).

Через те, в цьому випадку розбіжною буде і послідовність $\{z_n\}$.

Отже, $\{z_n\}$ збіжна при $a=1,\ |a|<1$ і $|a|>1$.

Задача 2. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Виділимо дійсну та уявну частини ряду. Маємо :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{\sqrt{n}} = \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots}_{(1)} + i\underbrace{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\ldots\right)}_{(2)}$$

За теоремою Лейбніца ряди (1) і (2) збіжні, отже, буде збіжний і даний ряд.

Оскільки $\left|\dfrac{i^n}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ розбіжний, то даний ряд не буде абсолютно збіжним.

Отже, ряд збіжний умовно.

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

21. Користуючись означенням границі, довести, що

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5i}{n^2+i}=2;\ 2)\lim_{n\to\infty}\frac{(2i)^n-1}{(2i)^n}=1;\ 3)\lim_{n\to\infty}\frac{1-3in}{5n+1}=-\frac{3i}{5}.$$

22. Обчислити границі послідовностей $\{z_n\}$:

$$1)\ z_n=\frac{n+1}{2n}+i\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n};\ 2)\ z_n=\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)+i\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)};$$

$$3)\ z_n=\left(\frac{n+a}{n-a}\right)^n+in\left(\sqrt[n]{a}-1\right);\quad 4)\ x_n=1+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}+...+\frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{3};$$

$$5)\ z_n=\left(\sin\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)^n+i\left(\cos\frac{1}{n}\right)^n;\quad 6)\ z_n=n\sin\frac{1}{n}+i\frac{a^n}{n!};$$

$$6) z_n=n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)+i\frac{n-1}{3n}.$$

23. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)$.

24. Виявснити, при яких значеннях параметра $a\in C$ збігаються послідовності:

$$1)\ \{a^n\};\ 2)\ \left\{\frac{a^n}{n}\right\};\ 3)\ \{na^n\};\ 4)\ 1+a+\ldots+a^n.$$

25. Обчислити суми рядів:

$$1)\ \sum_{k=1}^{\infty}q^k\sin k\alpha,\ q\in\mathbb{R},\ |q|<1;\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}+\frac{i}{2^{n-1}}\right].$$

26. Дослідити на збіжність ряди:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}+i\frac{2^n}{n!}\right);\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{n^n}+i\frac{2^n}{3^n n}\right);\ 3)\ \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln n}+\frac{i}{n^2+1}\right);$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}+i\sqrt{\frac{n+1}{n}};\qquad 5)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}+\frac{i}{n!}\right);\ 6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n!}+i\frac{2n-1}{3^n}\right).$$

27. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряди:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(in)^n};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^3};\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{in}{3n+i}\right)^n;\ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3+i^n\right)^n}{n}.$$

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2i)^{n^2}};\ 6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(e-i)^n}{n^n};\ 7)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n2^n};\ 8)\ \sum\frac{(n!)^n}{(in)^{n^2}}.$$

РОЗДІЛ 6. ФУНКЦІЇ КОМЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайти образ кола $C=\{|z-1|=1\}$ при відображенні $W=\frac{1}{z}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $|z-1|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=2x$, одержимо:

$$W=\frac{1}{z}\Leftrightarrow W=\frac{1}{x+iy}\Leftrightarrow W=\frac{x-iy}{x^2+y^2}\Leftrightarrow u+iv=\frac{x-iy}{2x}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{1}{2},\\ v=-\frac{1}{2}\frac{y}{x}.\end{cases}$$

Покладемо: $\frac{y}{x}=tg\varphi$. При $x+iy\in C$ $(x\neq 0)$ маємо:

$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2},\ -\infty<tg\varphi<\infty,$ тому $v=\operatorname{Im}z$ пробігає множину $(-\infty,\infty)$. Отже, при відображенні $W=\frac{1}{z}$ образом даного кола C є пряма $\operatorname{Re}W=\frac{1}{2}$ (разом з точкою $W=\infty$).

Задача 2. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}$.

Розв'язання. Позначимо $U_n(z)=\frac{z^n}{1-z^n}$ і розглянемо всі можливі випадки.

1) При $|z|>1$ маємо: $z^n\to\infty,\ U_n(z)\to -1\ (n\to\infty).$ Ряд розбіжний тому, що загальний член ряду не прямує до нуля.

2) Якщо $|z|<1,$ то $z^n\to 0,\ \frac{1}{|1-z^n|}\to 1\ (n\to\infty).$ Тому, починаючи з деякого n_0, маємо : $\frac{1}{|1-z^n|}\leq 2$, звідки одержимо

$$|U_n(z)|\leq 2|z|^n. \qquad (*)$$

Внаслідок нерівності (*) і збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}2|z|^n$ одержимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(z).$

3) Нехай тепер $|z|=1$. Очевидно, можна вважати, що $z^n\neq 1$, зокрема $z\neq 1$.

Тоді $U_n(z)=\frac{1}{z^{-n}-1}=\frac{1}{e(-n\varphi)-1}$, де z=e$(\varphi)$.

Оскільки при $\varphi \neq 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ послідовність $e(-n\varphi)$ розбіжна, то не існує $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(z)$.

Отже, при $|z|=1$ даний ряд розбіжний.

Відповідь: область збіжності даного ряду – круг $|z|<1$.

Задача 3. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-z\ln n}$ рівномірно збіжний у будь-якій півплощині $\operatorname{Re} z \geq 1+\delta$, де $\delta>0$.

Розв'язання. Використовуючи формулу Ейлера $e^{i\alpha}=\cos\alpha + i\sin\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$, одержимо:

$$\left|e^{-z\ln n}\right| = \left|e^{-x\ln n}\right|\left|e^{-iy\ln n}\right| = e^{-x\ln n}\left|\cos(y\ln n)+i\sin(y\ln n)\right| = e^{-x\ln n} = n^{-x} =$$

$$=\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

Відомо, що при $\delta>0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}$ збіжний. Через те, за ознакою Вейерштрасса даний ряд рівномірно збігається в півплощині $\operatorname{Re} z \geq 1+\delta$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

28. Знайти образи множин E при вказаних відображеннях.

1) $W=z^2, E:\ x=c;\ y=c;\ x=y;\ |z|=r;\ \arg z=\alpha;$

2) $W=\dfrac{1}{z},\ E:\ x=c;\ y=c;\ |z|=r;\ \arg z=\alpha;$

3) $W=z-\dfrac{1}{z},\ E:\ |z|=r;$ 4) $W=\dfrac{z-1}{z+1},\ E:\ \operatorname{Im} z=1;$

5) $W=\dfrac{z}{z+1},\ E:\ |z|=2;$ 6) $W=2\dfrac{2z-1}{z-2},\ E: |z|\geq 1.$

29. Виділити дійсну і уявну частини функцій:

1) $z^3+1;$ 2) $\dfrac{\bar{z}}{z+1};$ 3) $z^n;$ 4) $z-\dfrac{1}{z};$ 5) $\dfrac{z-1}{z+2}.$

30. Довести обмеженість функцій на множинах $\overline{E}$:

1) $\dfrac{1}{z^2+1},\ \overline{E}=\{z:|z|\geq 2\};$ 2) $\dfrac{z^2}{z^2-4},\ \overline{\mathrm{E}}=\{z:|z|\leq 1\}.$

31. Довести неперервність функції у точках z_0:

1) $\dfrac{z-1}{z+1},\ z_0=i;$ 2) $\dfrac{|z|}{z},\ z_0=i;$ 3) $\dfrac{\operatorname{Im} z^2}{z^2},\ z_0=1-i.$

32. Довести абсолютну збіжність рядів:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^{n},\ |z|<1,\ \alpha\in\mathbb{R};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(n!)^2}\cdot\frac{z^n}{1+z^n},\ |z|<\frac{1}{z};$$

$$3)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+z)\ln^2 n},\ z\neq\text{-}2,\text{-}3,\ldots\ ;\ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)}{n!},\ \operatorname{Re} z<-1.$$

33. Знайти області збіжності вказаних рядів:

$$1)\ \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{z}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}+\frac{\mathrm{n}^2}{\mathrm{z}^{\mathrm{n}}}\right);\ 2)\ \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{z}(\mathrm{z}+\mathrm{n})}{\mathrm{n}}\right]^{\mathrm{n}};\ 3)\ \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\frac{(\text{-}1)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{z}+\mathrm{n}};\ 4)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}.$$

34. Довести, що дані ряди рівномірно збігаються на множинах E:

$$1)\ \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^2}z^{-2n},\ E=\{|z|\geq 1\};\ 2)\ \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-nz},\ E=\{\operatorname{Re} z\geq\delta>0\};$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right),\ E=\{|z|=1\};\ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2},\ E=\{|z|\leq R<\infty\}.$$

РОЗДІЛ 7. <u>СТЕПЕНЕВІ РЯДИ</u>

<u>РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ</u>

<u>Задача 1.</u> Знайти радіуси збіжності рядів

$$\text{а) }\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^{n!};\ \textit{б) }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n.$$

<u>Розв’язання.</u> а) Позначимо $n!=m$. Коефіцієнти даного степеневого ряду $a_k=0$, якщо $k\neq n!$ і $a_m=2^n$, якщо $m=n!$. Тому

$$l=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n!]{2^n}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{(n-1)!}}=2^0=1.$$

Радіус збіжності даного ряду $R=1$.

б) Маємо: $a_n=\dfrac{n!}{n^n},\ a_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

Для визначення радіуса збіжності скористаємося другою формулою:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)^{n+1}}{(n+1)!n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

<u>Задача 2.</u> Виявснити, в яких точках границі круга збіжності збігається степеневий ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}$.

<u>Розв’язання.</u> Радіус збіжності даного ряду $R=1$, отже, границею круга збіжності є коло $\gamma=\{z:|z|=1\}$.

При $z=1$ маємо розбіжний гармонічний ряд.

Нехай тепер $z\neq 1$. Тоді при $z\in\gamma\,(z=e(\varphi))$ одержимо:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e(k\varphi)}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\varphi}{k}+i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\varphi}{k}.$$

Використовуючи розв'язок задачі 2 розділу 4, одержимо, що при $\varphi\neq 2k\pi\left(z\neq 1\right)$ суми $P_n=\sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi$ і $Q_n=\sum_{k=1}^{n}\sin k\varphi$ обмежені, причому

$$\left|Q_n\right|\le\frac{1}{\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|},\ \left|P_n\right|=\left|S-1\right|\le\left|S\right|+1\le\frac{1}{\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|}+1\ \left(\forall n\in\mathbb{N}\right).$$

Оскільки послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ монотонно спадаючи прямує до нуля, то за ознакою Абеля-Діріхле ряди $\sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi$ і $\sum_{k=1}^{n}\sin k\varphi$ збіжні. Отже, даний ряд збігається в кожній точці $z\in\gamma$, за винятком точки $z=1$.

Очевидно, ця збіжність неабсолютна.

<u>ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ</u>

35. Знайти радіуси збіжності рядів:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\left[3+\left(-1\right)^n\right]^n z^n$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+i^n\right]^n z^n$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-i}{3}\right)^n z^n$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(tgin\right)^n z^n$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n$.

36. Радіус збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ дорівнює R $\left(0<R<\infty\right)$. Визначити радіуси збіжності рядів:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n-1\right)c_n z^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n c_n z^n$;

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+z_0^n\right)c_n z^n$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{1+\left|c_n\right|}z^n$.

37. Знайти круг збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(z-i\right)^n}{2^n+in}$.

38. Дослідити поведінку степеневого ряду на границі круга збіжності:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{p^n}}{n}$ $\left(p\in\mathbb{N}\right)$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n}z^n$.

РОЗДІЛ 8. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Розв'язати рівняння $\sin z + \cos z = 2$.

Розв'язання. Використовуючи формули $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ і $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, одержимо рівняння: $\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2.$

Покладемо $e^{iz} = t.$ Рівняння прийме вид: $t - \dfrac{1}{t} + i\left(t + \dfrac{1}{t}\right) = 4i$ або $(1+i)t^2 - 4it - 1 + i = 0.$

Розв'язавши квадратне рівняння, одержимо

$$t = \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1+i).$$

Оскільки $1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$, то $\arg t = \dfrac{\pi}{4}.$ З рівності $e^{iz} = t$ одержимо $iz = \operatorname{Ln} t$, або $iz = \ln|t| + i(\arg t + 2\pi k)$,

$$iz = \ln\left(\sqrt{2} \pm 1\right) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right).$$

Звідки $z = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k - i\ln\left(\sqrt{2} \pm 1\right),\ k \in \mathbb{Z}.$

Задача 2. Знайти всі значення $w = (1-i)^{1+i}$.

Розв'язання. Маємо $w = (1-i)(1-i)^i$. За означенням $(1-i)^i = e^{i\operatorname{Ln}(1-i)}$.

Далі одержимо: $i\operatorname{Ln}(1-i) = i\left[\ln\sqrt{2} + i\left(-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right] = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k + i\ln\sqrt{2}.$

Отже, $w = (1-i)e^{\frac{\pi}{4} + 2\pi k} \cdot e^{i\ln\sqrt{2}}$, де $\mathrm{k} \in \mathbb{Z}.$

Задача 3. Виділити дійсну та уявну частини функції $\operatorname{ctg} z$.

Розв'язання. Елементарними перетвореннями одержимо

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i\frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}} = i\frac{\left(e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}\right)\left(e^{-y}e^{-ix} - e^{y}e^{ix}\right)}{\left(e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}\right)\left(e^{-y}e^{-ix} - e^{y}e^{ix}\right)} =$$

$$= i\frac{e^{-2y} - e^{2y} + e^{-2ix} - e^{2ix}}{e^{-2y} + e^{2y} - e^{-2ix} - e^{2ix}} = \frac{2\sin 2x - 2i\operatorname{sh} 2y}{2\operatorname{ch} 2y - 2\cos 2x}.$$

Звідси маємо $\operatorname{Re}\operatorname{ctg} z = \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}$, $\operatorname{Im}\operatorname{ctg} z = \dfrac{-\operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}.$

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

39. Знайти всі значення виразів:

$$1)\ 1^{\sqrt{2}};\ 2)\left(-2\right)^{\sqrt{2}};\ 3)\ 2^{i};\ 4)\ 1^{-i};\ 5)\ i^{i};\ 6)\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i};$$

$$7)\ \left(-1+\sqrt{3}i\right)^{1-i};\ 8)\ \left(3-4i\right)^{1+i};\ 9)\ \left(3+4i\right)^{1+i};\ 10)\ \left(-\sqrt{3}+i\right)^{-i}.$$

40. Довести формули:

$$1)\ \cos^2 z+\sin^2 z=1;\ 2)\ \mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=1;\ 3)\ \sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\cos z;$$

$$4)\ \cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin z;\ 5)\ \mathrm{sh}\left(z+\pi i\right)=-\mathrm{shz};\ 6)\ \mathrm{th}\left(z+\pi i\right)=\mathrm{thz};$$

$$7)\ \cos\left(z_1+z_2\right)=\cos z_1\cdot\cos z_2-\sin z_1\cdot\sin z_2;$$

$$8)\ \sin z_1+\sin z_2=2\sin\frac{z_1+z_2}{2}\sin\frac{z_1-z_2}{2}.$$

41. Розв’язати рівняння:

$$1)\ \sin z=\frac{4i}{3};\ 2)\ \cos z=\frac{3i}{4};\ 3)\ \mathrm{tg}z=\frac{5i}{3};\ 4)\ \mathrm{chz}=\frac{1}{2};$$

$$5)\ \sin z-\cos z=3;\ 6)\ \sin z-\cos z=i;\ 7)\ 2\mathrm{chz}+\mathrm{shz}=i.$$

42. Довести формули:

$$1)\ \arccos z=-i\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right);\ 2)\ \mathrm{arcctg}\, z=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i};$$

$$3)\ \mathrm{arcch}\, z=\mathrm{Ln}\left(z-\sqrt{z^2-1}\right);\ 4)\ \mathrm{arcth}\, z=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}.$$

43. Довести, що

$$1)\ \mathrm{Im}\,\mathrm{tg}\, z=\frac{\mathrm{sh}2y}{\cos 2x+\mathrm{ch}2y};\ 2)\ \left|\sin z\right|=\sqrt{\mathrm{ch}^2 y-\cos 2x};$$

$$3)\ \left|\mathrm{shz}\right|=\sqrt{\mathrm{ch}^2 x-\cos^2 y};\ 4)\ \left|\mathrm{cthz}\right|=\sqrt{\frac{\mathrm{ch}2x+\cos 2y}{\mathrm{ch}2x-\cos 2y}}.$$

РОЗДІЛ 9. МОНОГЕННІСТЬ УМОВИ КОШІ-РІМАНА

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Перевірити виконання умов Коші-Рімана для функції $W=\mathrm{Ln}\, z$ і довести, що $\left(\mathrm{Ln}\, z\right)'=\frac{1}{z}$.

Розв’язання. Нехай $x>0,\ y\geq 0$ (інші випадки розглядаються аналогічно).

Тоді $\mathrm{Ln}\, z=\ln\sqrt{x^2+y^2}+i\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

Отже, $u=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$, $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+2\pi k.$

Маємо: $\frac{du}{dx}=\frac{x}{x^2+y^2}$; $\frac{du}{dy}=\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{dv}{dx}=-\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{dv}{dy}=\frac{x}{x^2+y^2}$.

Умови (C.R.) виконуються. Крім того, функції $u\left(x,y\right)$ і $v\left(x,y\right)$ мають повний диференціал (в області визначення). Отже, існує похідна

$$\left(\operatorname{Ln} z\right)'=\frac{du}{dx}+i\frac{dv}{dx}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x-iy}{\left(x-iy\right)\left(x+iy\right)}=\frac{1}{z}.$$

Задача 2. Знайти аналітичну функцію за її дійсною частиною

$$u\left(x,y\right)=x+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\quad\left(x>0\right).$$

Розв'язання. Шукана функція $f\left(z\right)=u+iv$ повинна задовольняти умови (C.R.):

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{x}{x^2+y^2},\qquad(1)$$

$$\frac{dv}{dy}=1-\frac{y}{x^2+y^2},\qquad(2)$$

звідки й визначимо невідому функцію $v\left(x,y\right)$.

З рівняння (1) маємо:

$$v\left(x,y\right)=-\int\frac{x}{x^2+y^2}dx+c\left(y\right),$$

$$v\left(x,y\right)=-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+c\left(y\right).\qquad(3)$$

З рівності (3) одержимо: $\frac{dv}{dy}=-\frac{y}{x^2+y^2}+c'\left(y\right)$

або, використовуючи рівняння (2) –

$$1-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}+c'\left(y\right),$$

$$c'\left(y\right)=1\Rightarrow c\left(y\right)=y+c_0,\ \text{де}\ c_0=const.$$

Таким чином, $v\left(x,y\right)=y-\ln\sqrt{x^2+y^2}+c_0$. Враховуючи, що $x>0$, функцію $f\left(z\right)$ подамо у вигляді

$$f\left(z\right)=z+\arg z-i\ln\left|z\right|+ic_0.$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

44. Перевірити виконання умов Коші-Рімана для функцій z^n, e^z, $\cos z$ і довести, що $\left(z^n\right)'=nz^{n-1}$, $\left(e^z\right)'=e^z$, $\left(\cos z\right)'=-\sin z.$

45. Знайти сталі $a,\ b,\ c$ при яких функція $f(z)$ буде аналітичною:

1) $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$; 2) $f(z)=\left(x^2+ax-by^2\right)+i(2xy+cy)$;

3) $f(z)=\cos x(\operatorname{ch} y+a\operatorname{sh} y)+i\sin x(\operatorname{ch} y+b\operatorname{sh} y)$.

46. Знайти множини точок, в яких моногенні функції:

1) $\dfrac{z}{|z|}$; 2) $\left(\bar z\right)^2$; 3) $|z|^2$; 4) x^2+iy^2; 5) $z\operatorname{Re} z$.

47. Знайти похідні функцій:

1) $\operatorname{tg} z$; 2) $\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$; 3) $\left(e^z+e^{-z}\right)^{-2}$; 4) $\dfrac{\cos z}{\cos z-\sin z}$.

48. Довести, що в полярних координатах r,φ умови Коші-Рімана для функції $f(z)=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)$ мають вигляд

$$\frac{du}{dr}=\frac{1}{r}\frac{dv}{d\varphi};\ \frac{dv}{dr}=-\frac{1}{r}\frac{du}{d\varphi}.$$

49. Побудувати аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ за її дійсною або уявною частиною:

1) $u=x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$; 2) $u=x^2-y^2+x$;

3) $u=\ln\left(x^2+y^2\right)$; 4) $v=3+x^2-y^2-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

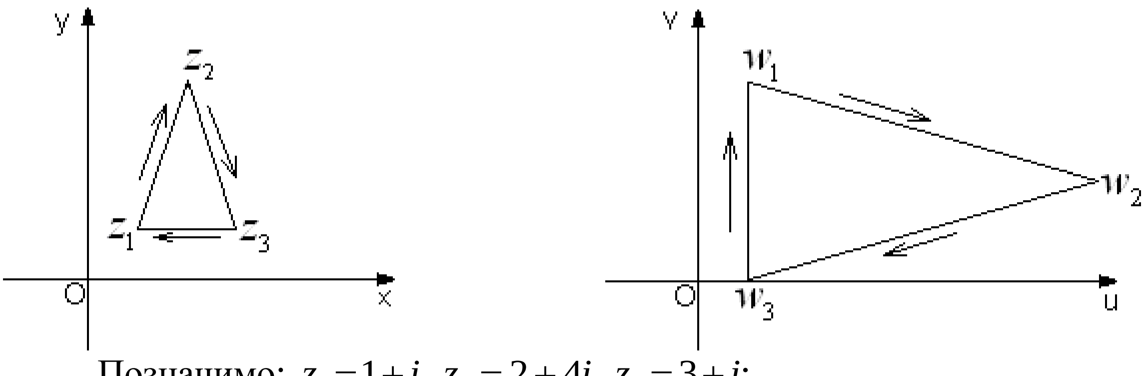
5) $v=x^3-3xy^2$; 6) $v=\ln\left(x^2+y^2\right)+x-2y$.

РОЗДІЛ 10. КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ. ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайти лінійне відображення, яке відображає трикутник з вершинами в точках $1+i,\ 2+4i,\ 3+i$ на трикутник з вершинами в точках $1,\ 1+4i,\ 7+2i$.

Розв'язання. Побудуємо задані трикутники.



Позначимо: $z_1=1+i,\ z_2=2+4i,\ z_3=3+i$;

$W_1=1+4i,\ W_2=7+2i,\ W_3=1.$

Лінійну функцію $f(z) = az + b$ визначимо так, щоб виконувались рівності $f(z_k) = w_k$ $(k=1,2,3)$.

Одержимо:

$$\begin{cases} a(1+i) + b = 1 + 4i, \\ a(2+4i) + b = 7 + 2i, \\ a(3+i) + b = 1. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь системи знаходимо: $a = -2i,\ b = -1 + 6i.$

Знайдені значення $a,\ b$ задовольняють і третє рівняння:

$$-2i(3+i) - 1 + 6i = 1.$$

Шукане відображення: $W = -2iz - 1 + 6i.$

Задача 2. Знайти образ півплощини $x + y < 1$ при відображенні $W = \frac{1}{z}$.

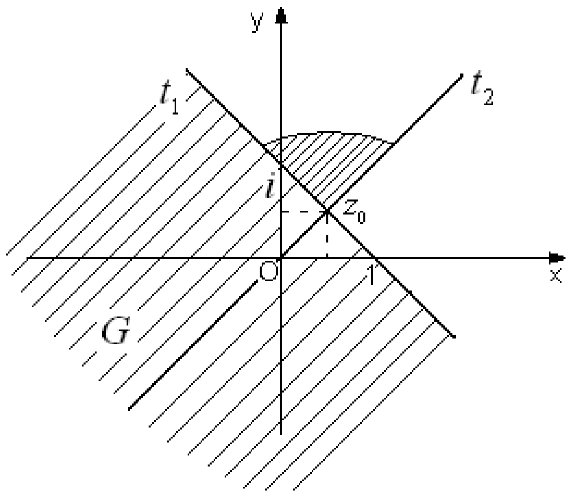
Розв'язання. Введемо позначення: G - півплощина $x + y < 1$;

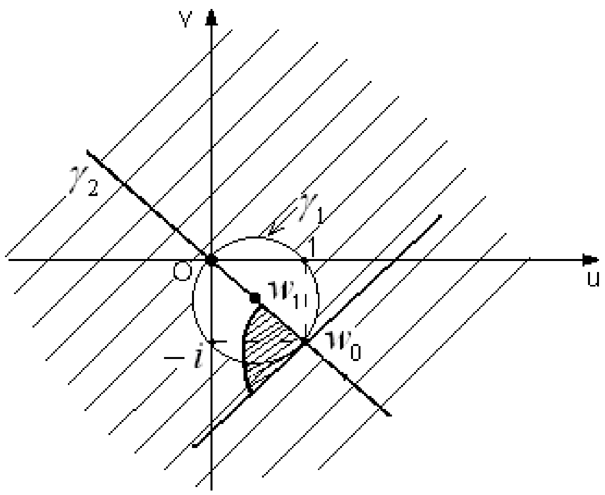
t_1 - пряма $x + y = 1$ (границя півплощини);

t_2 - пряма $y = x$ (перпендикулярна до t_1);

γ_1 - образ t_1, γ_2 - образ t_2 при відображенні $W = \frac{1}{z}$;

$z_0 = \frac{1}{2}(1+i)$ - точка перетину прямих t_1 і t_2.





Коло γ_1 проходить через точки $W = 0$ і $W_0 = \frac{1}{z_0} = 1 - i.$

Внаслідок конформності відображення пряма γ_2 і коло γ_1 повинні бути ортогональними. Тому пряма γ_2 пройде через центр w_1 кола γ_1.

Отже, $W_1 = \frac{1}{2} W_0 = \frac{1}{2}(1-i)$. Радіус кола γ_1 рівний $|W_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

При відображенні внутрішня точка $z = 0$ області G перейде в точку $w = \infty$. Тому область G перейде в зовнішність кола

$$\gamma_1 = \left\{ W : |W - W_1| = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

50. Знайти лінійне відображення, яке відображає трикутник з вершинами в точках $0,\ 1,\ i$ на трикутник з вершинами $0,\ 2,\ 1+i$.
51. Знайти лінійне відображення з нерухомою точкою $1+2i$, яке точку i переводить в точку $-i$.
52. Знайти лінійне відображення, яке круг $|z+1-i|<3$ відображає на круг $|W-2|<1$, причому вертикальний діаметр переходить в горизонтальний.
53. Знайти образ півплощини $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ і $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ при відображенні $W = (1-i)z + i$.
54. Знайти образ круга $|z+i|<1$ при відображенні $W = 2iz + 4$.
55. Для функції $w = \dfrac{1}{z}$ знайти образи вказаних ліній:

1) сімейство кіл $x^2 + y^2 = ax$;
2) сімейство кіл $x^2 + y^2 = by$;
3) пучка прямих $y = x + b$;
4) пучка прямих $y = kx$;
5) прямої $x - y = 1$.

56. При відображенні $W = \dfrac{1}{z}$ знайти образ кола $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.
57. З’ясувати, в що перетвориться при відображенні $W = \dfrac{z-1}{z}$ смуга $0 < \operatorname{Re} z < 1$.

РОЗДІЛ 11. ДРОБОВО-ЛІНІЙНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайти образ області $D = \{z : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ при відображенні

$$W = \frac{z-i}{z+i}.$$

Розв’язання. Дане відображення представимо у вигляді $W = 1 - \dfrac{2i}{z+i}$, потім, як суперпозицію чотирьох відображень:

$$t = z + i;\ \zeta = \frac{1}{t};\ \xi = -2iz,\ W = 1 + \xi$$

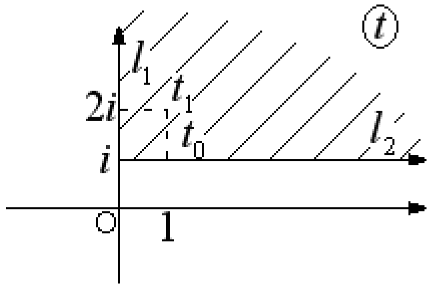
і розглянемо кожне з них послідовно.

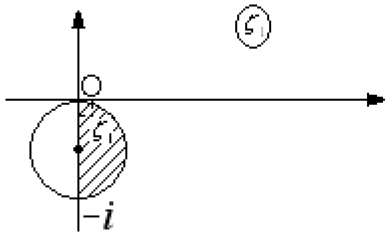
1) Перше відображення – паралельне перенесення на i по уявній осі. Образ області D позначимо через D_1.

2) При відображенні $\zeta = \dfrac{1}{t}$ промінь $l_1 = \{\mathrm{Re}\,t = 0,\ \mathrm{Im}\,t \geq 1\}$ перейде у відрізок $\gamma_1 = \{\mathrm{Re}\,\zeta = 0, -1 \leq \mathrm{Im}\,\zeta \leq 0\}$; промінь $l_2 = \{\mathrm{Re}\,t \geq 0,\ \mathrm{Im}\,t = 1\}$ перетвориться в півколо $\gamma_2 = \left\{\left|\zeta + \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}, \mathrm{Re}\,\zeta \geq 0\right\}$ (оскільки $i \to -i,\ t_0 = 1 + i \to \dfrac{1}{2}(1 - i)$).

Візьмемо точку $t_1 \in D_1$, наприклад , $t_1 = 1 + 2i$. Її образ $\zeta_1 = \dfrac{1}{t_1} = \dfrac{1-2i}{5}$ належить півкругу $D_2 = \left\{\left|\zeta + \dfrac{i}{2}\right| < \dfrac{1}{2}, \mathrm{Re}\,\zeta > 0\right\}$. Тому при відображенні $\zeta = \dfrac{1}{t}$ область D_1 перетвориться в D_2.

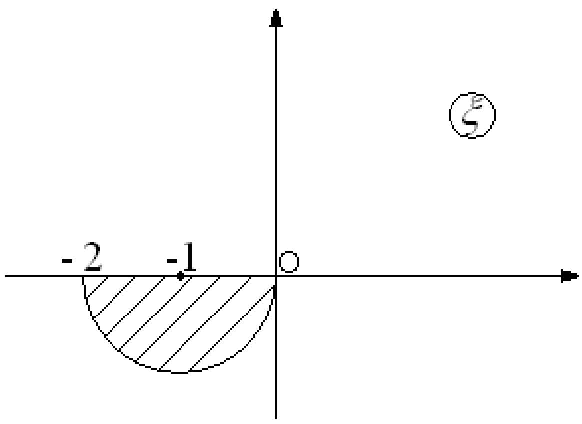
1)

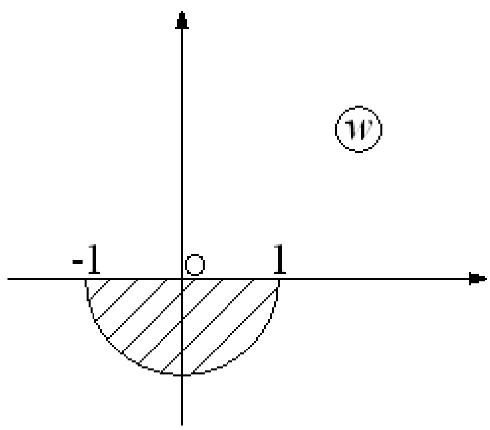




3) Відображення $\xi = -2iz$ здійснює розтяг з коефіцієнтом 2 і поворот на кут $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$.

4) Відображення $w = 1 + \xi$ півкруг з площини ξ переводить в півкруг $G = \{W : |W| < 1, \mathrm{Im}\,W < 0\}$, що й буде образом квадранта при даному відображенні.





<u>Задача 2.</u> Знайти дробово-лінійне відображення, яке точки $-1, \infty, i$ переводить відповідно в точки $\infty,\ i,\ 1$.

<u>Розв'язання.</u> Підставивши значення $z_1 = -1,\ z_2 = \infty,\ z_3 = i$,
$W = \infty,\ W_2 = i,\ W_3 = 1$ в формулу (2), одержимо:

$$\frac{W-\infty}{W-i}\cdot\frac{1-i}{1-\infty}=\frac{z+1}{z-\infty}\cdot\frac{i-\infty}{i+1} \text{ або } \frac{1-i}{W-i}=\frac{z+1}{1+i}, \text{ звідки знаходимо}$$

$$W=\frac{iz+i+2}{z+1}.$$

<u>Задача 3.</u> Відобразити круг $|z|<1$ на круг $|W|<1$ так, щоб

$$1)\ W\left(-\frac{1}{2}\right)=0,\ 2)\ \arg W'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

<u>Розв'язання.</u> Користуючись формулою, внаслідок 1) одержимо

$$e^{i\varphi}\cdot\frac{-\frac{1}{2}-z_0}{1+\frac{1}{2}\overline{z_0}}=0, \text{ звідки } z_0=-\frac{1}{2}.$$

Далі маємо: $W'=e^{i\varphi}\dfrac{1-\overline{z_0}z_0}{\left(1-\overline{z_0}z\right)^2}$, $W'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{3}e^{i\varphi}$.

Враховуючи умову 2) задачі, одержимо $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

Шукане відображення $W=e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\dfrac{z+\frac{1}{2}}{1+\frac{z}{2}}$ або, що те ж саме – $W=e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\dfrac{2z+1}{z+2}$.

<u>ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ</u>

58. Вияснити, в що перетворюються області D при заданих відображеннях

1) $D=\left\{z:\ |z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\right\},\ W=\dfrac{2z-i}{2+iz}$;

2) $D=\left\{z:\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}\right\},\ W=\dfrac{z}{z-1}$;

3) $D=\left\{z:\ z\in\mathbb{C}\backslash[-2,1]\right\},\ W=\dfrac{z+2}{1-z}$;

4) $D=\left\{z:\ \operatorname{Re} z<1\right\},\ W=\dfrac{z}{1-z+i}$.

59. Знайти точки, симетричні з точкою $2+i$ відносно кіл:

1) $|z|=1$, 2) $|z-i|=3$.

60. Знайти дробово-лінійні функції, які переводять точки $-1,\ i,\ 1+i$ відповідно в точки 1) $0,\ 2i,\ 1-i$; 2) $\mathrm{i},\ \infty, 1$.

61. Знайти дробово-лінійні функції, які переводять точки $-1,\ \infty, i$ відповідно в точки 1) $i,\ 1,\ 1+i$; 2) $0,\ \infty, 1$.

62. Знайти відображення верхньої півплощини на себе при умовах:

1) $W(0)=1,\ W(1)=2,\ W(2)=\infty;$ 2) $W(0)=1,\ W(i)=2i.$

63. Відобразити верхню півплощину $\operatorname{Im} z>0$ на одиничний круг $|W|<1$, щоб виконувались умови:

1) $W(i)=0,\ \arg W'(i)=-\dfrac{\pi}{2};$ 2) $W(2i)=0,\ \arg W'(2i)=0.$

64. Відобразити круг $|z|<2$ на півплощину $\operatorname{Re} W>0$ так, щоб

1) $W(0)=1,\ \arg W'(0)=\dfrac{\pi}{2}.$

65. Відобразити круг $|z|<1$ на круг $|W|<1$ так, щоб:

1) $W\left(\dfrac{1}{2}\right)=0,\ \arg W'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0;$ 2) $W\left(\dfrac{i}{2}\right)=0,\ \arg W'\left(\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}.$

66. За допомогою дробово-лінійного відображення відобразити область $\{|z|>1\}$ на круг $\{|W-i|<1\}$.

РОЗДІЛ 12. <u>КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ, ЩО ЗДІЙСНЮЮТЬСЯ ЕЛЕМЕНТАРНИМИ ФУНКЦІЯМИ. ФУНКЦІЯ ЖУКОВСЬКОГО</u>

<u>РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ</u>

<u>Задача 1.</u> Знайти образ області $D=\left\{z:-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{Re} z<\dfrac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z>0\right\}$ при відображенні $W=\cos z$.

<u>Розв’язання.</u> Виведемо формули перетворення. Маємо:

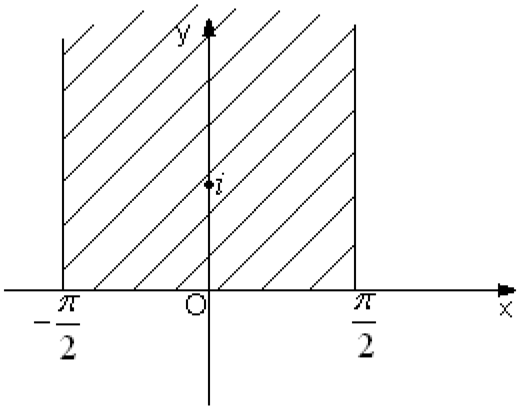
$$u+iv=\cos(x=iy)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy=$$

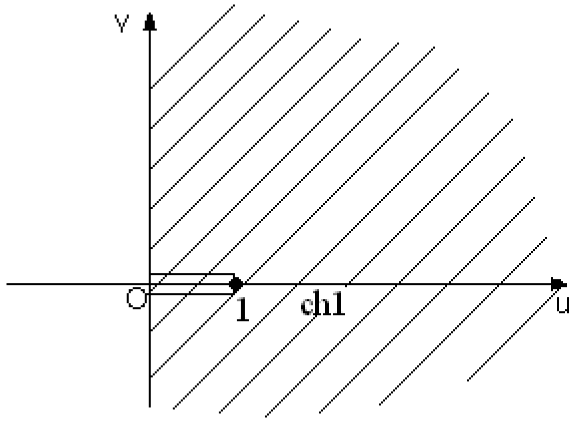
$$=\cos x\cdot\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}-\sin x\cdot\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}=\cos x\operatorname{ch} y-i\sin x\operatorname{sh} y.$$

Звідси одержимо: $u=\cos x\operatorname{ch} y,\ v=-\sin x\operatorname{sh} y.$

Знайдемо образ границі області D. Відрізок $\left\{-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ y=0\right\}$ переходить у відрізок $\{0\le u\le 1,\ v=0\}$. Півпрямі $\left\{x=-\dfrac{\pi}{2},\ y\ge 0\right\}$ і $\left\{x=\dfrac{\pi}{2},\ y\ge 0\right\}$ відображаються відповідно в півпрямі $\{u=0,\ v>0\}$ і $\{u=0,\ v<0\}$. Точка i переводиться в точку $W=\cos 0\operatorname{ch}1-i\sin 0\operatorname{sh}1=\operatorname{ch}1>1.$

Нехай G – образ області D при відображенні $W=\cos z.$ За принципом збереження області при конформному відображенні G – теж область. За принципом відповідності границь ∂D переводиться в ∂G.



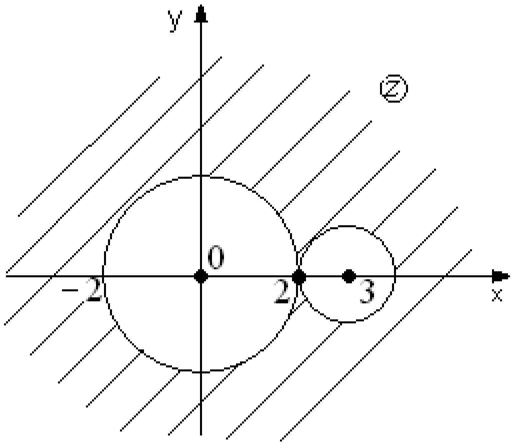


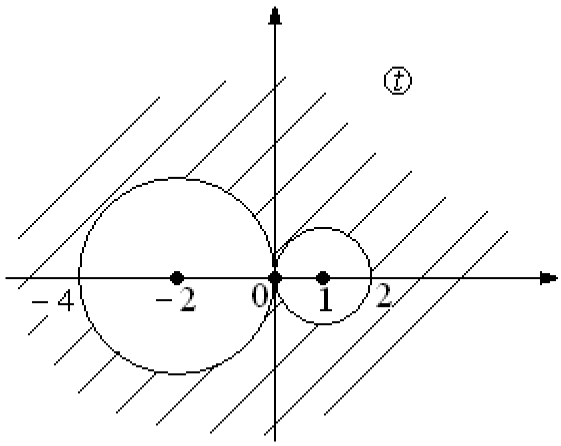
Оскільки внутрішня точка $z = i$ області D переходить в точку $\operatorname{ch}1$, то образом D при відображенні $W = \cos z.$ є права півплощина з розрізом по відрізку $[0,1]$ дійсної осі.

<u>Задача 2.</u> Відобразити конформно на верхню півплощину область, обмежену кругами $|z| = 2,\ |z-3| = 1.$

<u>Розв’язання.</u> Відображення подамо у вигляді суперпозиції кількох відображень.

1) $t = z - 2$ – паралельне перенесення на -2 по дійсній осі.

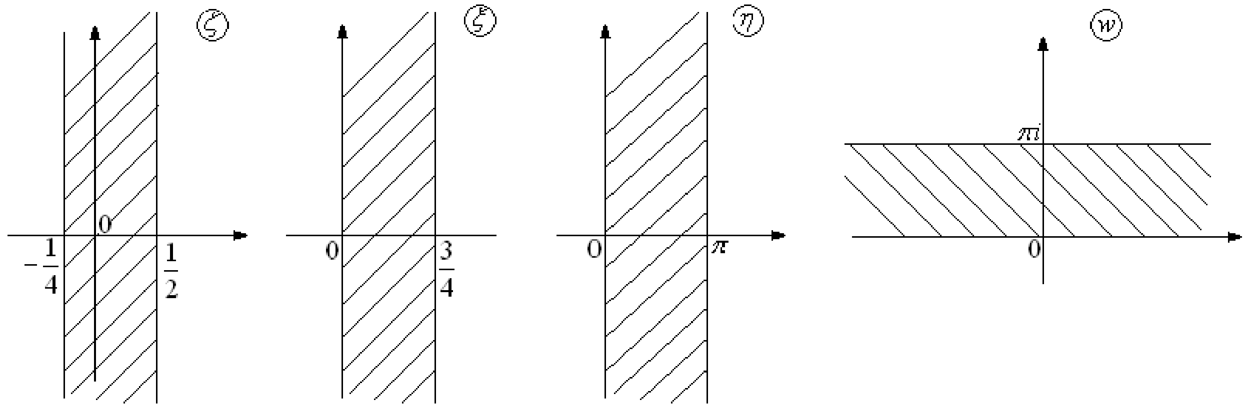




2) Відображення $\xi = \frac{1}{t}$ кола $|t+2| = 2$ і $|t-1| = 1$ переводить відповідно в прямі $\operatorname{Re}\xi = -\frac{1}{4}$ і $\operatorname{Re}\xi = \frac{1}{2}$ внаслідок кругової властивості. Оскільки $t = 3 \to \xi = \frac{1}{3}$ i $t = \text{-}5 \to \xi = \frac{1}{5}$, то образом заштрихованої області на $t-$ площині є смуга $\left\{-\frac{1}{4} < \operatorname{Re}\zeta < \frac{1}{2}\right\}.$

3) $\xi = \zeta + \frac{1}{4}$ – паралельне перенесення на $\frac{1}{4}$.

4) $\eta = \frac{4}{3}\pi\xi$ – розтяг на $\frac{4}{3}\pi$.



5) $w = e^{i\frac{\pi}{2}}\eta$ – поворот на кут $\dfrac{\pi}{2}$.

6) Відображення $W = e^{w}$ переводить смугу $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ у верхню півплощину.

Виразимо тепер змінну w через z:

$$w = i\frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi i}{3}\cdot\frac{z+2}{z-2}.$$

Шукане відображення: $W = e^{\frac{\pi i}{3}\cdot\frac{z+2}{z-2}}$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

67. Знайти образи областей D при відображенні $W = e^{z}$:

1) $D = \{z : -\infty < \operatorname{Re} z < 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$; 2) $D = \{z : 1 < \operatorname{Re} z < 3,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$;

3) $D = \left\{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1,\ \dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; 4) $D = \{z : \operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \alpha \le 2\pi\}$.

68. З'ясувати, в що перейде при відображенні $W = \ln z$:

1) полярна сітка $|z| = r,\ \arg z = 0$;

2) кут $0 < \arg z < \alpha \le 2\pi$; 3) сектор 1) $\{|z| < 1,\ 0 < \arg z < \alpha \le 2\pi\}$;

4) кільце $r_1 < |z| < r_2$ з розрізом по відрізку $[r_1, r_2]$.

69. З'ясувати, в що перетвориться при відображенні $W = \cos z$:

1) прямокутна сітка $x = c,\ y = c$;

2) півсмуга $\left\{0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ y > 0\right\}$;

3) смуга $0 < x < \pi$.

70. Знайти образ смуги $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ при відображенні $W = \operatorname{ch} z$.

71. Знайти образ смуги $-\dfrac{1}{2} < \operatorname{Re} z < \dfrac{1}{2}$ при відображенні $W = \sin z$.

72. Відобразити півсмугу $\{0 < \operatorname{Re} z < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ на півкруг $\{|W| < 1, \operatorname{Im} W > 0\}$.

73. Відобразити на верхню півплощину $\operatorname{Im} W > 0$:

1) смугу $\{0<\operatorname{Re} z<a,\ a>0\}$; 2) півсмугу $\{\operatorname{Re} z<1,\ 0<\operatorname{Im} z<h\}$;

3) кругову луночку, обмежену колами $|z|=2,\ |z-1|=1$;

4) область $\{z:\ |z-1|>1, |z+1|>1, \operatorname{Im} z>0\}$ (верхня півплощина в викинутими півкругами).

74. Знайти області на які функція Жуковського відображає:

1) круг $\{|z|<1\}$; 2) півкруг $\{|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$;

3) область $\{1<|z|<R,\ \operatorname{Im} z>0\}$;

4) область $\left\{\frac{1}{R}<|z|<R,\ \operatorname{Im} z>0,\ \operatorname{Re} z>0\right\}$.

75. Знайти область, на яку функція Жуковського відображає круг $\{|z|<1\}$ з розрізом по відрізку $[a,1]$ $(-1<a<1)$. Розглянути випадки $a>0$ і $a<0$.

76. Круг $\{|z|<1\}$ з розрізом по відрізку $\left[\frac{1}{2},1\right]$ відобразити на верхню півплощину.

РОЗДІЛ 13. РОЗКЛАД РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ НА СУМУ ПРОСТИХ ДРОБІВ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Розкласти на суму простих дробів раціональні дроби:

$$a)\ \frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}, \quad б)\ \frac{z}{\left(z^2+1\right)(z-1)^3}.$$

Розв'язання. $a)$ Маємо:

$$\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}=\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}=\frac{A}{z-i}+\frac{B}{(z-i)^2}+\frac{C}{z+i}+\frac{D}{(z+i)^2}.$$

Використовуючи формули одержимо:

$$B=\left.\frac{1}{(z+i)^2}\right|_{z=i}=-\frac{1}{4};\ D=\left.\frac{1}{(z-i)^2}\right|_{z=-i}=-\frac{1}{4};$$

$$A=\left.\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]'\right|_{z=i}=-\left.\frac{2}{(z+i)^3}\right|_{z=i}=-\frac{1}{4}i;$$

$$C=\left.\left[\frac{1}{(z-i)^2}\right]'\right|_{z=-i}=-\left.\frac{2}{(z-i)^3}\right|_{z=-i}=\frac{1}{4}i.$$

$б)$ Даний дріб має вигляд

$$\frac{z}{(z-i)(z+i)(z-1)^3}=\frac{A}{z-i}+\frac{B}{z+i}+\frac{C}{z-1}+\frac{D}{(z-1)^2}+\frac{E}{(z-1)^3}.$$

За формулами обчислимо значення A, B, C, D, E.

Одержимо:

$$A=\left[\frac{z}{(z+i)(z-1)^3}\right]\Bigg|_{z=i}=\frac{1-i}{8};\; B=\left[\frac{z}{(z-i)(z-1)^3}\right]\Bigg|_{z=-i}=\frac{1+i}{8};$$

$$E=\left(\frac{z}{z^2+1}\right)\Bigg|_{z=1}=\frac{1}{2};\; D=\left(\frac{z}{z^2+1}\right)'\Bigg|_{z=1}=\left[\frac{1-z^2}{\left(z^2+1\right)^2}\right]\Bigg|_{z=1}=0;$$

$$C=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z^2+1}\right)''\Bigg|_{z=1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1-z^2}{\left(z^2+1\right)^2}\right]'\Bigg|_{z=1}=-\frac{1}{4}.$$

РОЗДІЛ 14. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОЇ ФОРМУЛИ КОШІ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Обчислити інтеграл

$$I=\int_c \frac{z}{z^4-1}dz\ , \quad \text{де } C=\{|z-i|=1\}.$$

Розв'язання. Із точок $z=\pm1,\pm i,$ в яких знаменник перетворюється в нуль, кругу $|z-i|<1$ належить тільки точка $z_0=i$. За формулою знаходимо:

$$I=\int_c \frac{zdz}{\left(z^2-1\right)(z+i)(z-i)}=2\pi i\left[\frac{z}{\left(z^2-1\right)(z+i)}\right]\Bigg|_{z=i}=-\frac{\pi i}{2}.$$

Задача 2. Обчислити інтеграл

$I=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$, якщо точка $z=1$ лежить всередині, а точка $z=0$ ззовні контуру C.

Розв'язання. За формулою (2) маємо:

$$I=-\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^z}{z}\cdot\frac{dz}{(1-z)^3}=-\frac{1}{2!}\left(\frac{e^z}{z}\right)''\Bigg|_{z=1}=-\frac{e}{2}.$$

Задача 3. Обчислити інтеграл

$$I=\int_{|z|=2}\frac{e^{\pi z}}{\left(z^2+1\right)^2}dz\ .$$

<u>Розв’язання.</u> <u>Перший спосіб.</u> Використовуючи розклад

$$\frac{e^{\pi z}}{\left(z^2+1\right)^2}=-\frac{1}{4}i\frac{e^{\pi z}}{z-1}-\frac{1}{4}\frac{e^{\pi z}}{\left(z-1\right)^2}+\frac{1}{4}i\frac{e^{\pi z}}{z+i}-\frac{1}{4}\frac{e^{\pi z}}{\left(z+i\right)^2},$$ (див. задачу теми 13),

одержимо:

$$I=2\pi i\left[-\frac{1}{4}i\left(e^{\pi z}\right)\Big|_{z=i}-\frac{1}{4}\left(e^{\pi z}\right)'\Big|_{z=i}+\frac{1}{4}i\left(e^{\pi z}\right)\Big|_{z=-i}-\frac{1}{4}\left(e^{\pi z}\right)'\Big|_{z=-i}\right]=$$

$$=2\pi i\left(-\frac{1}{4}\pi e^{\pi i}-\frac{1}{4}\pi e^{-\pi i}\right)=\pi^2 i.$$

<u>Другий спосіб.</u> Маємо:

$$I=\int_{\partial D_1}\frac{e^{\pi z}}{\left(z+i\right)^2}\cdot\frac{dz}{\left(z-i\right)^2}+\int_{\partial D_2}\frac{e^{\pi z}}{\left(z-i\right)^2}\cdot\frac{dz}{\left(z+i\right)^2}=$$

$$=2\pi i\left[\frac{e^{\pi z}}{\left(z+i\right)^2}\right]'\Bigg|_{z=i}+2\pi i\left[\frac{e^{\pi z}}{\left(z-i\right)^2}\right]'\Bigg|_{z=-i}=2\pi i\left[\frac{\pi e^{\pi z}}{\left(z+i\right)^2}-\frac{2e^{\pi z}}{\left(z+i\right)^3}\right]\Bigg|_{z=i}+$$

$$+2\pi i\left[\frac{\pi e^{\pi z}}{\left(z-i\right)^2}-\frac{2e^{\pi z}}{\left(z-i\right)^3}\right]\Bigg|_{z=-i}=2\pi i\frac{\pi e^{\pi i}}{-4}+2\pi i\frac{\pi e^{-\pi i}}{-4}=\pi^2 i.$$

В даному випадку можна взяти:

$D_1=\left\{|z|<2,\operatorname{Im}z>0\right\},\ D_2=\left\{|z|<2,\operatorname{Im}z<0\right\}.$

<u>ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ</u>

77. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_L |z|\cdot\bar{z}dz$, де L – частина кола $|z|=1;0\le\arg\le\pi$ вибравши за початок кривої L точку $z=1$;

2) $\int\limits_L e^{\bar{z}}dz$, де L – відрізок прямої з початком в точці $z_1=0$ і кінцем в точці $z_2=(1-i)\pi$;

3) $\int\limits_L (i\arg z-1)dz$, де L- дуга параболи $y=x^2;0\le x\le 1$;

4) $\int\limits_L z^2+z\bar{z}dz$ де L- дуга параболи $y=x^2;0\le x\le 1$ і початок кривої в точці $z=0$;

5) $\int\limits_L \frac{dz}{|\operatorname{Re}z|+|\operatorname{Im}z|}$, де L – квадрат з вершинами в точках 1;i;-1;-i;

6) $\int\limits_L \frac{zdz}{\bar{z}}$, де L – контур $|z|=1;|z|=2;0\le\arg z\le\frac{\pi}{2}$;

7) $\int\limits_L \frac{zdz}{|z|}$, де L – складається з ліній $|z|=1;0\le\arg\le\pi$; $y=0;1\le\operatorname{Re}z\le 2$;

8) $\int\limits_L (\operatorname{Im} z^2 + \operatorname{Re} z)dz$; де L – квадрат з вершинами в точках 1;i;-1;-i;

Обчислити наступні інтеграли за інтегральною формулою Коші.

1) $\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{ze^{2z}}{z-\pi i}dz;$ 2) $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z-1}{z(z-i)}dz;$ 3) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z-1)(z+i)}dz.$

78. Обчислити всі можливі значення інтеграла $\int\limits_c \frac{dz}{z(z^2-1)}$ при різних положеннях замкнутого контуру C, який не проходить через жодну з точок $0,\ 1, -1$.

79. Обчислити інтеграл:

$$\int\limits_C \frac{(z+i)\sin^2 z}{z^2+9}dz\ , \quad \text{де } C=\{z:\ |z+3|+|z-3|=10\}.$$

80. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z}{(z-i)^{10}}dz;$ 2) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^3}dz;$ 3) $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^3 \operatorname{sh} z}{(z-1)^4}dz.$

81. Обчислити інтеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z dz}{z^2+a^2}$, якщо контур C містить всередині круг $|z| \le a\ (a>0)$.

82. Обчислити інтеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}$, якщо точка a лежить всередині контуру C.

83. Обчислити інтеграл $\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)}dz.$

РОЗДІЛ 15. РОЗКЛАД ФУНКЦІЇ В РЯД ТЕЙЛОРА

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Розкласти функцію $e^z \sin z$ в ряд Тейлора за степенями z.

Розв’язання. Користуючись розкладом функції e^t, одержимо:

$$e^z \sin z = e^z \frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right) = \frac{1}{2i}\left[e^{(1+i)z}-e^{(1-i)z}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n z^n}{n!}\right] = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n \frac{z^n}{n!} - \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n \frac{z^n}{n!}\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{2^n}\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{\pi}{4}n}-e^{-i\frac{\pi}{4}n}\right)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{2^n}\cdot\sin\frac{\pi}{4}n\cdot\frac{z^n}{n!}.$$

<u>Задача 2.</u> Функцію $f\left(z\right)=\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$ розкласти в ряд за степенями $\left(z-1\right)$ і знайти радіус збіжності одержаного ряду.

<u>Розв'язання.</u> Дану функцію розкладемо на суму простих дробів. Маємо:

$$\frac{2z-5}{\left(z-2\right)\left(z-3\right)}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-3};\ A=\left(\frac{2z-5}{z-3}\right)\Bigg|_{z=2}=1;\ B=\left(\frac{2z-5}{z-2}\right)\Bigg|_{z=3}=1.$$

Скориставшись розкладом одержимо:

$$f\left(z\right)=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-3}=\frac{1}{\left(z-1\right)-1}+\frac{1}{\left(z-1\right)-2}=-\frac{1}{1-\left(z-1\right)}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(z-1\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-1\right)^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(z-1\right)^n.$$

Одержаний ряд збігається на множині $\left\{\left|z-1\right|<1\right\}\cap\left\{\left|\dfrac{z-1}{2}\right|<1\right\}$.

Отже, радіус збіжності $R=1$.

<u>Задача 3.</u> Знайти перші три відмінні від нуля члени розкладу функції $\operatorname{tg} z$ в степеневий ряд в околі точки $z_0=0$.

<u>Розв'язання.</u> Скористаємося методом невизначених коефіцієнтів. Нехай

$$\operatorname{tg} z=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$$

Тоді $\sin z=\cos z\left(a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots\right)$ або

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)\left(a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots\right).$$

Для визначення коефіцієнтів $a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots$ряди в правій частині рівності перемножимо і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях z.

Одержимо: $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=0,\ a_3-\dfrac{1}{2!}=-\dfrac{1}{3!},\ a_4-\dfrac{a_2}{2!}=0,\ a_5-\dfrac{a_3}{2!}+\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{5!}$, або

$$a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=0,\ a_3=\frac{1}{3},\ a_4=0,\ a_5=\frac{2}{15}.$$

Шуканий розклад: $\operatorname{tg} z=z+\dfrac{1}{3}z^3+\dfrac{2}{15}z^5+\ldots$.

<u>ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ</u>

84. Вказані функції розкласти в ряди Тейлора за степенями z і знайти їх радіуси збіжності:

1) $\operatorname{ch} z$; 2) $\operatorname{sh} z$; 3) $\arcsin z$; 4) $\operatorname{arctg} z$; 5) $\dfrac{1}{(1+z)^3}$; 6) $\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$;

7) $\dfrac{z^2}{(1+z)^2}$; 8) $\dfrac{z}{z^2-4z+13}$; 9) $\dfrac{1}{\left(z^2-1\right)^2\left(z^2-4\right)}$; 10) $\ln\dfrac{1+z}{1-z}$.

85. Функції розкласти в степеневі ряди за степенями $z-z_0$ та визначити їх радіуси збіжності:

1) $\dfrac{z}{z+2}$, $z_0=0$; 2) $\dfrac{1}{2z+3}$, $z_0=1$; 3) $\dfrac{z-i}{z+i}$, $z_0=i$;

4) $\dfrac{z}{z^2-2z+5}$, $z_0=1$; 5) $\dfrac{z}{\left(z^2+1\right)(z-1)}$, $z_0=-1$;

6) $\cos z$, $z_0=\dfrac{\pi}{4}$; 7) $\sin\left(2z-z^2\right)$, $z_0=1$.

86. Розкласти в ряд Тейлора в околі точки $z=0$ такі функції:

1) $\sin^2 z$; 2) $\cos^2 z$; 3) $\operatorname{ch} z\cos z$; 4) $\cos^2 z+\operatorname{ch}^2 z$;

5) $\sin^4 z+\cos^4 z$; 6) $e^z\cos z$; 7) $e^z\sin z$.

87. За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайти перші три відмінні від нуля члени розкладу функцій в ряд Тейлора в околі точки $z=0$:

1) $\dfrac{z}{\ln(1+z)}$; 2) $\dfrac{z}{arctgz}$; 3) $\dfrac{z}{\arcsin z}$; 4) $e^{z\cos z}$.

РОЗДІЛ 16. НУЛІ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайти порядок нулів функції $f(z)=\ln\cos z$.

Розв'язання. Оскільки $\ln t=0\Leftrightarrow t=1$, то звідси маємо $\cos z=1\Leftrightarrow z=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Отже, нулями функції $f(z)$ є точки $z_k=2\pi k$.

Визначимо порядок цих нулів. Знаходимо:

$$f'(z)=-\operatorname{tg} z,\ f'(z_k)=0;\ f''(z)=-\frac{1}{\cos^2 z},\ f''(z_k)\neq 0.$$

Таким чином, всі нулі z_k даної функції другого порядку.

Задача 2. Знайти нулі функції $f(z)=\dfrac{\left(z^2-z-2\right)^3}{1+\cos\pi z}$ і їх порядки.

Розв'язання. Нулями $z\in\mathbb{C}$ даної функції можуть бути точки $z=-1$ і $z=2$, в яких чисельник перетворюється в нуль. Для знаменника $g(z)=1+\cos\pi z$ точка $z=-1$ – нуль 2-ого порядку, оскільки

$g(-1)=0,\ g'(-1)=-\pi\sin(-\pi)=0,\ g''(-1)=-\pi^2\cos\pi\neq 0$.

За теоремою про нулі функції $g(z)=(z+1)^2\varphi(z)$, де $\varphi(-1)\neq 0$.

Отже, $f(z)=\dfrac{(z+1)^3(z-2)^3}{(z+1)^2\varphi(z)}=(z+1)\cdot\dfrac{(z-2)^3}{\varphi(z)}$.

Це означає. Що $z=-1$ – нуль 1-ого порядку функції $f(z)$. Оскільки $g(2)\neq 0$, то $z=2$ для даної функції є нулем 3-ого порядку.

Задача 3. Визначити порядок нуля $z=\infty$ для функції $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^4}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $\varphi(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{t^{-2}+1}{t^{-4}}=t^2(1+t^2)$.

Для функції $\varphi(t)$ точка $t=0$ – нуль 2-ого порядку, отже, для функції $f(z)$ точка $z=\infty$ – нуль теж 2-ого порядку.

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

88. Знайти порядок нуля $z=0$ для функцій:

1) $z^2\left(e^{z^2}-1\right)$; 2) $6\sin z^3+z^3\left(z^6-6\right)$; 3) $e^{\sin z}-e^{\operatorname{tg} z}$.

89. Знайти порядки всіх нулів даних функцій:

1) $e^{z-1}-1$; 2) $e^{2z}-3e^z+2$; 3) $1-\cos z$; 4) $e^{\operatorname{tg} z}$;

5) $\sin^2 z+\sin z$; 6) $\dfrac{\sin^2(z-1)}{\cos\dfrac{\pi z}{2}}$; 7) $\dfrac{1-\cos z^2}{1+\cos z}$; 8) $e^{\frac{1}{z}}-1$;

9) $\dfrac{(z^2-9)^2(z-1)^3}{z^2-4z+3}$; 10) $\left(1-\sqrt{2-2\cos z}\right)^2$.

90. Нехай функції $f(z)$ і $g(z)$ аналітичні в точці $z=z_0$ і $f(z_0)=g(z_0)=0$. Довести, що:

1) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$; 2) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)g^2(z)}{g'(z)f^2(z)}$.

РОЗДІЛ 17. РЯДИ ЛОРАНА

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайти область збіжності ряду Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^n+1}$.

Розв'язання. Виділимо правильну і головну частину ряду:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+1}+\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+1}=\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+1}\right)}_{(1)}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{3^{-n}+1}}_{(2)}.$$

Визначимо радіус збіжності ряду (1):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+1}{3^n+1}=3.$$

Поклавши $\frac{1}{z}=\zeta$, знайдемо радіус збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{-n}+1}\cdot\zeta^n$.

Маємо:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{-n-1}+1}{3^{-n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{-1}+3^n}{1+3^n}=1.$$

Ряд (2) збігається при $|z|^{-1}<1$ або $|z|>1$.

Отже, даний ряд збіжний в кільці $\{1<|z|<3\}$.

Задача 2. Розкласти в ряд Лорана функцію

$$f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)} \text{ в кільці } 1<|z|<2.$$

Розв'язання. Розклавши даний дріб на суму простих дробів, одержимо

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}.$$

Функція $f_1(z)=\frac{1}{z-2}$ аналітична в крузі $|z|<2$, розкладемо її в цьому крузі в ряд Тейлора. Маємо:

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k+1}}.$$

Функція $f_2(z)=\frac{-2}{z^2+1}$ має особливі точки $z=\pm i$, отже, вона є аналітичною при $|z|>1$. В цій області функцію $f_2(z)$ розкладемо в ряд Лорана. Маємо:

$$\frac{-2}{z^2+1}=-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=-\frac{2}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{z^2}\right)^k=$$

$$=2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{z^{2k+2}}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}.$$

Взявши суму розкладів для f_1 і f_2, одержимо розклад в ряд Лорана функції $f(z)$:

$$f(z)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Задача 3. Функцію $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ розкласти в ряд Лорана в околі точок $z=1$ і $z=\infty$.

Розв’язання. 1) Маємо: $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z+(z-1)}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k$ при $|z-1|<1$. Тому одержимо:

$$\frac{1}{z(1-z)}=-\frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k=-\frac{1}{z-1}\left[1-(z-1)+(z-1)^2-\ldots\right]=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2-\ldots$$

або, теж саме – $\dfrac{1}{z(1-z)}=-\dfrac{1}{z-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$ при $0<|z-1|<1$.

2) При $|z|>1$ одержимо розклад

$\dfrac{1}{1-z}=-\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\dfrac{1}{z}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^k}$, звідки маємо $\dfrac{1}{(1-z)z}=-\dfrac{1}{z^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^k}=-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{k+2}}$ або,

що теж саме – $\dfrac{1}{z(1-z)}=-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}$ при $|z|>1$.

Задача 4. Функцію $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-1}$ розкласти в ряд Лорана в околі точки $z=1$.

Розв’язання. Функцію представимо у вигляді

$$f(z)=\sin\frac{z}{z-1}=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z-1}.$$

Користуючись відомими розкладами для функції $\cos t$ і $\sin t$ одержимо:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin 1}{(2k)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2k}}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos 1}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2k+1}}.\qquad (*)$$

Враховуючи, що

$$\sin\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^k\sin 1 \text{ при } n=2k,\\ (-1)^k\cos 1 \text{ при } n=2k+1,\end{cases}$$

з рівності (*) одержимо $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(z-1)^{-n}$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

91. Знайти області збіжності рядів Лорана:

$$1)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n;\ 2)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1};\ 3)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n z^n;$$

$$4)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{\operatorname{ch} 2n};\ 5)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-3}};\ 6)\ 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}};$$

$$7)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}.$$

92. Вказані функції розкласти в ряд Лорана за степенями z в кільці $1<|z|<2$:

$$1)\ \frac{1}{(z+1)(z-2)};\ 2)\ \frac{z}{(z^2+1)(z+2)};\ 3)\ \frac{1}{(z-1)(z+2)}.$$

93. Дані функції розкласти в ряд Лорана в кільці Q:

$$1)\ f(z)=\frac{1}{z(z-3)^2},\ Q=\{1<|z-1|<2\};\ 2)\ f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2},\ Q=\{|z|>2\};$$

$$3)\ f(z)=\frac{1}{(z^2-9)z^2},\ Q=\{1<|z-1|<2\};\ 4)\ f(z)=\frac{1}{(z^2-4)^2},\ Q=\{|z+2|>4\}.$$

94. Функції розкласти в ряд Лорана в околах відповідних точок z_0 і вказати області збіжності одержаних розкладів:

$$1)\ \frac{1}{(z^2+1)^2} \quad \text{в околі точок } z_0=i \text{ і } z_0=\infty;$$

$$2)\ \frac{1-e^{-z}}{z^3},\ z_0=0;\ 3)\ \frac{1+\cos^2 z}{z^4},\ z_0=\infty;\ 4)\ z^2\sin\frac{1}{z-1},\ z_0=1;$$

$$5)\ \cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2},\ z_0=2;\ 6)\ \frac{z^3}{(z+1)(z-2)},\ z_0=-1;\ 7)\ \frac{1}{z(z-1)(z-2)},\ z_0=0.$$

РОЗДІЛ 18. ІЗОЛЬОВАНІ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Довести, що точка $z=0$ є усувною особливою точкою функції

$$f(z)=\frac{\operatorname{tg} z-\sin z}{z^3}.$$

Розв’язання. Маємо:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\frac{\frac{1}{\cos z}-1}{z^2}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{1}{\cos z}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{z^2}=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin\frac{z}{2}}{\frac{z}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

За означенням $z=0$ – усувна особлива точка деякої функції.

Задача 2. Довести, що точка $z=\infty$ є полюсом функції $f(z)=\dfrac{z^5}{(z-1)^2}$ і знайти її порядок.

Розв'язання. Для функції $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{(z-1)^2}{z^5}$ точка $z=\infty$ є нулем, оскільки $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{(z-1)^2}{z^5}=0$. Розглянемо функцію

$$\psi(\zeta)=\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{\left(\zeta^{-1}-1\right)^2}{\zeta^{-5}}=\zeta^3(1-\zeta)^2.$$

Для функції $\psi(\zeta)$ точка $\zeta=0$ – нуль 3-го порядку, тоже, $z=\infty$ – полюс 3-го порядку для функції $f(z)$.

Задача 3. Довести, що точка z_0 є істотно особливою точкою функції $f(z)$:

$$1)\ f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}},\ z_0=0;\quad 2)\ f(z)=\cos\frac{z}{z+1},\ z_0=-1.$$

Розв'язання. 1) Функцію розкладемо в ряд Лорана в околі точки $z=0$:

$$z^3e^{\frac{1}{z}}=z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\dots\right)=z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\frac{1}{5!z^2}+\dots.$$

Оскільки головна частина розкладу містить нескінчену кількість членів, то $z=0$ – істотно особлива точка даної функції.

3) Відомо, що $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ не існує, тому не існує і границя $\lim\limits_{\zeta\to\infty}\cos\zeta$ $(\zeta\in\mathbb{C})$.

Оскільки $\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{z}{z+1}=\infty$, то $\lim\limits_{z\to -1}\cos\dfrac{z}{z+1}$ не існує. За означенням $z=-1$– істотно особлива точка даної функції.

Задача 4. Знайти всі особливі точки функції $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$.

Розв'язання. Функцію подамо у вигляді $f(z)=\dfrac{z-e^z+1}{z\left(e^z-1\right)}$.

Визначимо в яких точках знаменник дробу перетворюється в нуль. Одержимо: $z_0=0,\ z_k=\mathrm{Ln}1=2\pi ki,\ k=\pm1,\ \pm2,\dots$

а) В околі точки $z_0=0$ маємо:

$$f(z)=\frac{z-1-z-\frac{z^2}{2!}-\ldots+1}{z\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots-1\right)}=\frac{-\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}-\ldots}{z^2\left(1+\frac{z}{2}+\ldots\right)}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{z}{6}-\ldots}{1+\frac{z}{2}+\ldots}.$$

Оскільки існує $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=-\frac{1}{2}$, то $z_0=0$ – усувна особлива точка функції $f(z)$.

б) В точках $z_k=2\pi ki$ $(k=\pm 1,\ \pm 2,\ldots)$ чисельник дробу не дорівнює нулю. Через те, z_k – полюси функції $f(z)$.

Порядок полюсів z_k функції $f(z)$ співпадає з порядком нулів z_k функції $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{z\left(e^z-1\right)}{z-e^z+1}$.

Оскільки при $z=z_k$ вираз $z-e^z+1=2\pi ki\neq 0$, то досить визначити порядок нулів z_k функції $g(z)=z\left(e^z-1\right)$. Маємо:

$g(2\pi ki)=0$, $g'(z)=e^z-1+ze^z$, $g'(2\pi ki)=2\pi ki\neq 0$.

Отже, точки $z_k=2\pi ki$ $(k=\pm 1,\ \pm 2,\ldots)$ є полюсами 1-го порядку функції $f(z)$.

Точка $z=\infty$ – гранична точка для множини полюсів.

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

95. Довести, що точка z_0 є усувною особливою точкою відповідних функцій:

1) $\frac{z^2-1}{z-1}$, $z_0=1$; 2) $\frac{1-\cos z}{z^2}$, $z_0=0$; 3) $\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}$, $z_0=0$;

4) $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{\sin z}$, $z_0=0$; 5) $\frac{1+\cos z}{z-\pi}$, $z_0=\pi$; 6) $\frac{z}{z^2+1}$, $z_0=\infty$;

7) $z\left(e^{\frac{1}{z}}-1\right)$, $z_0=\infty$; 8) $\frac{1-\cos z^{-2}}{\sin z^{-2}}$, $z_0=\infty$.

96. Знайти полюси даних функції і визначити їх порядок:

1) $\frac{\cos z}{\left(z^2-z-2\right)^2}$; 2) $\frac{z}{\left(z^3+1\right)^2}$; 3) $\frac{1}{2-\cos z}$; 4) $\frac{z}{1+e^z}$;

5) $\operatorname{tg}\pi z$; 6) $\operatorname{ctg}\pi z$; 7) $\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{\sin^2(z-1)}$; 8) z^3+z-1.

97. Довести, що точка z_0 є істотно особливою точкою відповідних функції:

$$1)\ \sin\frac{\pi}{z^2+1},\ z_0=-i;\ \ 2)\ e^{-z^2},\ z_0=\infty;\ \ 3)\ z^4 e^{\frac{1}{z}},\ z_0=0;$$

$$4)\ z^2\cos\frac{\pi}{2},\ z_0=0;\ \ 5)\ \sin z+e^{\frac{1}{z}},\ z_0=\infty;\ \ 6)\ \frac{e^z}{e^z+1},\ z_0=\infty.$$

98. Знайти всі особливі точки відповідних функції і визначити їх тип:

$$1)\ \frac{z}{\sin z};\ 2)\ \frac{1-\cos z}{\sin^2 z};\ 3)\ z^2\sin\frac{z}{z+1};\ 4)\ \operatorname{ctg} z-\frac{1}{z};$$

$$5)\ \sin\left(e^{\frac{1}{z}}\right);\ 6)\ z\left(e^{\frac{1}{z}}-1\right);\ 7)\ \frac{1-e^z}{1+e^z};\ 8)\ z\operatorname{ch}\frac{1}{z};\ 9)\operatorname{th} z;$$

$$10)\ e^{\frac{1}{\sin z}};\ 11)\ \frac{\sin z}{z\left(z^2-1\right)};12)\ z^2\cos\frac{1}{z}-z;\ 13)\ \frac{z^3}{\sin^2\dfrac{1}{z+1}}.$$

РОЗДІЛ 19. <u>ОБЧИСЛЕННЯ ЛИШКІВ</u>

<u>РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ</u>

<u>Задача 1.</u> Обчислити лишок функції $f\left(z\right)=\dfrac{z^{2n}}{\left(z+1\right)^n}$, $n\in\mathbb{N}$ в точці $z_0=-1$.

<u>Розв'язання.</u> За формулою бінома Ньютона маємо:

$$z^{2n}=\left[-1+\left(z+1\right)\right]^{2n}=1-C_{2n}^1\left(z+1\right)+C_{2n}^2\left(z+1\right)^2+\ldots+$$
$$+\left(-1\right)^{n+1}C_{2n}^{n-1}\left(z+1\right)^{n-1}+\left(-1\right)^n C_{2n}^n\left(z+1\right)^n+\ldots+\left(z+1\right)^{2n} \qquad (*)$$

Розділивши вираз (*) почленно на $\left(z+1\right)^n$, одержимо розклад функції $f\left(z\right)$ в ряд Лорана за степенями $\left(z+1\right)$. При цьому

$$C_{-1}\left(z+1\right)^{-1}=\frac{\left(-1\right)^{n+1}C_{2n}^{n-1}\left(z+1\right)^{n-1}}{\left(z+1\right)^n}.$$

За теоремою маємо

$$\operatorname*{res}_{-1}\frac{z^{2n}}{\left(z+1\right)^n}=C_{-1}=\left(-1\right)^{n+1}C_{2n}^{n-1}.$$

<u>Задача 2.</u> Обчислити $\operatorname*{res}_{0}\dfrac{1}{z-\sin z}$.

<u>Розв'язання.</u> Маємо:

$$z-\sin z=z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots\right)=\frac{z^3}{6}-\frac{z^5}{120}+\frac{z^7}{7!}-\ldots=$$
$$=z^3\left(\frac{1}{6}-\frac{z^2}{120}+\frac{z^4}{7!}-\ldots\right)=z^3\psi\left(z\right),$$

де $\psi(z)=\frac{1}{6}-\frac{z^2}{120}+\frac{z^4}{7!}-\ldots$.

Отже, $\frac{1}{z-\sin z}=\frac{\varphi(z)}{z^3}$, де $\varphi(z)=\frac{1}{\psi(z)}$, $\varphi(z)$ – аналітична функція і $\varphi(0)\neq 0$. Це означає, що $z_0=0$ – полюс 3-го порядку для функції $\frac{\varphi(z)}{z^3}$. За формулою одержимо:

$$\operatorname*{res}_0\frac{1}{z-\sin z}=\frac{1}{2!}\varphi''(0).$$

Обчислимо $\varphi''(0)$. Маємо: $\varphi'=\left(\psi^{-1}\right)'=-\psi^{-2}\psi'$, $\varphi''=\left(-\psi^{-2}\psi'\right)'=$

$=2\psi^{-3}\left(\psi'\right)^2-\psi^{-2}\psi''$, причому $\psi'=-\frac{2z}{120}+\frac{4z^3}{7!}-\ldots$,

$$\psi''=-\frac{z}{60}+\frac{12z^2}{7!}-\ldots,\ \psi'(0)=0,\ \psi''(0)=-\frac{1}{60},\ \psi(0)=\frac{1}{6}.$$

Звідси одержимо: $\varphi''(0)=-6^2\left(-\frac{1}{60}\right)=\frac{6}{10}$, $\operatorname*{res}_0\frac{1}{z-\sin z}=0{,}3.$

<u>Задача 3.</u> Обчислити лишки функції $f(z)=\frac{\sin z}{\left(z^2+1\right)^2}$ в усіх її особливих точках і в точці $z=\infty$.

<u>Розв’язання.</u> Функція $f(z)=\frac{\sin z}{(z+i)^2(z-i)^2}$ має особливі точки: $z_1=i,\ z_2=-i$ – полюс 2-го порядку і $z_3=\infty$ – істотно особливу точку.

За формулою

$$\operatorname*{res}_i f(z)=\left.\left[\frac{\sin z}{(z+i)^2}\right]'\right|_{z=i}=\left.\frac{\cos z\cdot(z+i)^2-2(z+i)\sin z}{(z+i)^4}\right|_{z=i}=$$

$$=\frac{-4\cos i-4i\sin i}{16}=-\frac{1}{4}\left(\frac{e^{-1}+e}{2}+\frac{e^{-1}-e}{2}\right)=-\frac{1}{4}e^{-1}.$$

Враховуючи, що функція $f(z)$ непарна, то лишок в симетричних точках співпадає

$$\operatorname*{res}_{-i} f(z)=-\frac{1}{4}e^{-1}.$$

Користуючись теоремою про суму всіх лишків, одержимо

$$\operatorname*{res}_\infty f(z)=-\operatorname*{res}_i f(z)-\operatorname*{res}_{-i} f(z)=\frac{1}{2}e^{-1}.$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

99. Обчислити лишки функцій в усіх особливих точках і в точці $z=\infty$ (якщо вона не є граничною для особливих точок):

$$1)\ \frac{1}{z^3-z^5};\ 2)\ \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2};\ 3)\ \frac{1}{z\left(1-z^2\right)};\ 4)\ \frac{\sin 2z}{\left(z+1\right)^3};$$

$$5)\ \frac{e^z}{z^2\left(z^2+9\right)};\ 6)\ \operatorname{tg} z;\ 7)\ \frac{1}{\sin z};\ 8)\ \operatorname{ctg}^2 z;\ 9)\ \frac{z-1}{z^{13}\left(z+2\right)};$$

$$10)\ \sin z\cdot\sin\frac{1}{z};\ 11)\ \sin\frac{z}{z+1};\ 12)\ z^n\sin\frac{1}{z}\quad\left(n\in\mathbb{Z}\right);$$

$$13)\ \frac{1}{z\left(z-e^{-hz}\right)}\quad\left(h\neq 0\right);\ 14)\ z^3\cos\frac{1}{z-2};15)\ \frac{\operatorname{tg} z}{z^n};$$

$$16)\ \frac{\cos z}{\left(z^2+1\right)^2};\ 17)\ \frac{1}{z^6\left(z-2\right)};\ 18)\ \frac{1+z^{10}}{z^6\left(z^2+4\right)}.$$

100. Обчислити:

$$1)\ \operatorname*{res}_0\frac{z^{n-1}}{\sin^n z}\quad\left(n\in\mathbb{N}\right);\ \ 2)\ \operatorname*{res}_0\frac{\operatorname{tg} z-z}{\left(1-\cos z\right)^2};\ 3)\ \operatorname*{res}_\infty\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1};$$

$$4)\ \operatorname*{res}_0\left(z^{n-3}\operatorname{ctg}^n z\right)\ \left(n=2,\ 3,\ \ldots\right)\ 5)\ \operatorname*{res}_\infty\frac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1};\ 6)\ \operatorname*{res}_\infty\left(z\cos^2\frac{\pi}{z}\right).$$

РОЗДІЛ 20. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ПО ЗАМКНЕНОМУ КОНТУРУ

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}}dz.$$

Розв’язання. Перемноживши ряди в правій частині рівності

$$e^z\cdot e^{\frac{1}{z}}=\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right),$$

одержимо розклад підінтегральної функції $f\left(z\right)=e^{z+\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана в околі її особливої точки $z_0=0$.

Для обчислення $\operatorname*{res}_0 f\left(z\right)$ досить знати коефіцієнт C_{-1} при z^{-1} степені розкладу. Маємо:

$$C_{-1}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!2!}+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{3!4!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+1)!}.$$

Всередині кола $\{|z|=1\}$ функція $f(z)$ має одну особливу точку $z_0=0$. Користуючись формулою (12) і теоремою 1 розділу 19, одержимо

$$\int_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}}dz=2\pi i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+1)!}.$$

<u>Задача 2.</u> Обчислити інтеграл

$$I=\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}.$$

<u>Розв'язання.</u> Підінтегральна функція $f(z)=\dfrac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$ має особливі точки: $z_k=\left(\sqrt[5]{1}\right)_k$ $\left(k=\overline{1,5}\right)$, $z_6=3$, $z_7=\infty$.

При цьому кругу $|z|<2$ належать точки z_k $\left(k=\overline{1,5}\right)$. За основною теоремою про лишки

$$I=2\pi i\sum_{k=1}^{5}\underset{z_k}{\operatorname{res}} f(z).$$

Або за теоремою про суму всіх лишків:

$$\sum_{k=1}^{5}\underset{z_k}{\operatorname{res}} f(z)=-\left[\underset{\infty}{\operatorname{res}} f(z)+\underset{3}{\operatorname{res}} f(z)\right]. \qquad (*)$$

Для обчислення лишку в нескінченності скористаємось формулою

$$\underset{\infty}{\operatorname{res}} f(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{-z}{(z-3)(z^5-1)}=0.$$

Для функції $f(z)$ точка $z_0=3$ – полюс 1-го порядку. Тому маємо:

$$\underset{3}{\operatorname{res}} f(z)=\left.\frac{1}{z^5-1}\right|_{z=3}=\frac{1}{3^5-1}=\frac{1}{242}.$$

Враховуючи рівність (*). одержимо:

$$I=-2\pi i\frac{1}{242}=-\frac{\pi i}{121}.$$

<u>Задача 3.</u> Обчислити інтеграл

$$I=\int_C\frac{dz}{(z-1)^3(z^2+1)}, \quad \text{де} \quad C=\{|z-1-i|=2\}.$$

<u>Розв'язання.</u> Підінтегральна функція $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^3(z+i)(z-i)}$ має особливі точки: $z_1=1$ – полюс 3-го порядку; $z_2=i$, $z_3=-i$ – полюси 1-го порядку. Кругу $\{|z-1-i|<2\}$ належать точки z_1 і z_2. Оскільки при $z=-i$ маємо

$|z-1-i|>2$, то точка $z_3=-i$ лежить ззовні круга $\{|z-1-i|\le 2\}$. За основною теоремою про лишки маємо $I=2\pi i\left[\underset{1}{\mathrm{res}}\, f(z)+\underset{i}{\mathrm{res}}\, f(z)\right]$. Користуючись формулами для обчислення лишків, одержимо:

$$\underset{1}{\mathrm{res}}\, f(z)=\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)''\Bigg|_{z=1}=\frac{3z^5-1}{\left(z^2+1\right)^3}\Bigg|_{z=1}=\frac{1}{4}.$$

$$\underset{i}{\mathrm{res}}\, f(z)=\frac{1}{(z-1)^3(z+i)}\Bigg|_{z=i}=-\frac{1+i}{8}.$$

Отже, даний інтеграл: $I=2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1+i}{8}\right)=\frac{\pi}{4}(1+i)$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

101. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_C \frac{dz}{z^4+1}$, де $C-$коло $x^2+y^2=2x$;

2) $\int\limits_C \frac{e^z}{z^2\left(z^2-9\right)}dz,\ C=\{z:|z|=1\}$;

3) $\int\limits_C \frac{z^2+1}{z^2\left(z^2-2\right)}dz,\ C=\{z:|z+1|+|z-1|=6\}$;

4) $\int\limits_C \frac{z\sin z}{(z-1)^5}dz,\ C=\{z:|z|=2\}$;

5) $\int\limits_C \frac{z\,\mathrm{sh}\, z dz}{z^2+z-6}$, де $C-$трикутник з вершинами в точках $3i,\ 3,\ -3i$;

6) $\int\limits_C z^2\,\mathrm{tg}\,\pi z dz,\ C=\{z:|z|=1\}$;

7) $\int\limits_C \frac{\mathrm{sh}\, z dz}{1-\sin\pi z},\ C=\{z:|z-1|=1\}$; 8) $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1}dz$;

9) $\int\limits_{|z|=r} \sin^2\frac{1}{z}dz$; 10) $\int\limits_{|z|=4} \frac{z^3}{e^{z^2}-1}dz$;

11) $\int\limits_C \frac{\sin z}{(z+1)^3}dz;\ \ C=\left\{(x,y): x^{2/3}+y^{2/3}=2^{2/3}\right\}$;

12) $\int\limits_{\partial G} \sin\frac{z}{z+1}dz,\ G=\{z:|z|>9\}$;

13) $\int\limits_{\partial G} \frac{\operatorname{ctg} z}{z} dz, \ \ G = \{ z : |z| > 1 \};$

14) $\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{(z^2-1)^2 (z-3)^2}, \ \ G = \{ z : 2 < |z| < 4 \};$

15) $\int\limits_{\partial G} \frac{z}{z+3} e^{\frac{1}{3z}} dz, \ G = \{ z : |z| > 4 \}.$

РОЗДІЛ 21 ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ І НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛИШКІВ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Обчислити інтеграл

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \sin\varphi}, \quad \text{де } a > 1.$$

Розв'язання. Складемо функцію

$$F(z) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{z^2 + 2aiz - 1}.$$

Розв'язавши рівняння $z^2 + 2aiz - 1 = 0$, одержимо

$z = -ai \pm \sqrt{-a^2+1} = -ai \pm \sqrt{a^2-1}i = \left(-a \pm \sqrt{a^2-1}\right)i.$

Точки $z_1 = -\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)i$ і $z_2 = \left(-a + \sqrt{a^2-1}\right)i$ – полюси 1-го порядку для функції $F(z)$. Оскільки $a > 1$, то маємо: $|z_1| = a + \sqrt{a^2-1} > 1$, $|z_2| = a - \sqrt{a^2-1} < 1.$ На основі формули (13) одержимо

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z_2} F(z) = 2\pi i \left.\frac{2}{z - z_1}\right|_{z=z_2} = \frac{4\pi i}{z_2 - z_1} = \frac{4\pi i}{2i\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Задача 2. Обчислити інтеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad \text{де } a, b > 0.$$

Розв'язання. Функція $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ у верхній півплощині має особливі точки $z_1 = ai,\ z_2 = bi$ – полюси 1-го порядку. За формулою (14) одержимо

$$I = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z_2} f(z)\right] = 2\pi i\left[\left.\frac{1}{(z+ai)(z^2+b^2)}\right|_{z=ai} + \left.\frac{1}{(z^2+a^2)(z+bi)}\right|_{z=bi}\right] =$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{2ai(b^2-a^2)} + \frac{1}{2bi(a^2-b^2)}\right] = \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

Задача 3. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx, \quad \text{де } a,b>0.$$

Розв'язання. Враховуючи парність підінтегральної функції, одержимо:

$$I = \frac{1}{2}I_1, \quad \text{де } I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx.$$

На основі формули (15) маємо:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2+b^2}dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{bi} \frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2} =$$

$$= 2\pi i\left.\left(\frac{ze^{iaz}}{z+bi}\right)\right|_{z=bi} = 2\pi i\frac{bie^{-ab}}{2bi} = \pi e^{-ab}i.$$

Оскільки $I_1 = \operatorname{Im} I_2$, то даний інтеграл $I = \frac{\pi}{2}e^{-ab}$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

102. Обчислити визначені інтеграли:

$$1)\ \int_0^{2\pi} \frac{2+\cos\varphi}{2-\sin\varphi}d\varphi; \quad 2)\ \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{5+4\cos x}dx; \quad 3)\ \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x},\ a>b>0;$$

$$4)\ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2},\ a>b>0; \quad 5)\ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos^2\varphi)^2},\ a>0,\ b>0;$$

$$6)\ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi+2}; \quad 7)\ \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x};$$

$$8)\ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2},\ \text{де } a\in\mathbb{C},\ a\neq\pm 1;$$

$$9)\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 3\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}d\varphi,\ \text{де } a\in\mathbb{C},\ a\neq\pm 1.$$

103. Обчислити невласні інтеграли:

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(a+bx^2\right)^2}$, де $a,b>0$; 2) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}$;

4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}$; 5) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$; 6) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$;

7) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^3}$; 8) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$; 9) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+1\right)^2}$;

10) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx,\ a,b>0$; 11) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$;

12) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\alpha x}}{1+x^2}dx$; 13) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2+a^2}dx$; 14) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2\cos x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$;

15) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{1+x^4}dx$; 16) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos 2xdx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$; 17) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^3\sin ax}{\left(1+x^2\right)^2}dx,\ a>0$.

Література.

1. Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. Сборник задач по теории функцій комплексной переменной.- М : Наука, 1970.
2. М.А. Ефграфов и др. Сборник задач по теории аналитических функцій. – М: Наука, 1969.
3. Л.В. Павлова, О.І. Редькіна. Теорія аналітичних функцій. Збірник вправ.- К: Вища школа, 1980.
4. О.Ю. Грищенко, М.І. Нагнибіда, П.П. Настасієв. Теорія функцій комплексної змінної. Розв’язування задач. – К: Вища школа. 1994.

Методичні вказівки
до практичних занять з курсу
«Комплексного аналізу»
для студентів математичного факультету

Автор: кандидат фіз.-мат наук , старший викладач Поляк І.Й.
Відповідальний за випуск: кандидат фіз.-мат наук, доцент Моца А.І.

Рекомендовано до друку засіданням кафедри математичного аналізу протокол № від «___» січня 2007 року.