МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

***Поляк І.Й., Погоріляк О.О.***

# ***ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ***

## ***ЧАСТИНА І***

## МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять
для студентів математичного факультету

Ужгород – 2012

*Поляк І.Й., Погоріляк О.О.* **Методичні вказівки до практичних занять з теорії функцій комплексної змінної для студентів математичного факультету. Частина I. –** Ужгород, 2012. – 32с.

У методичних вказівках проілюстровано основні методи розв'язування задач з комплексного аналізу по темах: «Комплексні числа та дії над ними», «Множини точок на комплексній площині», «Послідовності та ряди комплексних чисел», «Функції комплексної змінної: однозначні, многозначні, аналітичні, моногенні», «Конформні відображення, що здійснюються елементарними функціями», а також наведені завдання для аудиторної та домашньої роботи.

Наведено робочу програму дисципліни «Комплексний аналіз».

Методичні вказівки розроблені для студентів математичного факультету спеціальностей «Математика» та «Прикладна математика».

***Рекомендовано до друку засіданням кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу, протокол № 6 від «25» січня 2012 року.***

Рецензенти:

І. І. Король, доктор фіз.-мат. наук, професор (ДВНЗ «УжНУ»)

І. В. Шапочка, кандидат фіз.-мат. наук, доцент (ДВНЗ «УжНУ»)

## *ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ»*

### Змістовий модуль 1.

1. Комплексні числа. Дії над комплексними числами. Модуль і аргумент комплексного числа. Формула Муавра.
2. Стереографічна проекція. Сфера Рімана. Звязок між координатами.
3. Корінь n степеня з комплексного числа. Деякі множини точок на комплексній площині.
4. Границя послідовності комплексних чисел. Властивості.
5. Ряди з комплексних чисел, абсолютна і умовна збіжність.
6. Функції комплексної змінної, однолисті, многозначні функції, виділення однозначної вітки.
7. Границя функції комплексної змінної.
8. Неперервність функції комплексної змінної. Рівномірна неперервність.
9. Степенева функція і корінь. Поняття про ріманову поверхню.
10. Показникова функція властивості.
11. Тригонометричні функції властивості.
12. Логарифмічна функція, загальна степенева функція, обернено тригонометричні функції.
13. Похідна функції комплексної змінної, диференційованість функції.
14. Поняття моногенної, аналітичної функції. Умови Коші-Рімана.
15. Основні формули і правила диференціювання.
16. Геометричний зміст аргумента і модуля похідної, поняття про конформні відображення.
17. Симетричні точки відносно кола.
18. Лінійна функція . Властивості.
19. Дробово-лінійна функція. Властивості. Основні задачі дробово-лінійного відображення.
20. Функція Жуковського.
21. Відображення, що здійснюються показниковою функцією, тригонометричними тригонометричними функціями.
22. Інтеграл від функції комплексної змінної, властивості.
23. Теореми Коші про інтеграл від функції комплексної змінної.
24. Інтеграл типу Коші.
25. Інтегральна формула Коші. Наслідки. Теорема Ліувілля.Основна теорема алгебри.
26. Первісна функції комплексної змінної. Формула Ньютона-Лейбніца. Умови існування первісної. Теореми Морери і Гурса.

## Тема 1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Обчислити $z=(1-i)^{-10}(-\sqrt{3}+i)^{9}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\arg(1-i)=-\frac{\pi}{4};\ \arg\left(-\sqrt{3}+i\right)=\pi-\alpha=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{5};$$

$$|1-i|=\sqrt{2};\ \ \left|-\sqrt{3}+i\right|=2.$$

$$z=2^9(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})^9\cdot(\sqrt{2})^{-10}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]^{-10}=$$

$$=2^9(\cos\frac{45\pi}{6}+i\sin\frac{45\pi}{6})\cdot 2^{-5}(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2})=$$

$$=2^4(\cos\frac{20\pi}{2}+i\sin\frac{20\pi}{2})^9=16.$$

Задача 2. Довести тотожність:

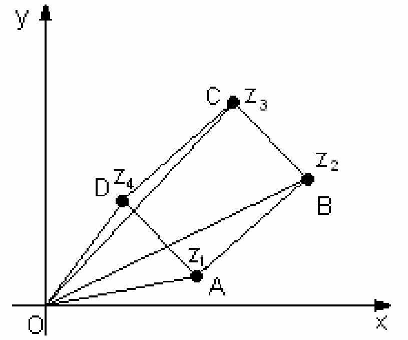
$$\left|1-\overline{z}_1\cdot z_2\right|^2-\left|z_1-z_2\right|^2=(1-\left|z_1\right|^2)\cdot(1-\left|z_2\right|^2).$$

Розв'язання. Числа $z_1\neq 0$ і $z_2\neq 0$ запишемо в тригонометричній формі (якщо $z_1=0$ і $z_2=0$, то рівність очевидна). Маємо:

$$\overline{z_1}\cdot z_2=r_1\cdot r_2\left[\cos(\varphi_2-\varphi_1)+i\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right];$$

$$\left|1-\overline{z}_1\cdot z_2\right|^2-\left|z_1-z_2\right|^2=\left[1-r_1\cdot r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\right]^2+\left[r_1\cdot r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right]^2-$$
$$-\left(r_1\cos\varphi_1-r_2\cos\varphi_2\right)^2-\left(r_1\sin\varphi_1-r_2\sin\varphi_2\right)^2=1-2r_1\cdot r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)+$$
$$+r_1^2\cdot r_2^2\cos^2(\varphi_2-\varphi_1)+r_1^2\cdot r_2^2\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)-r_1^2\cos^2\varphi_1+2r_1\cdot r_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2-$$
$$-r_2^2\cos^2\varphi_2-r_1^2\sin^2\varphi_1+2r_1\cdot r_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2-r_2^2\sin^2\varphi_2=$$
$$=1-2r_1\cdot r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)+r_1^2\cdot r_2^2-r_1^2-r_2^2+2r_1\cdot r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\left(1-r_1^2\right)\left(1-r_2^2\right)$$

Задача 3. Дано три вершини паралелограма $z_1, z_2, z_3$. Знайти четверту вершину $z_4$, протилежну вершині $z_2$.




Розв'язання. Різниці комплексних чисел $z_2$ і $z_1$ на площині відповідає різниця відповідних векторів $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OA}$. Оскільки $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, то $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$, або $z_2-z_1=z_3-z_4$, звідки $z_4=z_1-z_2-z_3$

## ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

1. Виконати дії:

$$\frac{1}{i};\ \frac{1+i}{1-i};\ \left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3;\ \left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right);\ \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3};\ \frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x};$$

$$3-i+\frac{2i}{1+i};\ 1+\frac{i}{1-i}.$$

2. Знайти модулі і аргументи комплексних чисел:

$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\ (-4+3i)^3;-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7};\ -1-i\sqrt{3};\frac{1-i}{1+i};$$

$$(1+i)^8\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6};1+i^{123};\ 1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7};\ \sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}.$$

3. Довести рівності:

$$\operatorname{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2};\ \operatorname{Im}z=\frac{z-\bar{z}}{2i};\ \overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2;\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

4. Довести тотожність і з'ясувати її геометричний зміст:

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right).$$

5. Довести нерівність:

$$\left|\frac{z}{|z|}-1\right|\le|\arg z|.$$

6. Довести:

1) якщо $z_1+z_2+z_3=0$ і $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, то точки $z_1$, $z_2$, $z_3$ є вершинами правильного трикутника, вписаного в одиничне коло;

2) якщо $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ і $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$, то точки $z_1,z_2,z_3,z_4$ є вершинами прямокутника, або попарно співпадають.

7. Довести, що три попарно різні точки $z_1,z_2,z_3$ лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли $(z_3-z_1):(z_2-z_1)$ дійсне число.

8. Точки $z_1$ і $z_2$ − суміжні вершини правильного n-кутника. Знайти вершину $z_3$, суміжну з $z_2$ $(z_3\ne z_1)$.

9. Виразити $\cos n\varphi$ і $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$. Знайти $\cos 5\varphi$ і $\sin 5\varphi$.

## Тема 2. <u>КОРІНЬ СТЕПЕНЯ $n$ З КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА</u>

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

<u>Задача 1.</u> Знайти $\sqrt{3+4i}$ .

<u>Розв'язання.</u> Позначимо $\sqrt{3+4i}=x+iy$. Тоді

$$3+4i=(x+iy)^2\Leftrightarrow 3+4i=x^2-y^2+2ixy\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=3\\2xy=4\end{cases}$$

Остання система рівнянь має два розв'язки: (-2,-1) і (2,1). Отже $\sqrt{3+4i}$ має два значення $\xi_0 = -2-i,\ \xi_1 = 2+i.$

Задача 2. Обчислити $\sqrt[3]{-1+i}$.

Розв'язання. Маємо $\left|-1+i\right| = \sqrt{2};\ \arg\left(-1+i\right) = \frac{3}{4}\pi$, отже $\sqrt[3]{-1+i}$ має три значення:

$$\xi_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}};$$

$$\xi_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi + 2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right);$$

$$\xi_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi + 4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

Задача 3. Обчислити $\sqrt[4]{-1}$ .

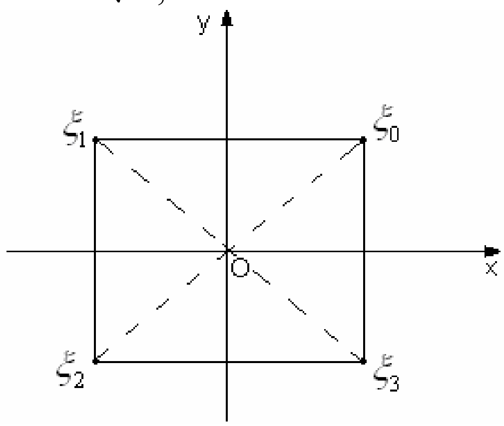
Розв'язання. Маємо $\left|-1\right| = 1;\ \arg\left(-1\right) = \pi$, отже $\xi_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Враховуючи геометричний зміст $\sqrt[n]{z}$ , без обчислень запишемо інші три корені:

$$\xi_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\xi_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\xi_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$




ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

10. Знайти всі значення наступних коренів і зобразити їх на площині:
$\sqrt[8]{1};\ \sqrt[3]{i};\ \sqrt[4]{-i};\ \sqrt{1-i};\ \sqrt[6]{-8};\ \sqrt{-4+3i};\ \sqrt[3]{-1+i\sqrt{3}};\ \sqrt[5]{2-3i}.$
11. Обчислити $\sqrt{5-12i}$ і $\sqrt{24+7i}$ не користуючись формулою для кореня квадратного.
12. Довести, що корені $n$-го степеня з комплексного числа $z \neq 0$ утворюють геометричну прогресію. Знайти її знаменник.
13. Розв'язати рівняння:
1) $z^7 + 1 = 0$; 2) $z^8 = 1+i$; 3) $\overline{z} = z^3$; 4) $|z| - z = 1+2i.$

## Тема 3. МНОЖИНИ ТОЧОК НА КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ

### РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Визначити сімейство ліній в z-площині, заданого рівнянням

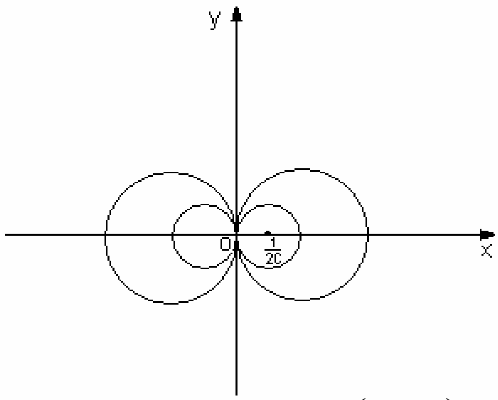
$$\operatorname{Re}\frac{1}{z}=c \qquad (-\infty<c<+\infty,\ z\neq 0).$$

Розв'язання. Маємо:

$\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=\operatorname{Re}\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, де $x^2+y^2\neq 0$.

Дане рівняння прийме вид $\dfrac{x}{x^2+y^2}=c$ або $c\left(x^2+y^2\right)=x$.

При $c=0$ одержимо уявну вісь $x=0$ без точки $z=0$. Якщо $c\neq 0$, то маємо:



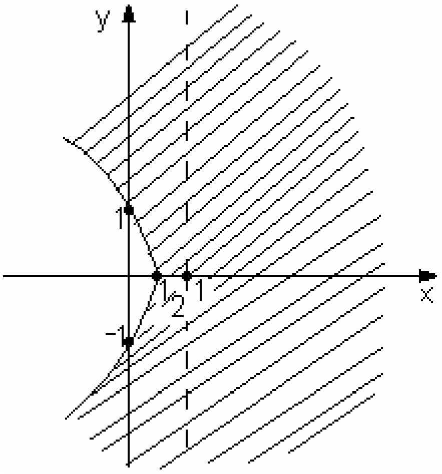

$$x^2+y^2=\frac{x}{c};$$

$$x^2-2\cdot\frac{1}{2c}x+\left(\frac{1}{2c}\right)^2-\left(\frac{1}{2c}\right)^2+y^2=c;$$

$$\left(x-\frac{1}{2c}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2c}\right)^2.$$

Останнє рівняння задає сімейство кіл з центром у точці $\left(\dfrac{1}{2c},0\right)$ і радіусом $\dfrac{1}{2|c|}$ без точки O.

Задача 2. Зобразити множину точок $E=\{z:\ |z|>1-\operatorname{Re}z\}$ на комплексній площині.




Розв'язання. При $x\geq 1$ нерівність $|z|>1-\operatorname{Re}z$, очевидно, має місце. При $x<1$ маємо:

$$\left(|z|>1-\operatorname{Re}z\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+y^2}>1-x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2>1-2x+x^2\right)\Leftrightarrow\left(y^2>1-2x\right).$$

Отже, множина $E$ – частина площини, яка лежить з тієї ж сторони параболи $y^2=1-2x$, що й точка $z=1$.

## ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

14. З'ясувати геометричний зміст вказаних співвідношень:

1) $|z - z_0| \le r$; 2) $|z-2|+|z+2|=5$; 3) $|z-2|-|z+2|>3$;

4) $\operatorname{Re} z \ge C$; 5) $\operatorname{Im} z < 0$; 6) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$;

7) $\alpha < \arg z < \beta$; 8) $\alpha < \arg(z - z_0) < \beta, \qquad (-\pi < \alpha < \beta < \pi)$;

9) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$; 10) $|z| < Arg\, z, \qquad 0 \le Arg\, z < 2\pi.$

15. Які лінії визначаються рівняннями:

1) $z^2 + \bar{z}^2 = 2a^2$; 2) $|z-2| = |1-2\bar{z}|$; 3) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$;

4) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = 1$; 5) $\operatorname{Re}\dfrac{z-a}{z+a} = 0$; 6) $\operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z+1} = 1.$

16. Визначити сімейства ліній в Z-площині, заданих рівняннями:

1) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} = c$; 2) $\operatorname{Re} z^2 = c$; 3) $\operatorname{Im} z^2 = c \quad (-\infty < c < \infty)$;

4) $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right| = \lambda \quad (\lambda > 0)$; 5) $\arg\dfrac{z-z_1}{z-z_2} = \alpha \quad (-\pi < \alpha < \pi).$

17. На Z – площині зобразити вказані множини точок:

1) $\{z : |z-1| \le |z+1|\}$; 2) $\{z : \operatorname{Re}[z(1-i)] < \sqrt{2}\}$; 3) $\{z : \operatorname{Re} z^2 < 1\}$;

4) $\left\{z : \operatorname{Re}\left(z - \dfrac{1}{z}\right) = 0\right\}$; 5) $\{z : \operatorname{Re} z^4 > \operatorname{Im} z^4\}$; 6) $\{z : 2|z| > |1+z^2|\}$.

7) $z = t + it^2, t \in [0;+\infty)$; 8) $z = \operatorname{Re}^{it},\ t \in [0;\pi]$; 9) $z = t + \dfrac{i}{t},\ t \in [1;+\infty)$.

## Тема 4. ОБЧИСЛЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ СУМ

### РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Вивести формули перетворення в добуток сум і різниць синусів і косинусів двох аргументів.

Розв'язання. Запишемо:

$$\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1 + \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2 = 2\left(\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} + i\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2};$$

$$\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1 - \cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2 = 2\left(-\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} + i\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}.$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини в останніх рівностях, одержимо шукані формули.

Задача 2. Знайти суми:

$$S = 1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx;$$

$$S^* = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx.$$

Розв'язання. Розглянемо вираз

$$S + iS^* = 1 + \left(\cos x + i\sin x\right) + \left(\cos 2x + i\sin 2x\right) + \ldots +$$

$$+\left(\cos nx + i\sin nx\right) = 1 + e(x) + e(2x) + \ldots + e(nx) =$$

$$1 + e(x) + e^2(x) + \ldots + e^n(x).$$

Користуючись формулою для суми членів геометричної прогресії, одержимо:

$$S + iS^* = \frac{e^{n+1}(x) - 1}{e(x) - 1} = \frac{e\left[(n+1)x\right] - e(0)}{e(x) - e(0)} = \frac{2ie\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\frac{n+1}{2}x}{2ie\left(\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= e\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = \left(\cos\frac{n}{2}x + i\sin\frac{n}{2}x\right)\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Виділивши дійсну та уявну частини останнього виразу, одержимо

$$S = \frac{\cos\frac{n}{2}x\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},\quad S^* = \frac{\sin\frac{n}{2}x\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

## ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

18. Знайти суми:

1) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x;$

2) $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x;$

3) $\sin x - \sin 2x + \ldots + (-1)^{n-1}\sin nx;$

4) $\cos x - \cos 2x + \ldots + (-1)^{n-1}\cos nx;$

5) $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \ldots + \cos(\alpha + n\beta);$

6) $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \ldots + \sin(\alpha + n\beta).$

19. Нехай $z_k$ $\left(k = \overline{0, n-1}\right)$ - корені рівняння $z^n = 1$. Довести, що $z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1} = 0$.

20. Знайти добуток усіх коренів рівняння $z^8 = 1 - i$.

Тема 5. <u>ПОСЛІДОВНОСТІ І РЯДИ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ</u>

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

<u>Задача 1.</u> З'ясувати, при яких значеннях комплексного параметра $a$ збігається послідовність $z_n = \dfrac{a^n}{1+a^n}$.

<u>Розв'язання.</u> Розглянемо всі можливі випадки.

1) Якщо $|a|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$. Тому існує $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a^n}{1+\lim\limits_{n\to\infty} a^n} = 0$.

2) Нехай $|a|>1$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}\right)^n = 0$. Отже, існує $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^n+1} = 1$.

3) При $a=1$ одержимо збіжну послідовність $z_n = \dfrac{1}{2}$.

4) Нехай $|\mathrm{a}|=1$, $a\neq 1$. Очевидно, можна вважати, що $\mathrm{a}^{\mathrm{n}}+1\neq 0 \Leftrightarrow a\neq \sqrt[n]{-1}$.

Тоді $a=e(\varphi)=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $z_n = \dfrac{1}{a^{-n}+1} = \dfrac{1}{e(-n\varphi)+1}$.

При $\varphi\neq 2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ послідовність $e(-n\varphi)=\cos n\varphi - i\sin n\varphi$ розбіжна (тому, що не існують границі $\cos n\varphi$ і $\sin n\varphi$ при $\mathrm{n}\to\infty$).

Через те, в цьому випадку розбіжною буде і послідовність $\{z_n\}$.

Отже, $\{z_n\}$ збіжна при $a=1$, $|a|<1$ і $|a|>1$.

<u>Задача 2.</u> Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{\sqrt{n}}$.

<u>Розв'язання.</u> Виділимо дійсну та уявну частини ряду. Маємо :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{\sqrt{n}} = \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots}_{(1)}+i\underbrace{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\ldots\right)}_{(2)}$$

За теоремою Лейбніца ряди (1) і (2) збіжні, отже, буде збіжний і даний ряд.

Оскільки $\left|\dfrac{i^n}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ розбіжний, то даний ряд не буде абсолютно збіжним.

Отже, ряд збіжний умовно.

## ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

21. Користуючись означенням границі, довести, що

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5i}{n^2+i}=2;\ 2)\lim_{n\to\infty}\frac{(2i)^n-1}{(2i)^n}=1;\ 3)\lim_{n\to\infty}\frac{1-3in}{5n+1}=-\frac{3i}{5}.$$

22. Обчислити границі послідовностей $\{z_n\}$:

$$1)\ z_n=\frac{n+1}{2n}+i\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n};\ 2)\ z_n=\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)+i\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)};$$

$$3)\ z_n=\left(\frac{n+a}{n-a}\right)^n+in\left(\sqrt[n]{a}-1\right);\quad 4)\ x_n=1+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{3};$$

$$5)\ z_n=\left(\sin\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)^n+i\left(\cos\frac{1}{n}\right)^n;\quad 6)\ z_n=n\sin\frac{1}{n}+i\frac{a^n}{n!};$$

$$6) z_n=n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)+i\frac{n-1}{3n}.$$

23. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)$.

24. Виявити, при яких значеннях параметра $a\in C$ збігаються послідовності:

$$1)\ \{a^n\};\ 2)\ \left\{\frac{a^n}{n}\right\};\ 3)\ \{na^n\};\ 4)\ 1+a+\ldots+a^n;\ 5)\frac{z}{1^2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{n^2}.$$

25. Обчислити суми рядів:

$$1)\ \sum_{k=1}^{\infty}q^k\sin k\alpha,\ q\in\mathbf{C},\ |q|<1;\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

26. Дослідити на збіжність ряди:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}+i\frac{2^n}{n!}\right);\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{n^n}+i\frac{2^n}{3^n n}\right);\ 3)\ \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln n}+\frac{i}{n^2+1}\right);$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}+i\sqrt{\frac{n+1}{n}};\ 5)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}+\frac{i}{n!}\right);\ 6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n!}+i\frac{2n-1}{3^n}\right).$$

27. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряди:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(in)^n};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^3};\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{in}{3n+i}\right)^n;\ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3+i^n\right)^n}{n}.$$

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2i)^{n^2}};\ 6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(e-i)^n}{n^n};\ 7)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n2^n};\ 8)\ \sum\frac{(n!)^n}{(in)^{n^2}}.$$

## Тема 6. ФУНКЦІЇ КОМЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

### РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайти образ кола $C=\{|z-1|=1\}$ при відображенні $W=\frac{1}{z}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $|z-1|=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=2x$, одержимо:

$$W=\frac{1}{z} \Leftrightarrow W=\frac{1}{x+iy} \Leftrightarrow W=\frac{x-iy}{x^2+y^2} \Leftrightarrow u+iv=\frac{x-iy}{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{1}{2}, \\ v=-\frac{1}{2}\frac{y}{x}. \end{cases}$$

Покладемо: $\frac{y}{x}=tg\varphi$. При $x+iy \in C$ $(x \neq 0)$ маємо:

$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2},\ -\infty<tg\varphi<\infty,$ тому $v=\operatorname{Im} z$ пробігає множину $(-\infty,\infty)$. Отже, при відображенні $W=\frac{1}{z}$ образом даного кола $C$ є пряма $\operatorname{Re} W=\frac{1}{2}$ (разом з точкою $W=\infty$).

Задача 2. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}$.

Розв'язання. Позначимо $U_n(z)=\frac{z^n}{1-z^n}$ і розглянемо всі можливі випадки.

1) При $|z|>1$ маємо: $z^n \to \infty,\ U_n(z) \to -1\ (n \to \infty)$. Ряд розбіжний тому, що загальний член ряду не прямує до нуля.

2) Якщо $|z|<1$, то $z^n \to 0,\ \frac{1}{|1-z^n|} \to 1\ (n \to \infty)$. Тому, починаючи з деякого $n_0$, маємо : $\frac{1}{|1-z^n|} \le 2$, звідки одержимо

$$|U_n(z)| \le 2|z|^n. \qquad (*)$$

Внаслідок нерівності (*) і збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2|z|^n$ одержимо збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(z)$.

3) Нехай тепер $|z|=1$. Очевидно, можна вважати, що $z^n \neq 1$, зокрема $z \neq 1$.

Тоді $U_n(z)=\frac{1}{z^{-n}-1}=\frac{1}{e(-n\varphi)-1}$, де z=e$(\varphi)$.

Оскільки при $\varphi \neq 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ послідовність $e(-n\varphi)$ розбіжна, то не існує $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(z)$.

Отже, при $|z| = 1$ даний ряд розбіжний.

<u>Відповідь:</u> область збіжності даного ряду – круг $|z| < 1$.

<u>Задача 3.</u> Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-z\ln n}$ рівномірно збіжний у будь-якій півплощині $\operatorname{Re} z \geq 1+\delta$, де $\delta > 0$.

<u>Розв'язання.</u> Використовуючи формулу Ейлера $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, одержимо:

$$\left|e^{-z\ln n}\right| = \left|e^{-x\ln n}\right|\left|e^{-iy\ln n}\right| = e^{-x\ln n}\left|\cos(y\ln n) + i\sin(y\ln n)\right| = e^{-x\ln n} = n^{-x} =$$

$$= \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

Відомо, що при $\delta > 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ збіжний. Через те, за ознакою Вейерштраса даний ряд рівномірно збігається в півплощині $\operatorname{Re} z \geq 1+\delta$.

## ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

28. Знайти образи множин $E$ при вказаних відображеннях.

1) $W = z^2, E:\ x = c;\ y = c;\ x = y;\ |z| = r;\ \arg z = \alpha;$

2) $W = \frac{1}{z}, E:\ x = c;\ y = c;\ |z| = r;\ \arg z = \alpha;$

3) $W = z - \frac{1}{z}, E:\ |z| = r;$ 4) $W = \frac{z-1}{z+1}, E:\ \operatorname{Im} z = 1;$

5) $W = \frac{z}{z+1}, E:\ |z| = 2;$ 6) $W = 2\frac{2z-1}{z-2}, E: |z| \geq 1.$

29. Виділити дійсну і уявну частини функцій:

1) $z^3 + 1;$ 2) $\frac{\overline{z}}{z+1};$ 3) $z^n;$ 4) $z - \frac{1}{z};$ 5) $\frac{z-1}{z+2}.$

30. Довести обмеженість функцій на множинах $\overline{E}$ :

1) $\frac{1}{z^2+1},\ \overline{E} = \{z : |z| \geq 2\};$ 2) $\frac{z^2}{z^2-4},\ \overline{\mathrm{E}} = \{z : |z| \leq 1\}.$

31. Довести неперервність функції у точках $z_0$:

1) $\frac{z-1}{z+1},\ z_0 = i;$ 2) $\frac{|z|}{z},\ z_0 = i;$ 3) $\frac{\operatorname{Im} z^2}{z^2},\ \mathrm{z}_0 = 1 - i.$

32. Знайти границі(якщо вони існують):

1) $\lim\limits_{z\to i} \frac{z^2}{z-i};$ 2) $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{z-2i}{z+i};$ 3) $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{z^2+1}{z-2i};$

4) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+1}{z^4-1}$; 5) $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+2i\right)$; 6) $\lim\limits_{z\to 1-i}\overline{z}$;

7) $\lim\limits_{z\to -1}\arg z$; 8) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\overline{z}}$; 9) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{x^2}{y}$.

## Тема 7. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Розв'язати рівняння $\sin z+\cos z=2$.

Розв'язання. Використовуючи формули $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ і $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, одержимо рівняння: $\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}+\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2.$

Покладемо $e^{iz}=t.$ Рівняння прийме вид: $t-\dfrac{1}{t}+i\left(t+\dfrac{1}{t}\right)=4i$ або $(1+i)t^2-4it-1+i=0.$

Розв'язавши квадратне рівняння, одержимо

$$t=\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1+i).$$

Оскільки $1\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}>0$, то $\arg t=\dfrac{\pi}{4}.$ З рівності $e^{iz}=t$ одержимо $iz=\mathrm{Ln}\,t$, або $iz=\ln|t|+i(\arg t+2\pi k)$,

$$iz=\ln\left(\sqrt{2}\pm 1\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right).$$

Звідки $z=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k-i\ln\left(\sqrt{2}\pm 1\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

Задача 2. Знайти всі значення $w=(1-i)^{1+i}$.

Розв'язання. Маємо $w=(1-i)(1-i)^i$. За означенням $(1-i)^i=e^{i\,\mathrm{Ln}(1-i)}$.

Далі одержимо: $i\mathrm{Ln}(1-i)=i\left[\ln\sqrt{2}+i\left(-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right]=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k+i\ln\sqrt{2}.$

Отже, $w=(1-i)e^{\frac{\pi}{4}+2\pi k}\cdot e^{i\ln\sqrt{2}}$, де $\mathrm{k}\in\mathbb{Z}.$

Задача 3. Виділити дійсну та уявну частини функції $\mathrm{ctg}z$.

Розв'язання. Елементарними перетвореннями одержимо:

$$\mathrm{ctg}z=\frac{\cos z}{\sin z}=i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}=i\frac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}=i\frac{\left(e^{-y}e^{ix}+e^{y}e^{-ix}\right)\left(e^{-y}e^{-ix}-e^{y}e^{ix}\right)}{\left(e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{-ix}\right)\left(e^{-y}e^{-ix}-e^{y}e^{ix}\right)}=$$

$$=i\frac{e^{-2y}-e^{2y}+e^{-2ix}-e^{2ix}}{e^{-2y}+e^{2y}-e^{-2ix}-e^{2ix}}=\frac{2\sin 2x-2i\mathrm{sh}2y}{2\mathrm{ch}2y-2\cos 2x}.$$

Звідси маємо $\mathrm{Re}\,\mathrm{ctg}z=\frac{\sin 2x}{\mathrm{ch}2y-\cos 2x}$, $\mathrm{Im}\,\mathrm{ctg}z=\frac{-\mathrm{sh}2y}{\mathrm{ch}2y-\cos 2x}$.

## ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

33. Знайти всі значення виразів:

1) $1^{\sqrt{2}}$; 2) $(-2)^{\sqrt{2}}$; 3) $2^{i}$; 4) $1^{-i}$; 5) $i^{i}$; 6) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$;

7) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{1-i}$; 8) $(3-4i)^{1+i}$; 9) $(3+4i)^{1+i}$; 10) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{-i}$.

34. Довести формули:

1) $\cos^2 z+\sin^2 z=1$; 2) $\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=1$; 3) $\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\cos z$;

4) $\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin z$; 5) $\mathrm{sh}(z+\pi i)=-\mathrm{sh}z$; 6) $\mathrm{th}(z+\pi i)=\mathrm{th}z$;

7) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cdot\cos z_2-\sin z_1\cdot\sin z_2$;

8) $\sin z_1+\sin z_2=2\sin\frac{z_1+z_2}{2}\sin\frac{z_1-z_2}{2}$.

35. Розв’язати рівняння:

1) $\sin z=\frac{4i}{3}$; 2) $\cos z=\frac{3i}{4}$; 3) $\mathrm{tg}z=\frac{5i}{3}$; 4) $\mathrm{ch}z=\frac{1}{2}$;

5) $\sin z-\cos z=3$; 6) $\sin z-\cos z=i$; 7) $2\mathrm{ch}z+\mathrm{sh}z=i$.

36. Довести формули:

1) $\arccos z=-i\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$; 2) $\mathrm{arcctg}\, z=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i}$;

3) $\mathrm{arcch}\, z=\mathrm{Ln}\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)$; 4) $\mathrm{arcth}\, z=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}$.

37. Довести, що

1) $\mathrm{Im}\, tg\, z=\frac{sh\,2y}{\cos 2x+ch\,2y}$; 2) $|\sin z|=\sqrt{ch^2 y+\cos^2 x}$;

3) $|sh\, z|=\sqrt{ch^2 x-\cos y}$; 4) $|cth\, z|=\sqrt{\frac{ch\,2x+\cos 2y}{ch\,2x-\cos 2y}}$.

Тема 8. <u>МОНОГЕННІСТЬ УМОВИ КОШІ-РІМАНА</u>

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

<u>Задача 1.</u> Перевірити виконання умов Коші-Рімана для функції $W = \operatorname{Ln} z$ і довести, що $(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}$.

<u>Розв'язання.</u> Нехай $x > 0,\ y \geq 0$ (інші випадки розглядаються аналогічно).

Тоді $\operatorname{Ln} z = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + i\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}.$

Отже, $u = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right),\ v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2\pi k.$

Маємо: $\frac{du}{dx} = \frac{x}{x^2 + y^2};\ \frac{du}{dy} = \frac{y}{x^2 + y^2};\ \frac{dv}{dx} = -\frac{y}{x^2 + y^2};\ \frac{dv}{dy} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$

Умови (C.R.) виконуються. Крім того, функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ мають повний диференціал (в області визначення). Отже, існує похідна

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{(x - iy)(x + iy)} = \frac{1}{z}.$$

<u>Задача 2.</u> Знайти аналітичну функцію за її дійсною частиною

$$u(x,y) = x + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad (x > 0).$$

<u>Розв'язання.</u> Шукана функція $f(z) = u + iv$ повинна задовольняти умови (C.R.):

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \tag{1}$$

$$\frac{dv}{dy} = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}, \tag{2}$$

звідки й визначимо невідому функцію $v(x,y)$.

З рівняння (1) маємо:

$$v(x,y) = -\int\frac{x}{x^2 + y^2}dx + c(y),$$

$$v(x,y) = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) + c(y). \tag{3}$$

З рівності (3) одержимо: $\frac{dv}{dy} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + c'(y)$

або, використовуючи рівняння (2),

$$1 - \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + c'(y),$$

$$c'(y) = 1 \Rightarrow c(y) = y + c_0, \text{ де } c_0 = const.$$

Таким чином, $v(x,y)=y-\ln\sqrt{x^2+y^2}+c_0$. Враховуючи, що $x>0$, функцію $f(z)$ подамо у вигляді

$$f(z)=z+\arg z-i\ln|z|+ic_0.$$

## ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

38. Перевірити виконання умов Коші-Рімана для функцій $z^n$, $e^z$, $\cos z$ і довести, що $\left(z^n\right)'=nz^{n-1}$, $\left(e^z\right)'=e^z$, $(\cos z)'=-\sin z$.

39. Знайти сталі $a,\ b, c$ при яких функція $f(z)$ буде аналітичною:

$$1)\, f(z)=x+ay+i(bx+cy);\ 2)\, f(z)=\left(x^2+ax-by^2\right)+i(2xy+cy);$$

$$3)\, f(z)=\cos x(\operatorname{ch} y+a\operatorname{sh} y)+i\sin x(\operatorname{ch} y+b\operatorname{sh} y).$$

40. Знайти множини точок, в яких моногенні функції:

$$1)\ \frac{z}{|z|};\ 2)\ \left(\bar{z}\right)^2;\ 3)\ |z|^2;\ 4)\ x^2+iy^2;\ 5)\ z\operatorname{Re} z.$$

41. Знайти похідні функцій:

$$1)\ \operatorname{tg} z;\ 2)\ \frac{e^z+1}{e^z-1};\ 3)\ \left(e^z+e^{-z}\right)^{-2};\ 4)\ \frac{\cos z}{\cos z-\sin z}.$$

42. Довести, що в полярних координатах $r,\varphi$ умови Коші-Рімана для функції $f(z)=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)$ мають вигляд:

$$\frac{du}{dr}=\frac{1}{r}\frac{dv}{d\varphi};\ \frac{dv}{dr}=-\frac{1}{r}\frac{du}{d\varphi}.$$

43. Побудувати аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ за її дійсною або уявною частиною:

$$1)\ u=x^2-y^2+5x+y-\frac{y}{x^2+y^2};\ 2)\ u=x^2-y^2+x;$$

$$3)\ u=\ln\left(x^2+y^2\right);\ 4)\ v=3+x^2-y^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x^2+y^2};$$

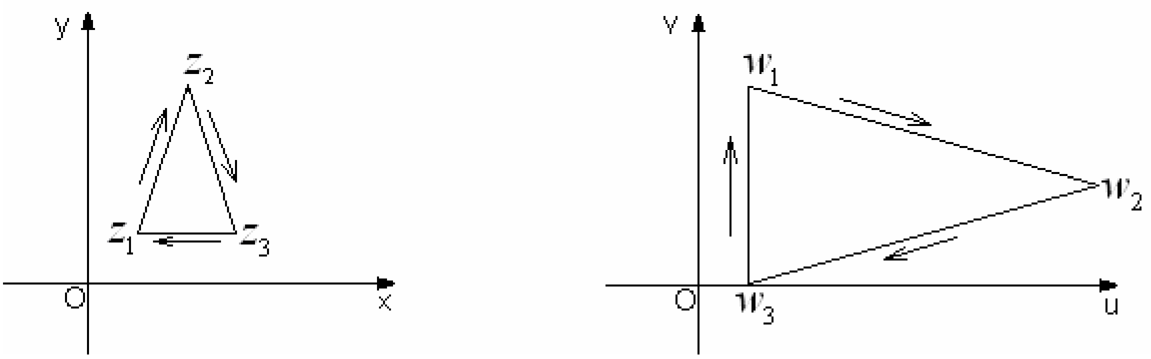
$$5)\ v=x^3-3xy^2;\ 6)\ v=\ln\left(x^2+y^2\right)+x-2y.$$

## Тема 9. <u>КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ. ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ</u>

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

<u>Задача 1.</u> Знайти лінійне відображення, яке відображає трикутник з вершинами в точках $1+i,\ 2+4i,\ 3+i$ на трикутник з вершинами в точках $1,\ 1+4i,\ 7+2i$.

<u>Розв'язання.</u> Побудуємо задані трикутники.




Позначимо: $z_1 = 1+i,\ z_2 = 2+4i,\ z_3 = 3+i;$

$W_1 = 1+4i,\ W_2 = 7+2i,\ W_3 = 1.$

Лінійну функцію $f(z) = az + b$ визначимо так, щоб виконувались рівності $f(z_k) = w_k$, $(k = 1,2,3)$.

Одержимо:

$$\begin{cases} a(1+i)+b = 1+4i, \\ a(2+4i)+b = 7+2i, \\ a(3+i)+b = 1. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь системи знаходимо: $a = -2i,\ b = -1+6i.$

Знайдені значення $a,\ b$ задовольняють і третє рівняння:

$$-2i(3+i) - 1 + 6i = 1.$$

Шукане відображення: $W = -2iz - 1 + 6i.$

Задача 2. Знайти образ півплощини $x + y < 1$ при відображенні $W = \dfrac{1}{z}$.

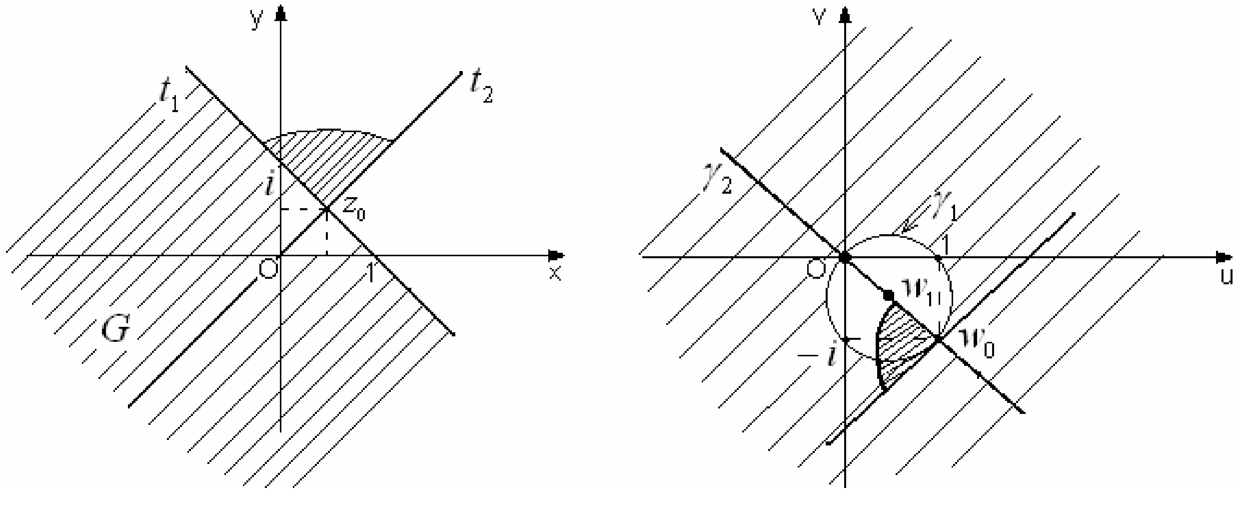
Розв'язання. Введемо позначення: $G$ - півплощина $x + y < 1$;

$t_1$ - пряма $x + y = 1$ (границя півплощини);

$t_2$ - пряма $y = x$ (перпендикулярна до $t_1$);

$\gamma_1$ - образ $t_1$, $\gamma_2$ - образ $t_2$ при відображенні $W = \dfrac{1}{z}$;

$z_0 = \dfrac{1}{2}(1+i)$ - точка перетину прямих $t_1$ і $t_2$.



Коло $\gamma_1$ проходить через точки $W=0$ і $W_0=\dfrac{1}{z_0}=1-i.$

Внаслідок конформності відображення пряма $\gamma_2$ і коло $\gamma_1$ повинні бути ортогональними. Тому пряма $\gamma_2$ пройде через центр $w_1$ кола $\gamma_1$.

Отже, $W_1=\dfrac{1}{2}W_0=\dfrac{1}{2}(1-i)$. Радіус кола $\gamma_1$ рівний $|W_1|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

При відображенні внутрішня точка $z=0$ області $G$ перейде в точку $w=\infty$. Тому область $G$ перейде в зовнішність кола

$$\gamma_1=\left\{W:|W-W_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

## ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

44. Знайти лінійне відображення, яке відображає трикутник з вершинами в точках $0,\ 1,\ i$ на трикутник з вершинами $0,\ 2,\ 1+i$.

45. Знайти лінійне відображення з нерухомою точкою $1+2i$, яке точку $i$ переводить в точку $-i$.

46. Знайти лінійне відображення, яке круг $|z+1-i|<3$ відображає на круг $|W-2|<1$, причому вертикальний діаметр переходить в горизонтальний.

47. Знайти образ півплощини $\{\operatorname{Re} z>0\}$ і $\{\operatorname{Im} z>0\}$ при відображенні $W=(1-i)z+i$.

48. Знайти образ круга $|z+i|<1$ при відображенні $W=2iz+4$.

49. Для функції $W=\dfrac{1}{z}$ знайти образи вказаних ліній:

   1) сімейство кіл $x^2+y^2=ax$;
   2) сімейство кіл $x^2+y^2=by$;
   3) пучка прямих $y=x+b$;
   4) пучка прямих $y=kx$;
   5) прямої $x-y=1$.

50. При відображенні $W=\dfrac{1}{z}$ знайти образ кола $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

51. З'ясувати, в що перетвориться при відображенні $W=\dfrac{z-1}{z}$ смуга $0<\operatorname{Re} z<1$.

52. Знайти образ круга $\{z:|z-1|<2\}$ при відображеннях:

   1) $W=1-2iz$;
   2) $W=i+3z$;
   3) $W=iz+i+1$;
   4) $W=(1+i)z+1$.

Тема 10. ДРОБОВО-ЛІНІЙНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайти образ області $D=\{z:\operatorname{Re}z>0,\operatorname{Im}z>0\}$ при відображенні

$$W=\frac{z-i}{z+i}.$$

Розв'язання. Дане відображення представимо у вигляді $W=1-\dfrac{2i}{z+i}$, потім, як суперпозицію чотирьох відображень:

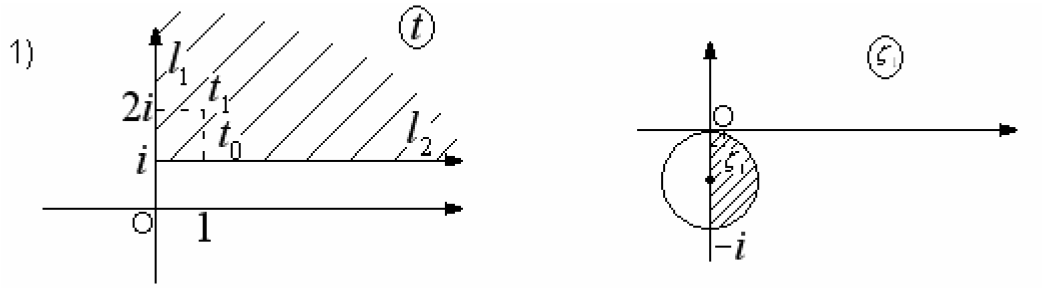
$$t=z+i;\ \zeta=\frac{1}{t};\ \xi=-2iz,\ W=1+\xi$$

і розглянемо кожне з них послідовно.

1) Перше відображення – паралельне перенесення на $i$ по уявній осі. Образ області $D$ позначимо через $D_1$.

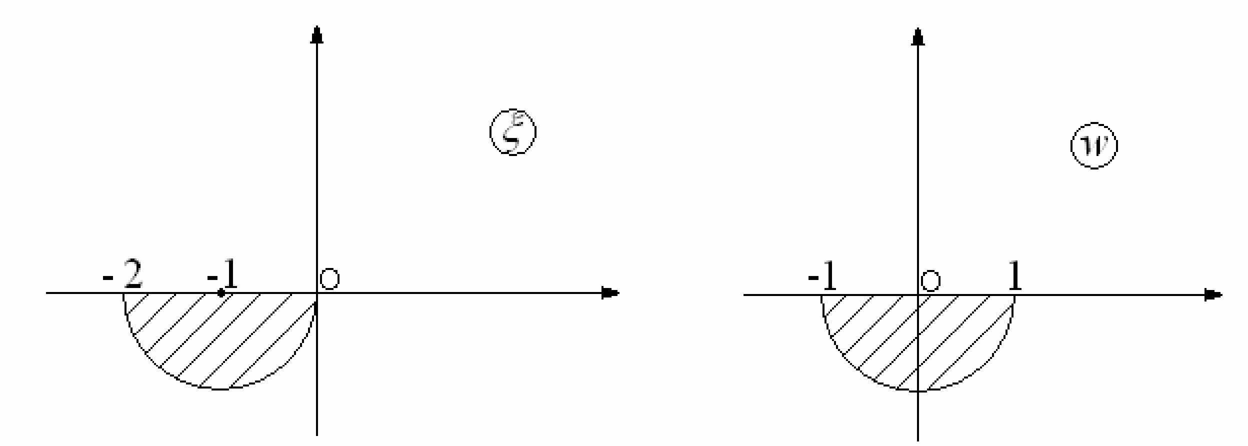
2) При відображенні $\zeta=\dfrac{1}{t}$ промінь $l_1=\{\operatorname{Re}t=0,\ \operatorname{Im}t\ge 1\}$ перейде у відрізок $\gamma_1=\{\operatorname{Re}\zeta=0,-1\le\operatorname{Im}\zeta\le 0\}$; промінь $l_2=\{\operatorname{Re}t\ge 0,\ \operatorname{Im}t=1\}$ перетвориться в півколо $\gamma_2=\left\{\left|\zeta+\dfrac{i}{2}\right|=\dfrac{1}{2},\operatorname{Re}\zeta\ge 0\right\}$ (оскільки $i\to -i,\ t_0=1+i\to\dfrac{1}{2}(1-i)$).

Візьмемо точку $t_1\in D_1$, наприклад , $t_1=1+2i$. Її образ $\zeta_1=\dfrac{1}{t_1}=\dfrac{1-2i}{5}$ належить півкругу $D_2=\left\{\left|\zeta+\dfrac{i}{2}\right|<\dfrac{1}{2},\operatorname{Re}\zeta>0\right\}$. Тому при відображенні $\zeta=\dfrac{1}{t}$ область $D_1$ перетвориться в $D_2$.




3) Відображення $\xi=-2iz$ здійснює розтяг з коефіцієнтом 2 і поворот на кут $\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$.

4) Відображення $w=1+\xi$ півкруг з площини $\xi$ переводить в півкруг $G=\{W:|W|<1,\operatorname{Im}W<0\}$, що й буде образом квадранта при даному відображенні.




Задача 2. Знайти дробово-лінійне відображення, яке точки $-1, \infty, i$ переводить відповідно в точки $\infty,\ i,\ 1$.

Розв'язання. Підставивши значення $z_1 = -1,\ z_2 = \infty,\ z_3 = i,\quad W_1 = \infty,\ W_2 = i,$ $W_3 = 1$ в формулу складного ангармонійного відображення, одержимо:

$$\frac{W-\infty}{W-i}\cdot\frac{1-i}{1-\infty} = \frac{z+1}{z-\infty}\cdot\frac{i-\infty}{i+1} \text{ або } \frac{1-i}{W-i} = \frac{z+1}{1+i}\text{, звідки знаходимо}$$

$$W = \frac{iz+i+2}{z+1}.$$

Задача 3. Відобразити круг $|z|<1$ на круг $|W|<1$ так, щоб

$$1)\ W\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,\ 2)\ \arg W'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Розв'язання. Користуючись формулою відображення одиничного круга в одиничний круг, одержимо, що

$$e^{i\varphi}\cdot\frac{-\frac{1}{2}-z_0}{1+\frac{1}{2}\overline{z_0}} = 0\text{, звідки } z_0 = -\frac{1}{2}.$$

Далі маємо: $W' = e^{i\varphi}\dfrac{1-\overline{z_0}z_0}{\left(1-\overline{z_0}z\right)^2}$ , $W'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{3}e^{i\varphi}.$

Враховуючи умову 2) задачі, одержимо $\varphi = \dfrac{\pi}{4}.$

Шукане відображення $W = e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\dfrac{z+\frac{1}{2}}{1+\frac{z}{2}}$ або, що те ж саме – $W = e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\dfrac{2z+1}{z+2}.$

## ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

53. Виявнити, в що перетворюються області $D$ при заданих відображеннях

1) $D=\{z:|z|<1,\ \mathrm{Im}\,z>0\},\ W=\dfrac{2z-i}{2+iz}$;

2) $D=\left\{z:0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}\right\},\ W=\dfrac{z}{z-1}$;

3) $D=\{z:z\in\overline{\mathbf{C}}\setminus[-2,1]\},\ W=\dfrac{z+2}{1-z}$;

4) $D=\{z:\mathrm{Re}\,z<1\},\quad W=\dfrac{z}{1-z+i}$.

54. Знайти образ півплощини $\{z:\mathrm{Re}\,z>1\}$ при відображеннях:

1) $W=\dfrac{4z}{z+1}$; 2) $W=\dfrac{z+1}{z-3}$; 3) $W=\dfrac{z}{z-1}$.

55. Знайти точки, симетричні з точкою $2+i$ відносно кіл:

1) $|z|=1$, 2) $|z-i|=3$.

56. Знайти дробово-лінійні функції, які переводять точки $-1,\ i,\ 1+i$ відповідно в точки 1) $0,\ 2i,\ 1-i$; 2) $\mathrm{i},\ \infty,1$.

57. Знайти дробово-лінійні функції, які переводять точки $-1,\ \infty, i$ відповідно в точки: 1) $i,\ 1,\ 1+i$; 2) $0,\infty,1$.

58. Знайти відображення верхньої півплощини на себе при умовах:

1) $W(0)=1,\ W(1)=2,\ W(2)=\infty$; 2) $W(0)=1,\ W(i)=2i$.

59. Відобразити верхню півплощину $\mathrm{Im}\,z>0$ на одиничний круг $|W|<1$, щоб виконувались умови:

1) $W(i)=0,\ \arg W'(i)=-\dfrac{\pi}{2}$; 2) $W(2i)=0,\ \arg W'(2i)=0$.

60. Відобразити круг $|z|<2$ на півплощину $\mathrm{Re}W>0$ так, щоб

1) $W(0)=1,\ \arg W'(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

61. Відобразити круг $|z|<1$ на круг $|W|<1$ так, щоб:

1) $W\left(\dfrac{1}{2}\right)=0,\ \arg W'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$; 2) $W\left(\dfrac{i}{2}\right)=0,\ \arg W'\left(\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

62. За допомогою дробово-лінійного відображення відобразити область $\{z:|z>1|\}$ на круг $\{W:|W-i|<1\}$.

63. Знайти образ круга $\{z:|z-1|<2\}$ при відображеннях:

1) $W=\dfrac{2iz}{z+3}$; 2) $W=\dfrac{z+1}{z-2}$; 3) $W=\dfrac{z-1}{2z-6}$; 4) $W=\dfrac{z}{z+1}$; 5) $W=\dfrac{z+1}{z-3}$.

## Тема 11. КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ, ЩО ЗДІЙСНЮЮТЬСЯ ЕЛЕМЕНТАРНИМИ ФУНКЦІЯМИ. ФУНКЦІЯ ЖУКОВСЬКОГО

### РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайти образ області $D=\left\{z:-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{Re}z<\dfrac{\pi}{2},\operatorname{Im}z>0\right\}$ при відображенні $W=\cos z$.

Розв'язання. Виведемо формули перетворення. Маємо:

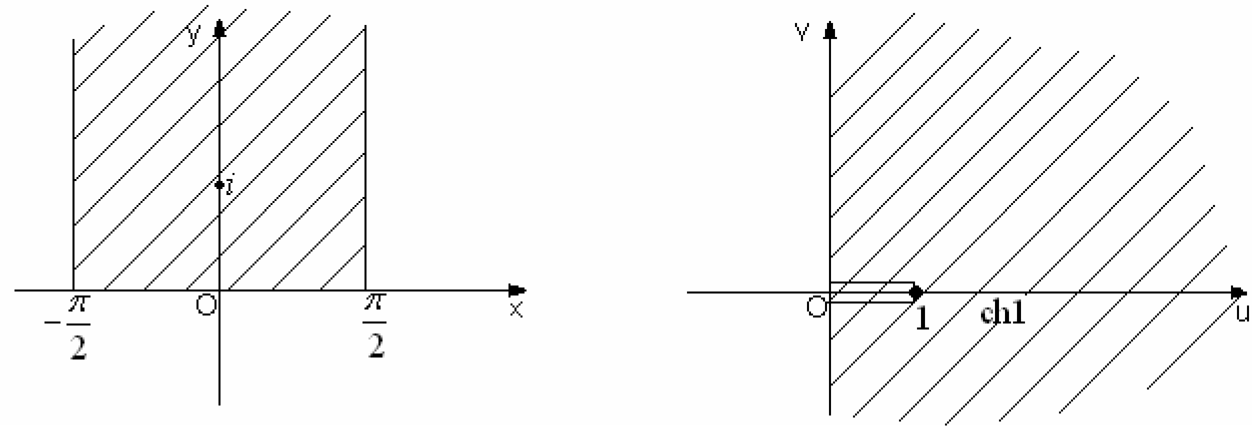
$$u+iv=\cos(x=iy)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy=$$

$$=\cos x\cdot\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}-\sin x\cdot\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}=\cos x\operatorname{ch}y-i\sin x\operatorname{sh}y.$$

Звідси одержимо: $u=\cos x\operatorname{ch}y,\ v=-\sin x\operatorname{sh}y.$

Знайдемо образ границі області $D$. Відрізок $\left\{-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ y=0\right\}$ переходить у відрізок $\{0\le u\le 1,\ v=0\}$. Півпрямі $\left\{x=-\dfrac{\pi}{2},\ y\ge 0\right\}$ і $\left\{x=\dfrac{\pi}{2},\ y\ge 0\right\}$ відображаються відповідно в півпрямі $\{u=0,\ v>0\}$ і $\{u=0,\ v<0\}$. Точка $i$ переводиться в точку $W=\cos 0\operatorname{ch}1-i\sin 0\operatorname{sh}1=\operatorname{ch}1>1.$

Нехай $G$ – образ області $D$ при відображенні $W=\cos z$. За принципом збереження області при конформному відображенні $G$ – теж область. За принципом відповідності границь $\partial D$ переводиться в $\partial G$.

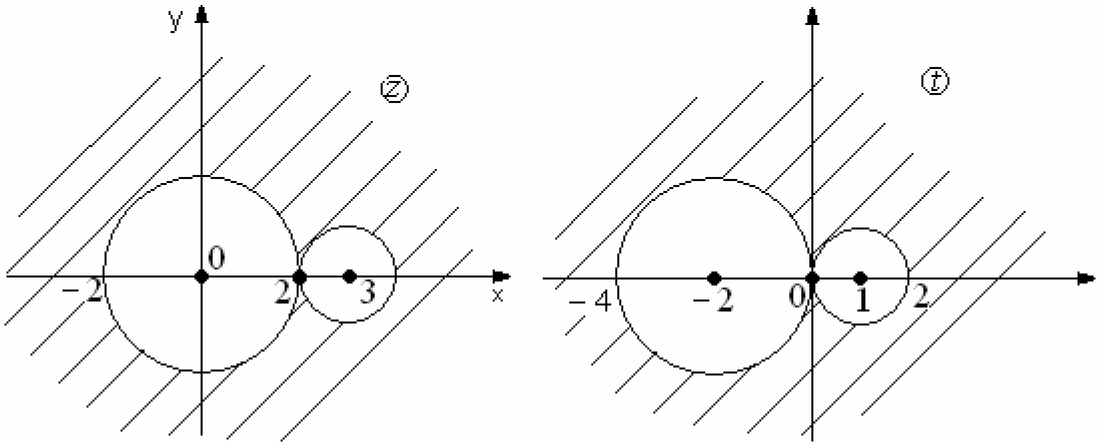



Оскільки внутрішня точка $z=i$ області $D$ переходить в точку $\operatorname{ch}1$, то образом $D$ при відображенні $W=\cos z.$ є права півплощина з розрізом по відрізку $[0,1]$ дійсної осі.

Задача 2. Відобразити конформно на верхню півплощину область, обмежену кругами $|z|=2,\ |z-3|=1.$

Розв'язання. Відображення подамо у вигляді суперпозиції кількох відображень.

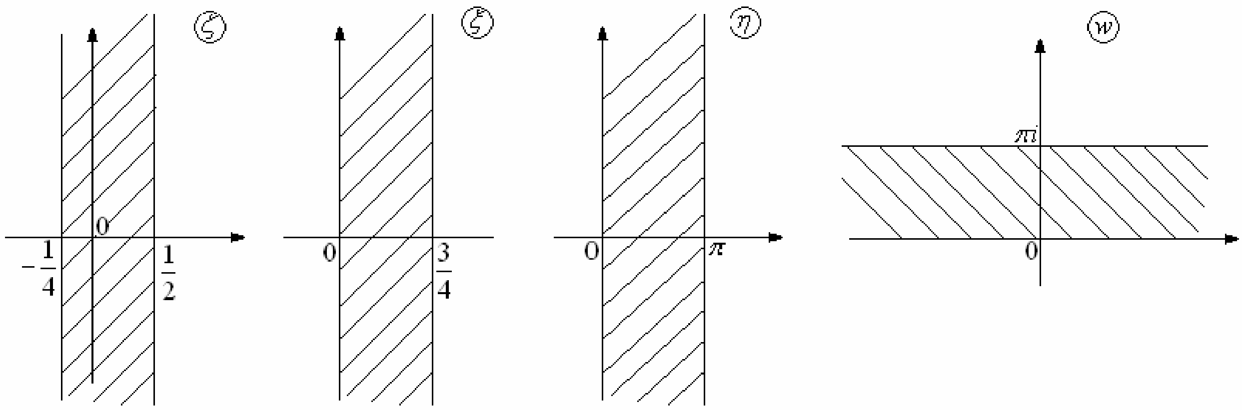
1) $t=z-2$ – паралельне перенесення на $-2$ по дійсній осі.




2) Відображення $\xi = \frac{1}{t}$ кола $|t+2| = 2$ і $|t-1| = 1$ переводить відповідно в прямі $\operatorname{Re}\xi = -\frac{1}{4}$ і $\operatorname{Re}\xi = \frac{1}{2}$ внаслідок кругової властивості. Оскільки $t = 3 \to \xi = \frac{1}{3}$ $i$ $t = \text{-}5 \to \xi = \frac{1}{5}$, то образом заштрихованої області на $t-$ площині є смуга $\left\{-\frac{1}{4} < \operatorname{Re}\zeta < \frac{1}{2}\right\}$.

3) $\xi = \zeta + \frac{1}{4}$ – паралельне перенесення на $\frac{1}{4}$.

4) $\eta = \frac{4}{3}\pi\xi$ – розтяг на $\frac{4}{3}\pi$.




5) $w = e^{i\frac{\pi}{2}}\eta$ – поворот на кут $\frac{\pi}{2}$.

6) Відображення $W = e^{w}$ переводить смугу $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ у верхню півплощину.

Виразимо тепер змінну $w$ через $z$:

$$w = i\frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi i}{3} \cdot \frac{z+2}{z-2}.$$

Шукане відображення: $W = e^{\frac{\pi i}{3} \cdot \frac{z+2}{z-2}}$.

## ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

64. Знайти образ області $D$ при відображенні $W = e^{z}$:

1) $D = \{z : -\infty < \operatorname{Re} z < 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$; 2) $D = \{z : 1 < \operatorname{Re} z < 3,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$;

3) $D = \left\{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1,\ \dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; 4) $D = \{z : \operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \alpha \le 2\pi\}$.

65. Знайти образ області $D$ при відображенні $W = 2e^{iz}$:

1) $D = \left\{z : |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; 2) $D = \left\{z : |\operatorname{Re} z| < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

66. З'ясувати, в що перейде при відображенні $W = \ln z$:

1) полярна сітка $|z| = r,\ \arg z = 0$;

2) кут $0 < \arg z < \alpha \le 2\pi$; 3) сектор 1) $\{|z| < 1,\ 0 < \arg z < \alpha \le 2\pi\}$;

4) кільце $r_1 < |z| < r_2$ з розрізом по відрізку $[r_1, r_2]$.

67. З'ясувати, в що перетвориться при відображенні $W = \cos z$:

1) прямокутна сітка $x = c,\ y = c$;

2) півсмуга $\left\{0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ y > 0\right\}$;

3) смуга $0 < x < \pi$.

68. Знайти образ смуги $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ при відображенні $W = \operatorname{ch} z$.

69. Знайти образ смуги $-\dfrac{1}{2} < \operatorname{Re} z < \dfrac{1}{2}$ при відображенні $W = \sin z$.

70. Відобразити півсмугу $\{0 < \operatorname{Re} z < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ на півкруг $\{|W| < 1, \operatorname{Im} W > 0\}$.

71. Відобразити на верхню півплощину $\operatorname{Im} W > 0$:

1) смугу $\{0 < \operatorname{Re} z < a,\ a > 0\}$; 2) півсмугу $\{\operatorname{Re} z < 1,\ 0 < \operatorname{Im} z < h\}$;

3) кругову луночку, обмежену колами $|z| = 2,\ |z-1| = 1$;

4) область $\{z : |z-1| > 1, |z+1| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ (верхня півплощина з викинутими півкругами).

72. Знайти області на які функція Жуковського відображає:

1) круг $\{|z| < 1\}$; 2) півкруг $\{|z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$;

3) область $\{1 < |z| < R,\ \operatorname{Im} z > 0\}$;

4) область $\left\{\dfrac{1}{R} < |z| < R,\ \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\right\}$;

5) область $\{z : \arg z = \alpha\}$; 6) область $\{z : |z| < 1,\ z \notin [0,1]\}$;

7) область $\{z : |z| > 1,\ z \notin [-2; -1],\ z \notin [1, +\infty)\}$;

8) область $\left\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0,\ z \notin \left[-i, -\dfrac{i}{2}\right]\right\}$.

73. Знайти область, на яку функція Жуковського відображає круг $\{|z|<1\}$ з розрізом по відрізку $[a,1]$ $(-1<a<1)$. Розглянути випадки $a>0$ і $a<0$.

74. Круг $\{|z|<1\}$ з розрізом по відрізку $\left[\frac{1}{2},1\right]$ відобразити на верхню півплощину.

## Тема 12. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОЇ ФОРМУЛИ КОШІ

### РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Обчислити інтеграл

$$I=\int_c \frac{z}{z^4-1}dz \ , \quad \text{де } C=\{|z-i|=1\}.$$

Розв'язання. Із точок $z=\pm1,\pm i$, в яких знаменник перетворюється в нуль, кругу $|z-i|<1$ належить тільки точка $z_0=i$. За формулою знаходимо:

$$I=\int_c \frac{zdz}{(z^2-1)(z+i)(z-i)}=2\pi i\left[\frac{z}{(z^2-1)(z+i)}\right]\Bigg|_{z=i}=-\frac{\pi i}{2}.$$

Задача 2. Обчислити інтеграл

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^z dz}{z(1-z)^3},$$ якщо точка $z=1$ лежить всередині, а точка $z=0$ ззовні контуру $C$.

Розв'язання. За узагальненою інтегральною формулою Коші маємо:

$$I=-\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^z}{z}\cdot\frac{dz}{(1-z)^3}=-\frac{1}{2!}\left(\frac{e^z}{z}\right)''\Bigg|_{z=1}=-\frac{e}{2}.$$

Задача 3. Обчислити інтеграл

$$I=\int_{|z|=2}\frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}dz \ .$$

Розв'язання. Перший спосіб. Використовуючи розклад

$$\frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{4}i\frac{e^{\pi z}}{z-1}-\frac{1}{4}\frac{e^{\pi z}}{(z-1)^2}+\frac{1}{4}i\frac{e^{\pi z}}{z+i}-\frac{1}{4}\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2},$$ одержимо:

$$I=2\pi i\left[-\frac{1}{4}i\left(e^{\pi z}\right)\Big|_{z=i}-\frac{1}{4}\left(e^{\pi z}\right)'\Big|_{z=i}+\frac{1}{4}i\left(e^{\pi z}\right)\Big|_{z=-i}-\frac{1}{4}\left(e^{\pi z}\right)'\Big|_{z=-i}\right]=$$

$$=2\pi i\left(-\frac{1}{4}\pi e^{\pi i}-\frac{1}{4}\pi e^{-\pi i}\right)=\pi^2 i.$$

Другий спосіб. Маємо:

$$I = \int\limits_{\partial D_1} \frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2} \cdot \frac{dz}{(z-i)^2} + \int\limits_{\partial D_2} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2} \cdot \frac{dz}{(z+i)^2} =$$

$$= 2\pi i \left[ \frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2} \right]' \Bigg|_{z=i} + 2\pi i \left[ \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2} \right]' \Bigg|_{z=-i} = 2\pi i \left[ \frac{\pi e^{\pi z}}{(z+i)^2} - \frac{2e^{\pi z}}{(z+i)^3} \right] \Bigg|_{z=i} +$$

$$+ 2\pi i \left[ \frac{\pi e^{\pi z}}{(z-i)^2} - \frac{2e^{\pi z}}{(z-i)^3} \right] \Bigg|_{z=-i} = 2\pi i \frac{\pi e^{\pi i}}{-4} + 2\pi i \frac{\pi e^{-\pi i}}{-4} = \pi^2 i.$$

В даному випадку можна взяти:

$D_1 = \{|z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_2 = \{|z| < 2, \operatorname{Im} z < 0\}$.

## ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

75. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_L |z| \cdot \bar{z} dz$, де $L$ – частина кола $|z| = 1; 0 \le \arg \le \pi$ вибравши за початок кривої L точку $z = 1$;

2) $\int\limits_L e^{\bar{z}} dz$, де $L$ – відрізок прямої з початком в точці $z_1 = 0$ і кінцем в точці $z_2 = (1-i)\pi$;

3) $\int\limits_L (i \arg z - 1) dz$, де $L$ – дуга параболи $y = x^2; 0 \le x \le 1$;

4) $\int\limits_L \left(z^2 + z\bar{z}\right) dz$ де $L$ – дуга параболи $y = x^2; 0 \le x \le 1$ і початок кривої в точці $z = 0$;

5) $\int\limits_L \frac{dz}{|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|}$, де $L$ – квадрат з вершинами в точках 1;i;-1;-i;

6) $\int\limits_L \frac{z dz}{\bar{z}}$, де $L$ – контур $|z| = 1; |z| = 2; 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$;

7) $\int\limits_L \frac{z dz}{|z|}$, де $L$ складається з ліній $|z| = 1;\ 0 \le \arg \le \pi$; $y = 0;\ 1 \le \operatorname{Re} z \le 2$;

8) $\int\limits_L (\operatorname{Im} z^2 + \operatorname{Re} z) dz$; де $L$ – квадрат з вершинами в точках 1;i;-1;-i;

76. Обчислити наступні інтеграли за інтегральною формулою Коші.

1) $\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{z e^{2z}}{z - \pi i} dz$; 2) $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z(z-i)} dz$; 3) $\int\limits_{|z|=2} \frac{ch\, z}{(z-1)(z+i)} dz$; 4) $\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz$.

77. Обчислити всі можливі значення інтеграла $\int\limits_{c}\frac{dz}{z\left(z^{2}-1\right)}$ при різних положеннях замкнутого контуру $C$, який не проходить через жодну з точок $0,\ 1, -1$.

78. Обчислити інтеграл:

$$\int\limits_{C}\frac{(z+i)\sin^{2}z}{z^{2}+9}dz\ ,\quad \text{де } C=\left\{z:\ |z+3|+|z-3|=10\right\}.$$

79. Обчислити інтеграли:

$$1)\int\limits_{|z-i|=1}\frac{e^{z}}{(z-i)^{10}}dz;\ 2)\int\limits_{|z|=1}\frac{\sin z}{z^{3}}dz;\ 3)\int\limits_{|z|=2}\frac{z^{3}\operatorname{sh}z}{(z-1)^{4}}dz.$$

80. Обчислити інтеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{e^{z}dz}{z^{2}+a^{2}}$, якщо контур $C$ містить всередині круг $|z|\le a\ (a>0)$.

81. Обчислити інтеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{ze^{z}dz}{(z-a)^{3}}$, якщо точка $a$ лежить всередині контуру $C$.

82. Обчислити інтеграл $\int\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch}z}{(z+1)^{3}(z-1)}dz.$

## *ТИПОВІ ЗАВДАННЯ НА ПЕРШИЙ МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ*

### ВАРІАНТ I

1. Знайти модулі та аргументи коренів рівняння $\left(z^2+z+1\right)\left(z^2+z+2\right)-12=0$.
2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+i\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$.
3. Знайти всі значення виразу $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$.
4. Знайти образ області $E=\{z:\operatorname{Re}z>1\}$ при відображенні $W=z^2$.
5. Знайти образ круга $\{z:|z-1|<2\}$ при відображенні $W=\frac{2iz}{z+3}$.
6. Знайти образ півплощини $\{z:\operatorname{Re}z>1\}$ при відображенні $W=\frac{z}{z-i+1}$.

### ВАРІАНТ II

1. Знайти натуральне число $n$, якщо $(3+4i)^{n-1}-(1+i)^4=5^n$.
2. Розв'язати рівняння $2ch\,z+sh\,z=i$.
3. Побудувати аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ якщо $v=\ln\left(x^2+y^2\right)+x-2y$.
4. Відшукати дробово-лінійну функцію, якщо $W(i)=-2;$ $W(\infty)=2i;$ $W(-i)=2$.
5. Відшукати функцію яка здійснює конформне відображення області $\{z:\operatorname{Im}z>0,\ z\notin[0,\ 2i]\}$ на півплощину $\{w:\operatorname{Im}w>0\}$.
6. Знайти функцію, яка конформно відображає область $\{z:a<\operatorname{Re}z<b,\ \operatorname{Im}z>c\}$ на $\{w:\operatorname{Im}w>0\}$.

### ВАРІАНТ III

1. Знайти множини точок, які задовольняють умові $\left|\frac{2z}{1+z^2}\right|<1$.
2. Довести $|\sin z|=\sqrt{ch^2y-\cos^2x}$.

3. Розв’язати рівняння $ch\, z=\frac{1}{2}$.
4. Відобразити круг $|z|<2$ на $\operatorname{Re}W>0$ так, щоб $W(0)=1$; $\arg W'(0)=\frac{\pi}{2}$.
5. Відобразити на верхню півплощину $\operatorname{Im}W>0$ область $|z-1|>1$, $|z+1|>1$, $\operatorname{Im}z>0$.
6. Знайти образ області $D=\{z:1<\operatorname{Re}z<3,\ 0<\operatorname{Im}z<\pi\}$ при відображенні $W=e^{z}$.

## ВАРІАНТ IV

1. Користуючись означенням границі послідовності довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+i}{in^2-5}=-3i$.
2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln^2 n}+\frac{i}{n^2+1}\right)$.
3. Знайти всі значення виразу $\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^{1-i}$.
4. Круг $|z|<1$ з розрізом $\left[\frac{1}{4};1\right]$ відобразити на верхню півплощину.
5. Відобразити на верхню півплощину $\operatorname{Im}W>0$ смугу $\{0<\operatorname{Re}z<a, a>0\}$.
6. Знайти образ круга $|z-1|<2$ при відображенні $W=\frac{z-1}{2z-6}$.

## ВАРІАНТ V

1. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.
2. Знайти образ множини $E:|z|=r$ при відображенні $W=z-\frac{1}{z}$.
3. Довести неперервність функції $f(z)=\frac{z-1}{z+1}$, $z_0=1$.
4. Знайти образ півплощини $\operatorname{Re}z>1$ при відображенні $W=\frac{z+1}{z-3}$.
5. Відобразити конформно на півплощину $\operatorname{Im}W>0$ $\left\{\left|z-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2};\ |z-1|<1;\ \operatorname{Im}z>0\right\}$.
6. Знайти образ множини $E=\left\{z:\arg z=\frac{\pi}{4}\right\}$ при відображенні $W=z^{3}$.

ЛІТЕРАТУРА


1. Александров И.А., Соболев В.В. Аналитические функции комплексного переменного. – М.: Высшая школа, 1984. – 186с.
2. Алешков Ю.З., Смышляев П.П. Теория функций комплексного переменного и ее приложения. – Л.:Изд-во Лен. ун-та, 1986. – 247с.
3. Волковысский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1975. –320с.
4. Гольдберг А.А., Шеремета М.М., Заболоцький М.В., Спасків О.Б. Комплексний аналіз. – Львів: Афіша, 2008. – 203с.
5. Грищенко О.Ю., Нагнибіда М.І., Настасієв П.П.. Теорія функцій комплексної змінної. Розв'язування задач. – К.: Вища школа, 1994.– 375с.
6. Давидов Н.О. Елементи теорії функцій комплексної змінної. – К.: Рад. шк.., 1968. – 212с.
7. Ефграфов М.А. и др. Сборник задач по теории аналитических функций.– М.: Наука, 1972. – 415с.
8. Павлова Л.В., Редькіна О.І. Теорія аналітичних функцій. Збірник вправ.– К.: Вища школа, 1980.
9. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984. – 432с.
10. Самойленко В.Г., Бородін В.А., Верьовкіна В.Г., Ловейкін А.В., Романенко І.Б. Комплексний аналіз. Приклади і задачі. – К.: Вид.–полігр. центр «Київський університет», 2010. – 224с.
11. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теорія функций комплексного переменного. – М.:Наука, 1984. – 304с.
12. Фукс Б.А., Шабат Б.В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. – М.: Наука, 1964. – 388с.
13. Шабат Б.В. Введение в комплексный аналіз: В 2 ч. – М.: Наука, 1976.– Ч.1. – 320с.

**Поляк Іван Йосипович** – кандидат фіз.-мат. наук,
**Погоріляк Олександр Олександрович** – кандидат фіз.-мат. наук.

# *ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ*

# *ЧАСТИНА І*

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять
для студентів математичного факультету

Відповідальний за випуск: канд. фіз.-мат наук, доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу Моца А.І.

Формат 60x84/16. Папір офс. Гарнітура Times.
Друк офс. Ум. друк. арк. 1,86. Обл.-вид. арк. 1,43.
Тираж 100 шт. Замовлення № 18.

Видавництво ФОП Бреза А.Е.
м. Ужгород, вул. Університетська, 21/220. Тел./факс: (0312) 64-37-22
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4090 від 15.06.2011р.
Друк: ПП Бреза, тел.: 050-43-22-437