МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ЗБІРНИК ТЕЗ ДОПОВІДЕЙ СТУДЕНТСЬКОЇ НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ

СЕРІЯ «МАТЕМАТИКА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

м. Ужгород | 25-26 квітня 2017 року

Студентська наукова конференція математичного факультету ДВНЗ «УжНУ». ***Серія «Математика і прикладна математика»:*** наукова конференція, збірник тез доповідей. Ужгород, 25-26 квітня 2017 року. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2017. – 79 с.

У збірнику представлено стислий виклад доповідей і повідомлень поданих на загальноуніверситетську студентську наукову конференцію математичного факультету ДВНЗ «УжНУ». Тези доповідей та повідомлень подані в авторському варіанті. Відповідальність за представлений матеріал несуть автори та їх наукові керівники.

Підготовка матеріалів до друку: Млавець Ю. Ю., Синявська О. О.

© ДВНЗ «УжНУ», 2017

© Автори публікацій, 2017

ЗМІСТ

Ангела В. К. Метод Монте-Карло в чисельному інтегруванні функції однієї змінної ……..…….. 6
Андрійчак В. В. Метод байєсової класифікації для задачі медичної діагностики ……..... 7
Антосяк К. П. Про одну модель узгодження ординальних експертних оцінок ……. 8
Білецька Д. Ю. Симетричні многочлени та їх застосування …….. 10
Баняс Я. В. Методи обробки числових оцінок експертів …… 12
Блажівська Р. М. Біфуркація періодичних розв'язків диференціально-алгебраїчних систем …… 13
Бринзей В. В. Розробка системи прийняття рішень для розв'язання задач кластеризації ……..... 14
Брич О. М. Методи класифікації та розпізнавання у виноробстві …… 15
Варцаба О. В. Диференціювання булевих функцій та його застосування …. 16
Воробйова І. М. Розробка сучасних навчально-контролюючих засобів з використанням 3D технологій ……..... 17
Гангур Т. В. Дробовий броунівський рух та його застосування …….. 18
Ганзе М. О. Метод аналізу ієрархій ……... 20
Гечеї О. О., Головко Ю.-Д. І. Точність наближення в ЦГТ для послідовності серій ……... 21
Гобан О. І. Біфуркація розв'язків вироджених нетерових крайових задач … 22
Граков А. А. Наближене розв'язання багатовимірної задачі про ранець з булевими змінними ……... 23
Гусар К. Ч. Основні статистичні оцінки багатофакторного рівняння регресії…… 24
Данило М. М. Точність та надійність деяких моделей гауссових процесів з обмеженим спектром ……..... 25
Динис В. С. Про один клас монотонних булевих функцій……... 27
Дуб Х. В. Оцінка збіжності до нормального закону з використанням псевдо моментів...…….. 28
Зейкан А. П. Стохастичний лексикографічний пошук в задачі про максимальний розріз графу …….. 29
Зубанич О. В., Кирилюк О. А. Про силовські *p*-підгрупи групи *GL*(n, *R*)……..... 31
Ільницька Л. І. Методи та моделі нумерології …… 32
Калабішка В. Ю. Деякі методи класифікації об'єктів ……. 33

Койтюк Д. В. Застосування лінійного програмування в теоретико-ігрових методах дослідження складних систем ……..…. 34
Копанишин Т. В. Моделювання випадкових процесів, що допускають зображення у вигляді стохастичних інтегралів…….. 36
Копинець В. В. Моделі і методи прогнозування динамічних рядів в нечітко заданих множинах ……..... 37
Кузьма О. О. Стохастичний лексикографічний пошук для задач покриття та упаковки скінченної множини ……... 38
Курта Н. В. Моделювання логістичної стратегії підприємства …….. 40
Лешко К. В. Застосування $\boldsymbol{ARMA}$ процесів …….. 42
Мічак Л. В. Розробка інформаційного ресурсу на сайті електронного навчання ДВНЗ «Ужгородський національний університет» для тестування з алгебри учнів 9-х класів загальноосвітніх шкіл …….. 43
Марушка М. В. Дослідження швидкості розподілів сум випадкових величин……... 44
Мауріц О. Т. Дослідження існування та єдиності розв'язків нелінійних крайових задач із застосуванням топологічних індексів …….. 45
Махлинець Н. А. Моделі теорії управління запасами ……. 46
Михайлишин О. М. Послідовне уточнення розв'язку крайової задачі на основі методу Ньютона …….. 48
Могіш І. Ю. Вплив зовнішніх посилань на пошукову видачу сайту (SEO)... 49
Мушка Н. І. Застосування методів обробки статистичних даних у медицині…… 50
Немеш М. М. Про підалгебру алгебри проективних $\boldsymbol{Z_2}$-зображень циклічної 2-групи, породжену незвідними проективними $\boldsymbol{Z_2}$-зображеннями……. 52
Павлусик А. І. 3D моделювання та візуалізація ……... 54
Поліщук А. В. Визначення пріоритетів при розв'язуванні багатокритеріальних задач оптимізації ……..……... 55
Половка М. І. Багатокритеріальні моделі та методи в задачах управління ризиками …… 57
Поляк А. В. Застосування мови програмування та статистичного середовища обчислень R для обробки табличних даних …….. 59
Попович Б. С. Одна конзистентна оцінка коефіцієнта регресії гауссівських незалежних однорідних випадкових полів ……. 60
Попович Т. П. Двофакторний та трифакторний дисперсійний аналізи та їх застосування …….. 61
Просолін В. В. Експертні методи визначення числової оцінки об'єкта..... 63

Роботишин М. В. Реалізація класичного та пакетного алгоритму навчання нейромережі MLMVN засобами C++…….. 64
Січка Є. С. Розробка веб-додатку для складання розкладу навчання …...…. 65
Сливка А. Побудова узагальнених канонічних поліномів функцій двозначної логіки …….. 66
Сослюк М. І., Форос Є. І., Капустей М. М., Слюсарчук П. В. Узагальнення однієї оцінки Золотарьова …… 67
Сотак Т. Ю. Організація паралельних обчислень в алгоритмах чисельних методів ……... 69
Товт Н. М. Розробка інформаційного ресурсу на сайті електронного навчання ДВНЗ «Ужгородський національний університет» для тестування з геометрії учнів 9-х класів загальноосвітніх шкіл …… 71
Тромбола М. І. Розробка інформаційної системи підтримки прийняття рішень у освітніх закладах …… 72
Федина О. П. Аналіз електроенцефалограм за допомогою нейромережі MLMVN з метою ранньої діагностики захворювань мозку …… 73
Федорянич М. В. Використання сучасних методів штучного інтелекту в прикладних задачах …….. 74
Цайбер В. І. Застосування бакстерівського підходу до побудови довірчих інтервалів параметра Хюрста …….. 75
Шак А. В. Алгоритми спектральних перетворень сигналів та зображень … 76
Шеверя Л. В. Моделі і методи прийняття багатокритеріальних рішень в економіці та підприємстві …… 77
Шелевер О. В. Побудова узагальнених поліномів функцій двозначної логіки та їх мінімізація ……...…… 78
Яцина М. Ю., Кирилюк О. А. Про мінімальні незвідні матричні групи ..… 79

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО В ЧИСЕЛЬНОМУ ІНТЕГРУВАННІ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Ангела Вікторія Миколаївна

3 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Методи Монте-Карло − це множина статистичних методів, що мають широку сферу застосувань і використовуються для розв'язання фізичних, хімічних, біологічних, математичних задач, при оцінці фінансових ризиків, розпізнаванні образів тощо. У цих методах для моделювання використовуються послідовності випадкових чисел.

В роботі розглядається задача обчислення методом Монте-Карло наближеного значення інтеграла

$$I = \int_a^b f(x)\,dx. \quad (1)$$

де функція f(x) визначена та неперервна на інтервалі (a, b).

Загальна ідея цього методу полягає в тому, що обчислення значення інтеграла (1) з урахуванням неперервності функції f(x) на (a, b) та властивостей математичного сподівання випадкової функції зводиться до обчислення наступного математичного сподівання [1]:

$$M_\eta = M\left[f(x)/p_\xi(\xi)\right] = \int_a^b \left[f(x)/p_\xi(x)\right]p_\xi(x)dx = I,$$

де ξ – деяка випадкова величина, яка визначена на інтервалі (a, b) зі щільністю $p_\xi(x)$.

Останнє співвідношення означає, що, якщо провести N випробувань $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ випадкової величини ξ, то при достатньо великому N стає справедливим наближення:

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{f(\xi_j)}{p_\xi(\xi_j)} \approx I. \quad (2)$$

При обчисленні (1) за правилом (2), для отримання значень випадкової величини ξ зі щільністю $p_\xi(x)$ на інтервалі (a, b) використовується схема розігрування неперервної випадкової величини на основі значень випадкової величини, рівномірно розподіленої на інтервалі $(0, 1)$.

Від того, яка випадкова величина ξ використовується, залежить похибка формули (2). Цю похибку можна мінімізувати різними способами, зокрема, вибираючи щільність розподілу $p_\xi(x)$ пропорційно до $|f(x)|$. При цьому, на практиці вибирати складні функції $p_\xi(x)$ не завжди можна, оскільки тоді ускладнюється процедура моделювання значень ξ [2].

У роботі були вивчені особливості застосування методу Монте-Карло для розв'язання задач чисельного інтегрування функцій однієї змінної. Перевагами методу Монте-Карло є, по-перше, проста структура обчислювального алгоритму та нескладна процедура оцінки похибки, величина якої, як правило, пропорційна $\sqrt{D/N}$, де D – деяка константа, а N – число випробувань випадкової величини, по-друге, незалежність порядку спадання похибки від розмірності інтеграла.

Література

1. *Соболь И. М.* Численные методы Монте-Карло / И. М. Соболь. – М.:Наука, 1973. – 312 с.
2. *Тараскин А. Ф.* Статистическое моделирование и метод Монте-Карло / А. Ф. Тараскин. – Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 1997. – 62 с.

МЕТОД БАЙЄСОВОЇ КЛАСИФІКАЦІЇ ДЛЯ ЗАДАЧІ МЕДИЧНОЇ ДІАГНОСТИКИ

Андрійчак Василина Вікторівна

6 курс, спеціальність 8.04030101 «Прикладна математика»

Розглядається задача медичної діагностики, як задача розпізнавання образів в такій постановці: Дано множина об'єктів-пацієнтів:

$$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\},$$

і множину захворювань:

$$D = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}.$$

Нехай $X -$ простір ознак, точками якого є вектори ознак об'єктів [1]:

$$x: P \to X,$$

де x – функція, що ставить у відповідність об'єкту $P_i,\ i = \overline{1,n}$ його вектор ознак $x(P_i),\ i = \overline{1,n}$. Тоді:

$$\delta: X \to D,$$

де δ – вирішальне правило, яке ставить у відповідність вектору ознак пацієнта певне захворювання.

Для розв'язання цієї задачі можна застосувати такі методи розпізнавання образів [2, 3]: метод Байєса, метод k-найближчих сусідів, метод Роккіо, метод k-середніх та інші.

Метод Байєсової класифікації є статистичним методом і дозволяє розрахувати ймовірність належності об'єкта до заданого класу. Він заснований на теоремі Байєса.

Нехай подія A може наступити за умови появи однієї з несумісних подій B_1, B_2, …, B_n, які утворюють повну групу. Нехай відомі ймовірності цих подій та умовні ймовірності $P_{B_1}(A)$, $P_{B_2}(A)$, ..., $P_{B_n}(A)$ події A.

Ймовірність події A, яка може настати лише за умови появи однієї з несумісних подій B_1, B_2, …, B_n, що утворюють повну групу, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події A .

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Оскільки невідомо, яка з подій B_1, B_2, …, B_n наступить, їх називають гіпотезами. Припустимо, що було здійснено випробування і наступила подія A. Тоді, використовуючи цю інформацію, можна перерахувати умовні ймовірності подій $P_A(B_1)$, $P_A(B_2)$, ..., $P_A(B_n)$ за формулою:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)},$$

де $P_A(B_i)$ визначає, яка ймовірність того, що об'єкт A належить класу B_i.

Формула Байєса дозволяє переоцінити ймовірність гіпотез, після появи події A, коли не відомо, яка з подій B_1, B_2, …, B_n призвела до цього.

Література

1. *Вапник В.Н.* Теория распознавания образов / В.Н. Вапник, А.Я. Червоненкис. − М.:Наука, 1974. – 416 с.
2. *Заяць В.М.* Методи розпізнавання образів: Навчальний посібник / В.М. Заяць, Р.М. Камінський. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2004. − 176 с.
3. *Маннинг К.Д.* Введение в информационный поиск / К.Д. Маннинг, П. Рагхаван, Х. Шютце. − М.: Вильямс, 2011. − 750 с.

ПРО ОДНУ МОДЕЛЬ УЗГОДЖЕННЯ ОРДИНАЛЬНИХ ЕКСПЕРТНИХ ОЦІНОК

Антосяк КатеринаПавлівна

6 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

Експертні процедури відіграють важливу роль при використанні сучасних методів підтримки прийняття рішень. Методи отримання, представлення й обробки експертної інформації утворюють невід'ємну частину технології підтримки прийняття рішень [1].

Однією з необхідних складових для створення сучасних систем підтримки прийняття рішень є методи ординального експертного оцінювання для отримання знань від експертів про предметну область. При цьому завжди актуальною є проблема узгодження оцінок, даних різними експертами, адже знаходити результуюче (агреговане) значення індивідуальних оцінок, які значно відрізняються (або й, навіть, суперечать одна одній) не має сенсу. У зв'язку з цим виникає необхідність у визначенні ступеня узгодженості експертних оцінок для доцільності їхньої подальшої агрегації[2].

Нехай $\{r^{(i)}\}, i=\overline{1,m}$ − множина m індивідуальних ранжирувань експертами n альтернатив, тобто $r^{(i)}=\{r_j^{(i)}\}$, $j=\overline{1,n}$, де $\forall k\neq l \Rightarrow r_k^{(i)}\neq r_l^{(i)}$, $r_j^{(i)}\in N$ − ранг j-ї альтернативи в i-у ранжируванні.

У роботах [3, 4] пропонується вважати множину індивідуальних ранжирувань достатньо узгодженою, у тому випадку, якщо отримане на їхній основі результуюче відношення також є ранжируванням (тобто відношенням лінійного порядку). Така вимога, здається природною при груповому прийнятті рішень, оскільки виключає появу протиріч у підсумковому відношенні (порушення його транзитивності).Тим самим виключається можливість прояву т.зв. парадоксу Кондорсе [1], внаслідок якого може ставитися під сумнів можливість здійснення однозначного й конструктивного групового вибору.

Метод побудови строгого результуючого ранжирування із використанням правила Кондорсе є наступний – альтернатива Кондорсе ставиться на перше місце (отримує найвищий ранг) та виключається із подальшого розгляду, для решти альтернатив знову знаходиться найкраща за Кондорсе, яка займає друге місце у результуючому ранжируванні, і т. д. Це правило можна модифікувати для забезпечення достатності узгодженості ординальних експертних оцінок (мається на увазі існування альтернативи Кондорсе) на кожному кроці. За необхідності цього можна досягти за рахунок зворотного зв'язку з експертами. Тобто у випадку, коли на деякому кроці не вдається визначити найкращу альтернативу за Кондорсе, то пропонується повторно звернутися до експертів із пропозицією переглянути свої оцінки на множині альтернатив, які розглядаються на цьому кроці.

Формально алгоритм зводиться до виконання наступних кроків.

1) Нехай $I^{(h)}$ – множина індексів альтернатив, що розглядаються на кроці з номером h ($h=1,2,...,n-1$). І нехай $\{r^{(k,h)}\}, k=\overline{1,m}$ – індивідуальні ранжирування експертів на кроці з номером h ($h=1,2,...,n-1$), які подаються у вигляді матриць відношень $r^{(k,h)}=(r_{ij}^{(k,h)})_{i,j\in I_h}$:

$$r_{ij}^{(k,h)}=\begin{cases}1, \text{ якщо } r_i^{(k,h)}<r_j^{(k,h)},\\ 0, \text{ якщо } r_i^{(k,h)}>r_j^{(k,h)},\end{cases} \quad i,j\in I^{(h)}.$$

Якщо $|I^{(h)}|>1$, то переходимо до наступного кроку, інакше – кінець алгоритму.

2) Матриця результуючого відношення $\tilde{r}^{(h)} = (\tilde{r}_{ij}^{(h)})_{i,j \in I_h}$ будується за правилом Кондорсе:

$$\tilde{r}_{ij}^{(h)} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \sum_{k=1}^{m} r_{ij}^{(k,h)} > \frac{m}{2}, \\ 0, \text{ інакше,} \end{cases} i \neq j, \ i, j \in I^{(h)}.$$

3) Позначимо $I_{i,0}^{(h)} = \{j : \tilde{r}_{ij}^{(h)} = 0\}$, $I_{i,1}^{(h)} = \{j : \tilde{r}_{ij}^{(h)} = 1\}$. Очевидно, що $I_{i,0}^{(h)} \cap I_{i,1}^{(h)} = \varnothing$ та $I_{i,0}^{(h)} \cup I_{i,1}^{(h)} = I^{(h)} \setminus \{i\}$. Якщо для деякого індексу $c_h \in I^{(h)}$ виконується $| I_{c_h,0}^{(h)} | = 0$, то альтернатива з індексом c_h є найкращою за Кондорсе на h-му кроці. У цьому випадку покладаємо $I^{(h+1)} = I^{(h)} \setminus \{c_h\}$ а $h = h+1$ та переходимо до кроку 1. Якщо ж найкращої за Кондорсе альтернативи не існує, то переходимо до наступного кроку.

4) Зі способу побудови матриць відношень індивідуальних ранжирувань $r^{(k,h)}$ і побудови результуючої матриці $\tilde{r}^{(h)}$ видно, що для неї завжди виконуються три властивості відношення лінійного порядку (а саме, властивості рефлективності, антисиметричності та зв'язності). Таким чином, наявність порушень транзитивності у $\tilde{r}^{(h)}$ свідчить про протиріччя в судженнях членів групи експертів, і рівень узгодженості множини ранжирувань $\{r^{(k,h)}\}, k = \overline{1,m}$ пропонується вважати недостатнім для побудови результуючого ранжирування на основі даної множини індивідуальних ранжирувань.

Попередньо розрахувавши рядкові суми додатних (у цьому випадку рівних одиниці) елементів $s_i^{(h)} = \sum_{j \in I_{i,1}^{(h)}} \tilde{r}_{ij}^{(h)}$ пропонується звернутися до експертів для перегляду ними своїх оцінок серед альтернатив із найбільшим значенням відповідних рядкових сум, тобто серед альтернатив з індексами із множини $C^{(h)} = Arg \max_{i \in I^{(h)}} \{s_i^{(h)}\}$.

Твердження. Якщо $|C^{(h)}| > 1$, то для будь-яких двох альтернатив з індексами із множини $C^{(h)}$ порушується умова транзитивності.

Отже, у випадку коли $|C^{(h)}| > 1$, то експертам пропонується попарно переглянути свої оцінки на множині альтернатив з індексами із множини $C^{(h)}$. Якщо ж $|C^{(h)}| = 1$, ($C^{(h)} = \{i'\}$), то експертам пропонується переглянути свої оцінки на множині альтернатив, індекси яких утворюють цикли довжини 3 з альтернативою з індексом i'.Після уточнення індивідуальних оцінок експертами відбувається перехід до кроку 1.

Література

1. *Волошин О.Ф.* Моделі та методи прийняття рішень / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2010. – 336 с.
2. *Тоценко В.Г.* Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. / В.Г. Тоценко. – К.:Наукова думка, 2002. – 382 с.
3. *Тоценко В.Г.* Метод определения достаточности согласованности индивидуальных ранжирований при принятии групповых решений / В.Г. Тоценко // Проблемы управления и информатики. – 2006. – № 4. – С. 82-88.
4. *Цыганок В.В*. О достаточности степени согласованности групповых ординальних оценок / В.В. Цыганок, С.В. Каденко // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 4. – С. 107-112.

СИМЕТРИЧНІ МНОГОЧЛЕНИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Білецька Діана Юріївна

2 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Важливе місце в теорії алгебри многочленів посідають симетричні многочлени та, зокрема, застосування симетричних многочленів при розв'язуванні рівнянь, систем рівнянь, вилучення коренів, доведення тотожностей, звільнення від ірраціональності у дробах тощо.

Симетричним многочленом називається многочлен $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від n змінних, що не змінюється при всіх перестановках змінних. Тобто многочлен $F \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ від n змінних над комутативним кільцем R є симетричним, якщо для довільної перестановки,

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{\sigma(1)} & x_{\sigma(2)} & \cdots & x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

справджується рівність: $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.

Ціла серія задач, в яких потрібно знайти деякі вирази, що містять корені заданого рівняння, можна з успіхом вирішити за допомогою симетричних многочленів.

Задача. Знайти многочлен четвертого степеня, коренями якого є квадрати комплексних коренів многочлена $x^4 + 2x^3 - x + 3$.

Для розв'язання задачі позначимо корені заданого рівняння через x_1, x_2, x_3, x_4, корені шуканого рівняння — через y_1, y_2, y_3, y_4, а коефіцієнти шуканого рівняння — через a, b, c, d. За теоремою Вієта для даного рівняння маємо:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2,$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0,$$
$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 1,$$
$$\sigma_4 = x_1x_2x_3x_4 = 3.$$

Для шуканого:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -a,$$
$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_1y_4 + y_2y_3 + y_2y_4 + y_3y_4 = b,$$
$$y_1y_2y_3 + y_1y_2y_4 + y_1y_3y_4 + y_2y_3y_4 = -c,$$
$$y_1y_2y_3y_4 = d.$$

За умовою задачі маємо, що $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$. Тому для шуканого рівняння теорему Вієта можемо записати наступним чином:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -a,$$
$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2 = b,$$
$$x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2 + x_2^2x_3^2x_4^2 = -c,$$
$$x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2 = d.$$

З останніх рівностей виразимо многочлени у лівій частині через елементарні симетричні многочлени.

Нехай $g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Добре відомо, що $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$, звідси

$$g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 =$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Нехай $g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2$. Многочлен $g_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$ від елементарних симетричних будемо знаходити методом невизначених коефіцієнтів. Старший член многочлена g_2: $x_1^2x_2^2$, його степінь дорівнює 4. Оскільки многочлен g_2 від чотирьох змінних, то ми можем записати $x_1^2x_2^2x_3^0x_4^0$. Показники степенів в цьому мономі (2, 2, 0, 0).

Випишемо показники всіх мономів від чотирьох змінних степеня 4, для яких моном $x_1^2x_2^2x_3^0x_4^0$ є лексикографічно старшим: (2, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1).

Моному з показниками (2, 2, 0, 0) відповідає елементарний симетричний многочлен σ_2^2, моному з показниками (2, 1, 1, 0) — $\sigma_1\sigma_3$, моному з показниками (1, 1, 1, 1) — σ_4. Тоді $g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = A\sigma_2^2 + B\sigma_1\sigma_3 + C\sigma_4$, де A, B, C — невизначені коефіцієнти.

Оскільки моном $x_1^2x_2^2$ є лексикографічно старшим, то $A = 1$. Для того, щоб знайти усі інші коефіцієнти, побудуємо таблицю, надаючи змінним x_1, x_2, x_3, x_4 часткових значень.

x_1	x_2	x_3	x_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	g_2
1	1	1	1	4	6	4	1	6
1	1	1	0	3	3	1	0	3

Підставляємо отримані значення в вираз g_2 з невизначеними коефіцієнтами. Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 36 + 16B + C = 6, \\ 9 + 3B = 3. \end{cases}$$

Тобто, $B = -2$, $C = 2$. Тоді, $g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4$.

Нехай $g_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2 + x_2^2x_3^2x_4^2$. Старший член многочлена g_3: $x_1^2x_2^2x_3^2$, його степінь дорівнює 6. Оскільки многочлен g_3 від чотирьох змінних, то ми можем записати $x_1^2x_2^2x_3^2x_4^0$. Показники степенів в цьому мономі (2, 2, 2, 0).

Мономів від чотирьох змінних степеня 4, для яких моном $x_1^2x_2^2x_3^2x_4^0$ є лексикографічно старшим, може бути ще тільки один — моном з показниками (2, 2, 1, 1). Моному з показниками (2, 2, 2, 0) відповідає елементарний симетричний многочлен — σ_3^2, моному з показниками (2, 2, 1, 1) — $\sigma_2\sigma_4$. Тоді $g_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = A\sigma_3^2 + B\sigma_2\sigma_4$. $A = 1$, щоб знайти B надамо часткових значення для x_1, x_2, x_3, x_4, а саме $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, отримаємо $B = -2$. Тоді, $g_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sigma_3^2 - 2\sigma_2\sigma_4$.

Нехай $g_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2$, очевидно що $g_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sigma_4^2$.

Таким чином,

$$a = -\sigma_1^2 + 2\sigma_2 = -4,$$
$$b = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4 = 10,$$
$$c = -\sigma_3^2 + 2\sigma_2\sigma_4 = -1,$$
$$d = \sigma_4^2 = 9.$$

Тому шуканий многочлен має вигляд:

$$x^4 - 4x^3 + 10x^2 - x + 9.$$

Нами розроблений алгоритм в комп'ютерній алгебраїчній системі MuPAD за допомогою якого довільний симетричний многочлен можна представити у вигляді многочлена від елементарних симетричних многочленів.

Література

1. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: учебник для вузов / А.И. Кострикин. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.
2. *Вейль Г.* Симметрия: учебное пособие / Г. Вейль. – М.: Наука, 1968. – 192 с.
3. *Завало С. Т.* Курс алгебри: навч. посібник/ С. Т. Завало. – К.: Вища школа, 1985. – 503 с.

МЕТОДИ ОБРОБКИ ЧИСЛОВИХ ОЦІНОК ЕКСПЕРТІВ

Баняс Яна Василівна

7 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

Передумови розвитку експертного оцінювання стало передусім прискорення науково-технічного прогресу. Експертна інформація відіграє важливу роль при використанні сучасних методів підтримки прийняття рішень [1]. Актуальність теми визначається тим, що ефективні рішення дозволяють досягти поставленої мети при мінімальних затратах трудових і матеріальних ресурсів.

Ефективність використання експертної інформації безпосередньо залежить від потужності сучасного апарату її формалізації та обробки, важливість вдосконалення і розвитку якого важко переоцінити. Розробці програмного забезпечення для обробки нечіткої експертної інформації в задачах числових оцінок об'єктів та розв'язання нових прикладних задач і присвячена дана робота.

Розглянемо «чітку» постановку задачі числової оцінки [1]. Кожен з n експертів задає числову оцінку певного об'єкта. Потрібно знайти колективну оцінку цього об'єкта. У класичній постановці даної задачі експерти мають задати оцінку певного об'єкта у вигляді числового вектора. Але на практиці експерти частіше висловлюються наступними твердженнями: «оцінка певного об'єкта має бути близька до деякого числа», «оцінка об'єкта скоріше всього буде лежати в межах [a, b]» і т. д.

Очевидно, що врахування при цьому лише одного числа (хоча і найімовірнішого) приводить до втрати частини інформації, що безпосередньо впливає на значення колективної оцінки. Тому доцільно класичну задачу дещо модифікувати, розширивши при цьому множину допустимих оцінок [2].

Нехай експерти можуть дати оцінку певного об'єкта, використовуючи такі типи тверджень: 1. «Оцінка об'єкта коливається в межах від b до c»; 2. «Оцінка об'єкта близька до числа b» або «Оцінка об'єкта знаходиться в околі числа b»; 3. «Оцінка об'єкта не більша за число b»; 4. «Оцінка об'єкта не менша за число b». Таким чином, ставиться нечітка задача числової оцінки об'єкта у такій постановці: експерти визначають оцінку певного об'єкта, використовуючи твердження типу 1–4, на основі отриманих даних потрібно знайти нечітку та чітку колективні оцінки даного об'єкта та коефіцієнт узгодженості думок експертів.

Для розв'язання поставленої задачі пропонується використати математичну формалізацію індивідуальних оцінок експертів на основі теорії нечітких множин описану в [2].

Розроблена програмна система показала ефективність розробленого математичного апарату описаного в [2] при розв'язанні задач обробки нечітких оцінок експертів.

Література

1. *Волошин О.Ф.* Моделі та методи прийняття рішень / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2010. – 336 с.
2. *Кондрук Н.Е.* Розробка системи обробки нечіткої експертної інформації / Н.Е. Кондрук // Управління розвитком складних систем. – 2014. – Вип. 18. – С. 173-176.

БІФУРКАЦІЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНИХ СИСТЕМ

Блажівська Роксолана Миколаївна

6 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

Розглянемо систему рівнянь

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon A_1(t)x + f(t), \qquad t \in R, \tag{1}$$

де $\det B(t) \equiv 0$, $rank\, B(t) = const\ \ \forall t \in \mathcal{R}$, матриці $B(t)$, $A(t)$, $A_1(t)$ і функція $f(t)$ є T-періодичними. Вважаємо, що матриці $A(t), B(t)$ та вектор $f(t)$ є достатньо гладкими при всіх $t \in \mathcal{R}$, тобто $A(t), A_1(t), B(t), f(t) \in C^k(\mathcal{R}, T)$.

Розглядається критичний випадок – коли породжуюча T-періодична система

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)\,, \qquad t \in \mathcal{R}, \tag{2}$$

одержана з (1), (2) при $\varepsilon = 0$, має T-періодичний розв'язок не при всіх неоднорідностях $f(t)$. Досліджується питання біфуркації T-періодичні розв'язків – які повинні бути лінійні збурення $A_1(t)$, щоб система (2) мала T-періодичні розв'язки при довільній функції $f(t) \in C^{q-1}(\mathcal{R}, T)$.

Література

1. *Самойленко А.М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями: Навч. посіб. / А.М. Самойленко, А.І. Шкіль, В.П. Яковець. – К: Вища школа, 2000. – 294 с.

РОЗРОБКА СИСТЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ

Бринзей Вікторія Вікторівна

7 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

Кластерний аналіз знаходить своє застосування у різних галузях науки, таких як біологія, медицина, археологія, історія, географія, хімія та інші. Задача кластеризації з'являється, коли потрібно розділити певну множину об'єктів на групи за деяким критерієм.

Метою роботи є розробка програмного комплексу для допомоги та підтримки різних видів діяльності людини при прийнятті рішень стосовно розв'язання структурованих або неструктурованих проблем. Розрізняють декілька видів СППР, що відображають основні аспекти процесу прийняття рішень: аналіз рішень; визначення рішень; дослідження рішень; процес впровадження рішень. Кожний із зазначених напрямів постає самостійною перспективою розвитку СППР, проте у «чистому вигляді» вони практично не зустрічаються [1, с. 19].

Вхідною інформацією для кластеризації є вибірка спостережень $x = \{x_j^s\}$, де x_j^s – значення j-ої ознаки s-го екземпляра вибірки, $s = 1,2, \dots, S$, S – кількість екземплярів вибірки; $j = 1,2, \dots, N$, N – кількість ознак, що характеризують екземпляри вибірки.

Основним завданням є розбиття даної множини об'єктів на однорідні групи – кластери.

Розбиття виконуємо за допомогою одного з чітких методів кластеризації: ієрархічного, методу деревовидної кластеризації, або неієрархічного – методу k-середніх.

Для розбиття на групи множину об'єктів у методі деревовидної кластеризації використовуємо один із чотирьох видів відстані між об'єктами, а саме:

1. Евклідова відстань $L = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$;
2. Квадрат Евклідової відстані $L = \sum_i (x_i - y_i)^2$;
3. Манхеттенівська відстань $L = \sum_i |x_i - y_i|$;
4. Відстань Чебишева $L = \max_i |x_i - y_i|$.

Для кластеризації використовують дві основні стратегії: Стратегія найближчого сусіда і Стратегія найвіддаленішого сусіда [3, с. 31].

При кластеризації методом k-середніх, спочатку вибираються ймовірні центри, довкола яких формується кластер. Якщо утворені кластери разом зі своїми центрами задовольняють певним критеріям, кластеризація завершується на даному етапі, якщо ж ні – центри кластерів обчислюються заново, а об'єкти перерозподіляються [2, с. 7].

Тестування розробленої СППР на реальних задачах кластеризації показало її ефективність та зручність у використанні.

Література

1. *Бідюк П.І.* Проектування комп'ютерних інформаційних систем підтримки прийняття рішень: Навчальний посібник./ П.І. Бідюк, Л.О. Коршевнюк. – Київ: Нац. тех. ун-т «Київ. політехнічний інститут», 2010. – 340 с.
2. *Котов А.* Кластеризация данных / А. Котов, Н. Красильников, 2006. – 16 с.
3. *Мандель И.Д.* Кластерный анализ / И. Д. Мандель. – Москва: Финансы и статистика, 1988. – 176 с.

МЕТОДИ КЛАСИФІКАЦІЇ ТА РОЗПІЗНАВАННЯ У ВИНОРОБСТВІ

Брич Олеся Михайлівна

4 курс, напрям підготовки 6.040201 « Математика»

Темою нашої наукової роботи є методи класифікації та розпізнавання у виноробстві. Актуальність цієї теми полягає в тому,що розпізнавання образів є однією з найфундаментальніших проблем теорії інтелектуальних систем з одного боку, а з іншого боку – задача розпізнавання образів має величезне практичне значення. Замість терміна «розпізнавання» часто вживається інший – «класифікація». Ці два терміни у багатьох випадках розглядаються як синоніми, але не є повністю взаємозамінюваними. Кожний з них має свої сфери застосування, і інтерпретація обох термінів часто залежить від специфіки конкретної задачі.

Завдання класифікації є важливою проблемою в різних галузях знань. Існує величезна кількість досліджень у цій області, що призвели до великої різноманітності методів, які все більше і більше застосовуються на практиці.

Нехай маємо два набори даних пов’язані з червоними і білими варіантами португальського вина «Вино Верде».

Через секретність і матеріально-технічні проблеми доступними є тільки фізико-хімічні і сенсорні змінні. Ці набори даних можна розглядати як класифікації або регресії завдань. Класи впорядковані і не збалансовані.

Вхідний файл складається з червоного вина – +1599 та білого вина – +4898, а також їх характеристики , які мають 11 атрибутів.

Алгоритм використовує відстані в просторі ознак, і, вважається, що кількість класів, на які необхідно розбити об’єкти наперед відома.

Нехай задано множину об’єктів. Необхідно розбити множину A на k класів $A_1, A_2, \dots, A_k$, таких що задовольняли б наступні умови:

1. $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$;
2. $\bigcap_{i=1}^{k} A_i = \emptyset$;
3. Класифікація буде вдалою, якщо відстань між векторами, які належать одному класу менша ніж відстань, що належать різним класам.

Після класифікації одержимо k класів; назвемо їх навчальною вибіркою.

Отже, задача полягає в тому, щоб розбити початкову множину об’єктів так, щоб будь-який новий об’єкт розпізнавальна система могла безпомилково віднести до одного із k класів.

Література

1. V.A.S. Vicencio. "Chilean wine. Classification using volatile organic compounds, data from rapid analyzer GC ». I.IEEE Trans.
2. 2. Cortes.P.A and J. Reis, 2009. «Simulation wine benefits from the extraction of data from physical and chemical properties. Support decisions »Syst.

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Варцаба Олена Василівна

5 курс, спеціальність 014.04 «Середня освіта. Математика»

Розглядається задача диференціювання булевих функцій та його застосування для побудови узагальнених поліномів функції двозначної логіки.

Похідною першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ від булевої функції f за змінною x_i називається сума за модулем 2 одиничної та нульової залишкових функцій:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1} \dots, x_n) \oplus f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (1)$$

Одинична залишкова функція одержується в результаті присвоєння змінній x_i одиниці, нульова – присвоєнням x_i нулю.

Мішаною похідною $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_k}}$ від булевої функції f за змінними $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ називається рівність вигляду:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{1_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k-1}}} \right). \quad (2)$$

Мішану похідну k – го порядку $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_k}}$ обчислюють, застосовуючи рівність (2) k разів фіксацією змінних $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$.

На основі поняття похідної довільну булеву функцію f можна розкласти за аргументами. Наприклад, розкладемо функцію $f(x_1, x_2, x_3)$ за змінними x_1, x_2, x_3.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = f(c_1, c_2, c_3) \oplus (x_3 \oplus c_3) \frac{\partial f(c_1, c_2, x_3)}{\partial x_3} \oplus \\ \oplus (x_2 \oplus c_2) \frac{\partial f(c_1, x_2, c_3)}{\partial x_2} \oplus (x_2 \oplus c_2)(x_3 \oplus c_3) \frac{\partial^2 f(c_1, x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3} \oplus \\ \oplus (x_1 \oplus c_1) \frac{\partial f(x_1, c_2, c_3)}{\partial x_1} \oplus (x_1 \oplus c_1)(x_3 \oplus c_3) \frac{\partial^2 f(x_1, c_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_3} \oplus \\ \oplus (x_1 \oplus c_1)(x_2 \oplus c_2) \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, c_3)}{\partial x_1 \partial x_2} \oplus (x_1 \oplus c_1)(x_2 \oplus c_2)(x_3 \oplus c_3) \frac{\partial^3 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}, \end{aligned} \quad (3)$$

де $c_1, c_2, c_3 -$ булеві константи.

Отриманий вираз (3) – поліноміальне представлення булевої функції $f(x_1, x_2, x_3)$. Для функції $f(x_1, x_2, x_3)$ існують вісім наборів значень констант, а отже, і стільки же поліноміальних виразів заданої функції. Для їх побудови необхідно підставити всеможливі значення констант c_1, c_2, c_3 у вираз (3), тобто ми отримаємо всі узагальнені поліноми булевої функції, серед яких обов'язково міститься мінімальний або декілька мінімальних. Якщо функція залежить від n аргументів, то в загальному випадку число доданків її поліноміального представлення рівне 2^n.

У роботі розроблена програма, яка дозволяє будувати узагальнені канонічні поліноми булевої функції та знаходити серед них мінімальні.

Література

1. *Горбатов В.А*. Фундаментальные основы дискретной математики/ А.В. Горбатов. – М: Наука, 2000. – 544 с.
2. *Шевелев Ю.П.* Дискретная математика. Ч.1: Теория множеств. Булева алгебра. Учебное пособие / Ю.П. Шевелев. – Томск:Символ, 2003. – 118 с.

РОЗРОБКА СУЧАСНИХ НАВЧАЛЬНО-КОНТРОЛЮЮЧИХ ЗАСОБІВ З ВИКОРИСТАННЯМ 3D ТЕХНОЛОГІЙ

Воробйова Інна Михайлівна

5 курс, спеціальність 113 «Прикладна математика»

На сучасному етапі формування інформаційного суспільства важлива роль приділяється розробці нових високо інформатизованих підходів і засобів навчання. Стрімкий технологічний розвиток призвів до появи нових освітніх інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема на базі засобів хмарних обчислень, мобільного навчання, сервісів соціальних мереж та ін. Завдяки чому змінюються і оптимізуються процеси накопичення і зберігання різного роду предметних електронних ресурсів, а також покращуються підходи у їх використанні [1, 2].

Неабиякої популярності набуває питання науково обґрунтованого визначення поняття віртуального освітнього середовища та конкретизації шляхів здійснення освітнього процесу на його основі. Одним з таких шляхів є створення і поширення загальнодоступної освітньої системи самонавчання на базі технологій віртуальної реальності. Такий підхід також може використовуватися як допоміжний елемент в рамках очного навчання у школах та університетах. Особливо корисними такого роду системи можу бути у військовій сфері та службах надзвичайних ситуацій в процесі підвищення кваліфікації їх працівників.

Сучасні технології віртуальної реальності і 3D-візуалізації слугують елементною базою для побудови нових поколінь мультимодальних людино-комп'ютерних інтерфейсів, які дозволяють створювати тренажери, симулятори, інтерактивні навчальні віртуальні середовища, віртуальні прототипи, цифрові планетарії та багато інших рішень для освіти, медицини, маркетингу та ін. Можливості використання 3D технологій розширюються дуже швидко з появою великої кількості обладнання, функціональні можливості якого стають все ширшими, а ціна все меншою. Таким чином стрімко розширюється діапазон потенційних користувачів.

Віртуальне середовище дозволяє створити ефект занурення, який є специфічною відмінністю від звичайних систем тривимірної графіки, які є широко доступними на персональних комп'ютерах. Таким чином, вчитель має значно більше можливостей для представлення навчального матеріалу і представити процес навчання у формі гри.

Найвідомішим редактором 3D-реальності є Unity. Його популярність зумовлена простим Drag & Drop інтерфейсом, підтримкою сценаріїв на мовах C # і JavaScript, можливістю моделювання фізичних властивостей твердих тіл і тканин та ін.

Метою моєї роботи є огляд існуючих навчальних систем на базі 3D технологій та розробка власної навчально-контролюючої системи.

Література

1. *Биков В.Ю.* Хмарні технології, ІКТ аутсорсинг і нові функції ІКТ підрозділів освітніх і наукових установ / В.Ю. Биков // Інформаційні технології в освіті. – 2011. – № 10. – С. 8-23.
2. *Биков В.Ю.* Засоби інформаційно-комунікаційних технологій єдиного інформаційного простору системи освіти України: монографія / В.В. Лапінський, А.Ю. Пилипчук, М.П. Шишкіна та ін.; за наук. ред. проф. В.Ю. Бикова. – К.:Педагогічна думка, 2010. – 160 с.
3. *Носов Н.А.* Словарь виртуальных терминов / Н.А. Носов // Тр. лаборатории виртуалистики. Вып. 7. – М.:Путь, 2000. – 80 с.

ДРОБОВИЙ БРОУНІВСЬКИЙ РУХ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Гангур Тетяна Володимирівна

4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

В останні роки можна простежити неабиякий інтерес до моделювання випадкових процесів з довгостроковою залежністю, зокрема дробового броунівського руху. Дробовий броунівський рух та його властивості застосовуються дослідниками в галузі теоретичної фізики, теорії ймовірностей, статистики, актуарної та фінансової математики, гідрології, біології та багатьох інших сферах.

Самоподібні випадкові процеси можна розглядати як процеси з траєкторіями, які зберігають ту ж загальну властивість незалежно від масштабу виміру або незалежно від відстані, з якою вони спостерігаються. Оцінка індексу самоподібності або параметра Хюрста має велике значення та інтерес у багатьох галузях науки і техніки.

Означення 1. [1] Нехай $W(t)$ – випадковий процес з неперервними траекторіями такий, що

(I) $W(t)$ – гауссівський;

(II) $W(0)=0$ майже напевне;

(III) $W(t)$ має незмінні прирости;

(IV) $E(W(t)-W(s))=0;$

$$Var\big(W(t)-W(s)\big)=\sigma^2|t-s|, \text{ де } \sigma^2=EW^2(t);$$

$$cov\big(W(t);W(s)\big)=\sigma^2 min(t,s)$$

тоді $W(t)$ називається ***броунівським рухом (вінерівським процесом).***

З незалежності приростів одержимо

$$cov\big(W(t);W(s)\big)=Var\big(W(s)-W(0)\big)=\sigma^2 min(t,s), t>s.$$

Означення 2. [1] ***Дробовим броунівським рухом (ДБР) з параметром Хюрста*** $H\in(0,1)$ називається гауссівський випадковий процес $\{W^H(t), t\in\mathbb{R}\}$ з нульовим середнім $EW^H(t)=0$ та коваріаційною функцією

$$R(t,s)=EW^H(t)W^H(s)=\frac{1}{2}(|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H}), t,s\in\mathbb{R}.$$

Теорема 1. [1] Нехай $\{W^H(t), t\in\mathbb{R}\}$ - ДБР з параметром Хюрста $H\in(0,1)$. Тоді

1) існують модифіковані процеси $\{B^H(t), t\in\mathbb{R}\}$, для яких траекторії процесу є неперервним з ймовірністю 1;

2) траекторії процесу W^H є ніде не диференційовні в L_2 – сенсі;

3) для будь-якого $0<\lambda<H$ *існує* $h>0$ і $c>0$ такі, що з ймовірністю 1

$$|W^H(t)-W^H(s)|<c|t-s|^{\lambda},\ 0\le t,s\le 1, |t-s|\le h;$$

4) має місце співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{2^n-1}\left|W^H\left(\frac{j+1}{2^n}T\right)-W^H\left(\frac{j}{2^n}T\right)\right|^p=\begin{cases}0, м.н. при\ pH>1\\ \infty, м.н. при\ pH<1\\ T, м.н. при\ pH=1\end{cases}.$$

Дробовий броунівський рух (ДБР) виникає природним чином при моделюванні багатьох різноманітних ситуацій. Наприклад,

- ширина послідовних річних кілець дерева;
- температура в певному місці залежно від часу;
- рівень води в річці в залежності від часу;
- символи сонячної активності залежно від часу;

– фінансові турбулентності, тобто емпірична мінливість запасу, і інші турбулентні явища;
– ціни на електроенергію на ринку.

У перших п'яти випадках відповідний ДБР має параметр Хюрста $H > \frac{1}{2}$, що означає що процес повторюється. У решті випадків, відповідний ДБР має параметр Хюрста $H < \frac{1}{2}$, що означає, що цей процес є антистійким.

Постановка задачі оцінювання. Нехай $\{B_H(t), t \in [0,1]\}$ – випадковий процес дробового броунівського руху з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією

$$EB_H(t)B_H(s) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}), t, s \in [0,1], H \in [0,1], \quad (1)$$

спостерігається в точках

$$\left\{\frac{k}{2^n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}, \frac{k+\frac{1}{4}}{2^n}, \frac{k+\frac{3}{4}}{2^n}, 0 \le k \le 2^n, n \ge 1\right\}.$$

За спостереженями $\{B_H(t), t \in [0,1]\}$ отримано сильно конзистентну оцінку параметра Хюрста H, застосовуючи метод бакстерівських сум.

Для випадкового процесу $B_H(t), t \in [0,1]$ введемо такі позначення:

$$B_{k,n}^{(2)} = B_H\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - 2B_H\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}\right) + B_H\left(\frac{k}{2^n}\right), B_{k,n}^{(4)} = B_H\left(\frac{k+1}{2^n}\right) -$$

$$-4B_H\left(\frac{k+\frac{1}{4}}{2^n}\right) + 6B_H\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}\right) - 4B_H\left(\frac{k+\frac{3}{4}}{2^n}\right) + B_H\left(\frac{k}{2^n}\right), 0 \le k \le 2^n - 1.$$

Розглянемо наступні послідовності бакстерівських сум [2]:

$$S_n^{(i)} = \sum_{k=0}^{2^n-1}\left(B_{k,n}^{(i)}\right)^2, \hat{S}_n^{(i)} = 2^{n(2H-1)}S_n^{(i)}, i = 2,4, \qquad n \ge 1.$$

Теорема 2. Нехай $\{B_H(t), t \in [0,1]\}$ – випадковий процес дробового броунівського руху з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (1). Тоді з ймовірністю одиниця

$$\frac{S_n^{(4)}}{S_n^{(2)}} = \frac{\hat{S}_n^{(4)}}{\hat{S}_n^{(2)}} \to \theta(H),$$

де

$$\theta(H) = \frac{56 - 8\cdot 3^{2H} - 28\cdot 2^{2H} - 4^{2H}}{(4-2^{2H})2^{2H}}, 0 < H < 1.$$

Функція $\theta(H)$ – неперервна і спадна на (0,1). Нехай $\varphi(\theta), \theta \in \left(-\infty, \frac{19}{3}\right)$ – функція, обернена до функції $\theta(H), H \in (0,1)$.

Теорема 3. Нехай $\{B_H(t), t \in [0,1]\}$ – випадковий процес дробового броунівського руху з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (1). Тоді статистика

$$\widehat{H}_n = \varphi(\widehat{\theta}_n),$$

де $\varphi(\widehat{\theta}_n) = \frac{\hat{S}_n^{(4)}}{\hat{S}_n^{(2)}}$, $n \ge 1$, є сильно конзистентною оцінкою параметра H.

Література

1. *B. L. S. Prakasa Rao.* Statistical Inference for Fractional Diffusion Processes / B. L. S. Prakasa Rao. – India:Department of Mathematics and Statistics, University of Hyderabad, 2010. – 263 p.
2. *Курченко О. О.* Одна сильно конзистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху / О. О. Курченко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002. – Вип. 67. – С. 88-96.

МЕТОД АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ

Ганзе Мирослав Олександрович

4 курс, напрям підготовки 6.040301 «Прикладна математика»

Метод аналізу ієрархій полягає в декомпозиції проблеми на більш прості складові частини і поетапному встановленні пріоритетів оцінюваних компонент з використанням парних (попарних) порівнянь [1].

На першому етапі виявляються найбільш важливі елементи проблеми. На другому – найкращий спосіб повірки спостережень, випробування та оцінки елементів. На третьому – здійснюється вироблення способу застосування рішення і оцінка його якості.

У найбільш простій ієрархії визначаються три рівні: верхній рівень мети (або цілей), середній – критерії, нижній – перелік альтернатив.

Ієрархія вважається повною, якщо кожен елемент заданого рівня функціонує як критерій для всіх елементів нижчого рівня. Ієрархія може бути розділена на підієрархії.

Між рівнями будуються матриці у такий спосіб: одна матриця для порівняння відносної важливості критеріїв по відношенню до мети і матриці для оцінки відносної значущості альтернатив щодо кожного з критеріїв другого рівня. Число матриць між рівнем критеріїв і альтернатив дорівнює числу критеріїв. Загальне число матриць дорівнює числу критеріїв плюс одна для оцінки критеріїв щодо мети.

У матрицях елементи нижчого рівня (альтернативи, варіанти) порівнюються попарно по відношенню до критеріїв, а критерії – по відношенню до мети. Ці оцінки, як правило, формуються за спеціальною шкалою від 1 до 9, в якій компонентам рівним по важливості ставиться у відповідність одиниця, при помірній перевазі – 3, при істотній перевазі – 5, значній перевазі – 7 і дуже сильній перевазі – 9.

Відносна важливість будь-якого елемента, порівнюваного із собою, дорівнює 1, тобто діагональ матриці складається з одиниць. При заповненні матриці використовується властивість зворотної симетрії: симетричні клітини заповнюються зворотними величинами.

Отримавши сукупність матриць, можна приймати рішення на основі їх змістовного аналізу. Проте, часто для цього використовують узагальнені оцінки альтернатив. Тут можна застосувати різні способи усереднення, такі як середньогеометричні усереднення і нормування отриманих узагальнених оцінок.

Література

1. *Саати Т. Л.* Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т.Л. Саати. – М.:Радио и связь, 1989. –316 с.

ТОЧНІСТЬ НАБЛИЖЕННЯ В ЦГТ ДЛЯ ПОСЛІДОВНОСТІ СЕРІЙ

Гечеї Олександр Олександрович

4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Головко Юдіта-Даніелла Іванівна

4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Один із результатів роботи [1] узагальнюється на випадок послідовності серій випадкових величин.

Нехай $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}$ — послідовність серій незалежних в кожній серії випадкових величин з математичним сподіванням $\mathrm{M}\xi_{nk} = 0$ і дисперсією $D\xi_{nk} = \sigma_{nk}^2 > 0$, $\sigma_n = min\{\sigma_{n1}, \dots, \sigma_{nn}\}$, $\sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk}^2 = 1$. $S_n = \xi_{n1} + \cdots + \xi_{nn}$, $F_{nk}(x)$ — функція розподілу ξ_{nk}, $\Phi_n(x) = P\{S_n < x\}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функція розподілу стандартного нормального закону.

Позначимо:

$$\vartheta_{nk}^0 = \int_{-\infty}^{\infty} |max(1, |x|^3)||dH_{nk}(x)| , \qquad H_{nk}(x) = F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right),$$

$$\vartheta_n^0 = max\{\vartheta_{n1}, \dots, \vartheta_{nn}\}.$$

Теорема 1. Існує стала C, що для всіх $n \geq 1$ справедлива нерівність

$$\sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq C \frac{\bar{\sigma}_n}{B_n} \bar{v}_n^{(0)}.$$

Будемо використовувати рівномірну метрику для характерстичних функцій, яка для двох характеристичних функцій $f(t)$ i $g(t)$ визначається рівністю:

$$\chi_0 = \sup_{t \in R} |f(t) - g(t)|$$

Позначимо $f_{nk}(t)$ — характеристичну функцію ξ_{nk}. Тоді характеристична функція випадкової величини S_n буде мати вигляд: $\varphi_n(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t)$. В даному випадку рівномірна метрика для характеристичних функцій буде мати вигляд:

$$\chi_{n0} = \sup_{t \in R} \left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right|.$$

Теорема 2. Нехай $c \in (0, \frac{1}{2})$, $\vartheta_n^0 \leq \sigma_n^3 c$. Тоді існує стала $C^{(2)}$, що

$$\chi_{n0} \leq C^{(2)} \frac{\vartheta_n^0}{\sigma_n^3} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Література

1. *Zolotarev V.M.* Exactness of an approximation in the central limit theorem / V.M. Zolotarev // Proceedings of the Second Japan – USSR Symposium on Probability Theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1973. – P. 531-543.

БІФУРКАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНИХ НЕТЕРОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Гобан Ольга Іванівна

6 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

Розглядається вироджена лінійна неоднорідна крайова задача з малим параметром:

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon A_1(t)x + f(t),\ \ t \in [a,b], \tag{1}$$

$$lx(\cdot) = \alpha + \varepsilon l_1 x,\ \ \alpha \in R^m, \tag{2}$$

де $A(t)$, $B(t), A_1(t)$ $-\ n \times n$ -вимірні матриці і $f(t)$ – n-вимірний вектор-стовпець; α – m-вимірний вектор-стовпець констант; l, l_1– лінійні векторні функціонали, визначені в просторі n-вимірних, неперервних на $[a,b]$ функцій: $l = \text{col}\,(l^1, l^2, \dots, l^m) : C[a,b] \to R^m$, $l^i, l_i^1 : C[a,b] \in \boldsymbol{R}$.

Досліджується критичний випадок – коли породжуюча крайова задача:

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), x(\cdot) = \alpha\ ,\ \ t \in [a,b], \tag{3}$$

одержана з (1), (2) при $\varepsilon = 0$, має розв'язок не при всіх неоднорідностях $f(t)$ з даного простору і $\alpha \in R^m$. Виникає питання, чи можливо за допомогою лінійних збурень привести крайову задачу (3) до розв'язності. А якщо можливо, то якими повинні бути компоненти матриці $A_1(t)$ в диференціальній системі (1) і векторний функціонал l_1 в крайовій умові (2), щоб крайова задача (1),(2) стала розв'язною при неоднорідностях $f(t) \in C^{q-1}[a,b]$, $\alpha \in R^m$, при яких породжуюча крайова задача (3) не має розв'язку.

Література

1. *Самойленко А.М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями/ А.М. Самойленко, М.І. Шкіль, В.П. Яковець. – К.:Вища школа, 2000. – 78 с.
2. *Бойчук О.А*. Біфуркація розв'язків/ О.А. Бойчук, Л.М. Шегда // Звичайні диференціальні рівняння. – 2011. – Т. 47, № 4. – С. 459-467.

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ БАГАТОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ПРО РАНЕЦЬ З БУЛЕВИМИ ЗМІННИМИ

Граков Андрій Андрійович

6 курс, спеціальність 8.04030101 «Прикладна математика»

Розглядається алгоритм наближеного розв'язання багатовимірної задачі про ранець з булевими змінними:
максимізувати

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, m, \qquad (2)$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = \overline{1,n}\ , \qquad (3)$$

де всі $c_j, a_{i,j}, b_i$ – цілі невід'ємні дійсні числа.

Алгоритм є конкретизацією методу відтинань наближеного розв'язання цілочислових задач лінійного програмування з довільними додатковими умовами [1]. Він полягає у послідовному розв'язанні методом відтинань допоміжних повністю цілочислових задач лінійного програмування. Спочатку методом відтинань розв'язується задача максимізації допоміжної цільової функції $\tilde{x}_0 = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j$ при умовах (2)-(3).

Якщо вона не має розв'язку, то і задача (1)-(3) нерозв'язна. В супротивному випадку одержимо розв'язок x^0 і переходимо до розв'язання задачі максимізації цільової функції $\tilde{x}_0$ при умовах (2)-(3) і додатковій умові

$$x_0 \ge x_0(x^r) + \varepsilon\ , \quad r \ge 0\ , \qquad (4)$$

де $\varepsilon > 0$ – максимально можливе відхилення (за значенням цільової функції) від точного розв'язку. Якщо задача максимізації цільової функції $\tilde{x}_0$ при умовах (2)-(3), (4) не має розв'язку, то x^r можна прийняти за наближений розв'язок задачі (1)-(3). В супротивному випадку одержимо розв'язок x^{r+1} і переходимо до розв'язання нової допоможної задачі. Таким чином, за скінченне число кроків буде одержано наближений розв'язок початкової задачі.

Для розв'язання допоміжних задач в роботі використовується алгоритм Дальтона і Ллевеліна, а в якості допоміжної функції $\tilde{x}_0$ вибирається змінна x_1. Так як $x_1 \in \{0,1\}$, то загальна кількість допоміжних задач порівняно невелика.

Отже, в алгоритмі будується лексикографічно спадна послідовність допустимих розв'язків, якій відповідає зростаюча послідовність значень цільової функції x_0. Подібна послідовність, але на інших ідеях і принципах, будується і в алгоритмі пошуку лексикографічно максимального розв'язку задачі (1)-(3). При цьому також використовується умова (4). Якщо задачу розв'язувати одночасно обома алгоритмами, то вони можуть обмінюватись інформацією про досягнуте найбільше значення цільової функції x_0 і відповідний йому розв'язок x^r.

Література

1. *Корбут А.А.* Дискретное программирование / А.А. Корбут, Ю.Ю. Фінкельштейн. – М: Наука, 1969. – 368 с.

ОСНОВНІ СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ БАГАТОФАКТОРНОГО РІВНЯННЯ РЕГРЕСІЇ

Гусар Корнелії Чабівни

4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Стандартна похибка оцінки за рівнянням множинної регресії визначається так само, як і для парного рівняння регресії. Спочатку знаходить непояснену дисперсію:

$$s^2_{0,1,2,\cdots k} \equiv \frac{\sum(x_0-\tilde{x}_0)^2}{n}, \quad (1)$$

де $\tilde{x}_0$ – теоретичне значення результуючої змінної, обчислене на основі множинного рівняння регресії.

Незміщена оцінка даної дисперсії дорівнює добутку зміщеної оцінки на відповідний коефіцієнт

$$\hat{s}^2_{0,1,2,\cdots k} \equiv s^2_{0,1,2,\cdots k}\frac{n}{n-(k+1)},$$

де k – число факторів у рівнянні множинної регресії.

Стандартна похибка оцінки за рівнянням визначається як квадратний корінь із непоясненої дисперсії:

$$s_{0,1,2,\cdots k} \equiv \sqrt{\frac{\sum(x_0-\tilde{x}_0)^2}{n}};\ \hat{s}_{0,1,2,\cdots k} \equiv \sqrt{\hat{s}^2_{0,1,2,\cdots k}}.$$

На практиці найчастіше використовується інша формула для обчислення стандартної похибки оцінки за рівнянням регресії [1]:

$$s^2_{0,1,2,\cdots k} \equiv \frac{\sum {x_0}^2 - b_0\sum x_0 - b_1\sum x_0x_1 - \cdots - b_k\sum x_0x_k}{n}.$$

Якщо відомі показники коваріації та дисперсії результуючої змінної, то формула (1) набуває вигляду

$$s^2_{0,1,2,\cdots k} = s^2_0 - b_1cov_{01} - b_2cov_{02} - \cdots - b_kcov_{0k}.$$

Економічна інтерпретація стандартної похибки оцінки для рівняння регресії така сама, як і для парного рівняння регресії. Величина $s_{0,1,2,\cdots k}$ характеризує варіацію фактичних даних навколо теоретичних (нормативних), одержаних на основ множинного рівняння регресі.

Ця величина виражається в тих самих одиницях, що й результуюча змінна. Якщо зв'язок між результуючою та факторними змінними є функціональним, то $s_{0,1,2,\cdots k} = 0$ якщо ж такий зв’язок відсутній, то $s_{0,1,2,\cdots k}$ приймає найбільші значення.

Гранична похибка $\Delta_{0,1,2,\cdots k}$ дорівнює добутку стандартної похибки на ймовірнісний коефіцієнт t_p:

$$\Delta_{0,1,2,\cdots k} = t_p s_{0,1,2,\cdots k.}$$

На основі граничної похибки визначають довірчі інтервали: нижню межу – як різницю між теоретичним значенням результуючої ознаки і граничною похибкою, верхню – як суму даних величин:

$$\tilde{x}_0 - \Delta_{0,1,2,\cdots k} \leq x_{0i} \leq \tilde{x}_0 + \Delta_{0,1,2,\cdots k}.$$

Література

1. *Ясинський В.К.* Статистичний аналіз / В.К. Ясинський, І.В. Малик. – Чернівці: Видавничий дім «Родовід», 2013. – 251 с.

ТОЧНІСТЬ ТА НАДІЙНІСТЬ ДЕЯКИХ МОДЕЛЕЙ ГАУССОВИХ ПРОЦЕСІВ З ОБМЕЖЕНИМ СПЕКТРОМ

Данило Микола Михайлович

4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Нехай $X = \{X(t), t \in \boldsymbol{R}\}$ гауссів стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес з обмеженим спектром. Оскільки випадковий процес X неперервний в середньому квадратичному, то коваріаційна функція $r(\tau)$, неперервна і має вигляд

$$r(\tau) = \boldsymbol{E}X(t+\tau) \cdot X(t) = \int_0^{\Lambda} \cos(\lambda\tau) dF(\lambda),$$

де $F(\lambda)$ – неперервна спектральна функція цього процесу.

Розглянемо процеси з неперервною спектральною функцією $F(\lambda)$. За модель процесу $X(t)$ візьмемо

$$X_\Lambda(t) = \sum_{k=0}^{M} [\eta_{k1} \cos(\varsigma_k t) + \eta_{k2} \sin(\varsigma_k t)],$$

де $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_M\}$ таке розбиття множини $[0; \Lambda]$, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_M = \Lambda$, η_{k1}, η_{k2}, ς_k – гауссові незалежні випадкові величини такі, що $\boldsymbol{E}\eta_{k1} = \boldsymbol{E}\eta_{k2} = 0$,

$$\boldsymbol{E}\eta_{k1}^2 = \boldsymbol{E}\eta_{k2}^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2, \qquad k = 0, \dots, M,$$

ς_k – випадкові величини, що приймають значння на відрізках $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ та мають такі функції розподілу:

$$P\{\varsigma_k < \lambda\} = F_k(\lambda) = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Очевидно, що $X_\Lambda(t)$ – центрований випадковий процес з коваріаційною функцією $r(\tau)$. Випадковий процес має зображення:

$$X(t) = \int_0^{\infty} \cos(\lambda t) d\eta_1(\lambda) + \int_0^{\infty} \sin(\lambda t) d\,\eta_2(\lambda),$$

де $\eta_1(\lambda)$ та $\eta_2(\lambda)$ незалежні центровані гауссові випадкові процеси з незалежними приростами. Побудована нами модель називається моделлю Михайлова [1].

Випадковий процес $X_\Lambda(t)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$ та точністю $\delta > 0$, якщо розбиття Λ таке, що має місце наступна нерівність

$$P\left\{\sup_{0 \le t \le T} |X(t) - X_\Lambda(t)| > \delta\right\} \le \alpha.$$

Якщо покласти $\lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\Lambda}{M}$, тоді отримаємо наступну оцінку [2]:

$$I(\varepsilon_0) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_0} \sqrt{\ln\left(\frac{TC}{2\varepsilon}\right)} d\varepsilon < \infty,$$

де $C = 2\frac{\Lambda}{M}(F(\Lambda))^{\frac{1}{2}}(1 + \Lambda T), \varepsilon_0 = \sup_{0 \le t \le T} \tau\big(X(t) - X_\Lambda(t)\big) = 2T\frac{\Lambda}{M}(F(\Lambda))^{\frac{1}{2}}$

Також було доведено, якщо розбиття Λ таке, що $\delta > 8I(\varepsilon_0)$, тоді виконується співвідношення

$$2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}\left(\delta-\sqrt{8\delta I(\varepsilon_0)}\right)^2\right\}\le\alpha.$$

(1)

Модель $X_\Lambda(t)$ буде наближатися до випадкового процесу $X(t)$ з надійністю $1-\alpha$, $0<\alpha<1$ та точністю $\delta>0$, в $C([0,T])$ якщо виконується співвідношення (1).

Використовуючи дане твердження, зробивши певні перетворення та оцінки отримаємо, що при всіх

$$M>\frac{T\Lambda\sqrt{F(\Lambda)}}{\delta}\left(2(1+\Lambda T)^{\frac{1}{4}}+\sqrt{4\sqrt{1+\Lambda T}+2\sqrt{2\ln\frac{2}{\alpha}}}\right)^2$$

випадковий процес $X_\Lambda(t)$ є моделлю Михайлова, що наближає процес $X(t)$ з заданою надійністю та точністю в $C([0,T])$.

Приклад 1. Для часткового випадку: $T=1$, $F(\Lambda)=1-e^{-\Lambda}$, з надійністю $1-\alpha=0.9$, та точністю $\delta=0.1$, при $\Lambda=20$, отримаємо $M=5522$, при $\Lambda=40$, отримаємо $M=14937$.

Приклад 2. Для часткового випадку: $T=1$, $F(\Lambda)=1-e^{-\Lambda}$, з надійністю $1-\alpha=0.99$, та точністю $\delta=0.01$, при $\Lambda=10$, отримаємо $M=21813$, при $\Lambda=20$, отримаємо $M=57232$.

Література

1. *Ермаков С.М.* Курс статистического моделирования / С.М. Ермаков, Г.А. Михайлов М.: Наука, 1982. – 289 с.
2. *Тегза А.М.* Про точність та надійність деяких моделей гауссових процесів з обмеженим спектром / А.М. Тегза // Наук. вісн. Ужгород. універ. – 2001. – Вип. 6. – С. 125-131.

ПРО ОДИН КЛАС МОНОТОННИХ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Динис Вадим Сергійович

4 курс, напрям підготовки 6.040301 «Прикладна математика»

У роботі розв'язується задача встановлення $\tilde{\alpha}-$монотонності булевих функцій і визначення потужності класу таких функцій.

Нехай $Z_2=\{0,1\}$, $Z_2^n=\{\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\setminus \alpha_i\in Z_2\}$- множина $n-$мірних булевих векторів. Кожен елемент $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in Z_2^n$ породжує відношення часткового порядку $\prec_{\tilde{\alpha}}$ на множині Z_2^n, яке в свою чергу дозволяє ввести в розгляд поняття $\tilde{\alpha}-$ монотонної функції двозначної логіки.

За означенням булева функція $f: Z_2^n\to Z_2$, де $n\geq 1$, називається $\tilde{\alpha}-$монотонною, якщо для довільних векторів $\tilde{\beta},\tilde{\delta}\in Z_2^n$ таких, що $\tilde{\beta}\prec_{\tilde{\alpha}}\tilde{\delta}$, виконується умова $f(\tilde{\beta})\leq f(\tilde{\delta})$.

Задача класифікації $\tilde{\alpha}-$монотонних булевих функцій є однією із задач теорії булевих функцій, яка має як теоретичне так і прикладне значення. Зокрема $\tilde{\alpha}-$монотонність булевої функції є достатньою умовою її однорідності [1].

Має місце наступна теорема [2]:

Теорема 1. Для того, щоб не рівна тотожно нулеві булева функція $f=(f_{0,}f_1,...,f_{2^n-1})^T$ була $\tilde{\alpha}-$монотонною, необхідно і досить, щоб $\alpha-$ва компонента вектора $f\circ\left(K_{\tilde{\alpha}}^{-1^T}\right)f$ дорівнювала одиниці, а всі інші – нулеві.

На основі цього критерію у роботі розроблена програма, яка дозволяє встановлювати $\tilde{\alpha}-$монотонності булевих функцій. Користувач задає кількість змінних, а також булеву функцію і вектор поляризації $\tilde{\alpha}$. Програма виводить повідомлення чи функція $\tilde{\alpha}-$монотонна і якщо так, то вектори поляризації і їхню кількість. На основі даних роботи програми отримуємо, що деякі функції не є $\tilde{\alpha}-$монотонними, а також що деякі із функцій є $\tilde{\alpha}-$монотонними для різних $\tilde{\alpha}-$. Наприклад, для функцій трьох змінних 88 функцій є $\tilde{\alpha}-$монотонними, зокрема 1 функція є $\tilde{\alpha}-$монотонною для чотирьох $\tilde{\alpha}$.

Література

1. *Мич І.А.* Застосування узагальнених кон'юнктивних перетворень в теорії бульових функцій / І.А. Мич, О.Т. Трофимлюк // Вісник державного університету «Львівська політехніка». Прикладна математика.– 1998. – № 337.– С. 47-49.
2. *Мич І.А.* Модифікований критерій $\tilde{\alpha}$-монотонності бульових функцій / І.А. Мич // Науковий вісник УжДУ. Сер. матем.– 1999. – № 4.– С. 118-129.

ОЦІНКА ЗБІЖНОСТІ ДО НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНУ З ВИКОРИСТАННЯМ ПСЕВДОМОМЕНТІВ

Дуб Христина Володимирівна

4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Нехай $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з $M\xi_i = 0, D\xi_i = \sigma^2 < \infty$, з функцією розподілу $F(x)$ і характеристичною функцією $f(t)$.

Позначимо через $P_n(x)$ щільність розподілу випадкової величини $\frac{\xi_1+\dots+\xi_n}{\sigma\sqrt{n}}$, $\varphi(x)$ і $\Phi(x)$ відповідно щільність і функція розподілу стандартного нормального закону. Розглянемо псевдомомент

$$v = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(1, |x|^3)\left|d\left(F(x\sigma) - \Phi(x)\right)\right|$$

і нехай характеристична функція $f(t)$ абсолютно інтегрована, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = A < +\infty \qquad (1)$$

Теорема 1. Нехай виконується умова (1). Якщо $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $n > 1$ і $0 < v \le c$, тоді

$$\sup_x |P_n(x) - \varphi(x)| \le \frac{v}{\sqrt{n}}\left(C^{(1)} + A\sigma C^{(2)}\right),$$

а при $v > c$

$$\sup_x |P_n(x) - \varphi(x)| \le \frac{v}{\sqrt{n}} C^{(3)} + A\frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi} b^{n-1},$$

де $C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}$ – деякі сталі, $b = \exp\left\{-\frac{\pi^2}{24A^2\left(2\sigma+\pi T_2^{-1}\right)^2}\right\}$, а $T_2 = \frac{c}{v}$.

Лема 1. Для всіх $t \in R$ має місце нерівність

$$\left|f\left(\frac{t}{\sigma}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \le v \min\left(1, \frac{|t|^3}{6}\right) \le \frac{t^2}{\sqrt[3]{36}} v.$$

Лема 2. Якщо $0 < v \le c$, $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, то при $|t| \le T_1 = \sqrt{-2\ln v}$,

$$\left|f\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right| \le e^{-C_1 t^2}, C_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{36}} > 0.$$

При $|t| > T_1$, $\left|f\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right| \le 2v$. Якщо $v > c$, то при $|t| \le T_2$,

$$\left|f\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right| \le e^{-C_2 t^2}, C_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{e}c}{6} > 0.$$

Література

1. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – М.:Наука, 1969. – 400 с.
2. *Zolotarev V.M.* Exactness of an apporoximation in the central limit theorem / V.M. Zolotarev // Lect. Notes in Math. – 1973. – Vol.330. – P. 531-543.

3. *Статулявичус В.А.* Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределения сумм независимых случайных величин. / В.А. Статулявичус // Теория вероятности. и её применения. – 1965. – Т. 10, № 4. – С. 645-659.

СТОХАСТИЧНИЙ ЛЕКСИКОГРАФІЧНИЙ ПОШУК В ЗАДАЧІ ПРО МАКСИМАЛЬНИЙ РОЗРІЗ ГРАФУ

Зейкан Андрій Петрович

6 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

Припустимо, що заданий неорієнтований граф $G = G(V, E)$ з множинами вершин V та ребер E. Кожному ребру $(i, j) \in E$ графу відповідає вага $w_{ij} > 0$. Розрізом графу G є розбиття (V_1, V_2) множини V його вершин на дві підмножини V_1 и V_2, що не перетинаються, так, що $i \in V_1$, $j \in V_2$. Очевидно, що довільне таке розбиття породжує розріз графу.

Розглядувана задача є NP- складною навіть у випадку, коли усі ребра мають одиничну вагу. Головною проблемою при її розв'язанні є експоненційне зростання обчислювальних витрат при збільшенні розмірності задачі. Тому при дослідженні цього класу задач для великих розмірностей ефективні тільки наближені методи.

Задачу про максимальний зважений розріз графу можливо записати у вигляді задачі булевого квадратичного програмування без обмежень (UBQP). Співставимо кожній вершині розбиття (V_1, V_2) графу G булеву змінну x_i. Якщо $i \in V_1$, тоді $x_i = 0$, в супротивному випадку $x_i = 1$, $i \in V_2$. Тоді задача прийме вигляд [1]:

$$\text{знайти} \max_{x_i \in \{0,1\}} \left\{ f(x) = \sum_{(i,j) \in E} w_{ij} \left(x_i - x_j \right)^2 \right\} \qquad (1)$$

Лексикографічне впорядкування [2], як повний порядок визначає однозначний напрямок руху (побудова лексикографічно монотонної послідовності розв'язків у задачі максимізації у даному лексикографічному порядку), у результаті якого можна досягти бажаного розв'язку задачі (1). Обираючи різні лексикографічні порядки, отримуємо різні початкові розв'язки з яких можемо розпочинати рух до шуканого розв'язку. Зрозуміло, що чим лексикографічно ближче по відношенню до оптимального розв'язку буде розташований початковий вектор тим швидше буде отриманий розв'язок задачі.

Нехай маємо t критеріїв для оцінки впливу координати j на оптимальний розв'язок задачі: $k_1(j), k_2(j), ..., k_t(j)$. Сформулюємо критерії так що б для деякого $q = 1, ..., t$ нерівність $k_q(j_1) > k_q(j_2)$ означала, що координата j_1 більш досліджена ніж j_2 і значення за цією координатою з більшою впевненістю можна зафіксувати. Визначимо значущість або важливість кожного критерію та впорядкуємо їх у порядку спадання їх значущості. В процесі роботи алгоритму лексикографічного пошуку після деяких його кроків будемо уточнювати значення критеріїв за кожною координатою розв'язку. Після завершення роботи алгоритму отримаємо набір значень критеріїв за кожною координатою розв'язку. Таким чином кожна координата розв'язку буде оцінюватись вектором k^j, $j = 1, ..., n$ значення координат якого є значення критеріїв, які впорядковані за важливістю. Впорядкуємо вектори k^j, $j = 1, ..., n$ у порядку лексикографічного спадання і в результаті отримаємо новий порядок або впорядкування змінних у якому знову почнемо роботу алгоритму лексикографічного пошуку.

Існуючі алгоритми лексикографічного пошуку призначені для пошуку оптимального, або близького до нього розв'язку в одному порядку. В [3] представлено стохастичний алгоритм лексикографічного пошуку, який дозволяє організувати роботу на скінченому наперед заданому лексикографічному інтервалі $\bar{x} \leq^L x \leq^L \tilde{x}$. Вибір значення $0 \leq s < n$ [3] при визначенні вектору $\bar{x}$ дозволяє визначати довжину такого лексикографічного інтервалу. Чим більше значення s тим менший лексикографічний інтервал $\bar{x} \leq^L x \leq^L \tilde{x}$ и тим швидше буде відбуватися робота алгоритму лексикографічного пошуку. З іншого боку збільшення значення s призводить до аналізу відносно не великого лексикографічного інтервалу алгоритмом лексикографічного пошуку, що знижує ефективність пошуку у даному порядку. Тому, виходячи з особливостей задачі, величина лексикографічного інтервалу $\bar{x} \leq^L x \leq^L \tilde{x}$ підбирається, як правило, експериментальним шляхом.

Література

1. *Сергиенко И.В*. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования / И.В. Сергиенко, В.П. Шило. – К.: Наукова думка, 2003. – 264 с.
2. *Чупов С.В*. Новые подходы к решению задач дискретного программирования на основе лексикографического поиска / С.В.Чупов // Кибернетика и систем. анализ. – 2016. – № 4.– С. 43–54.
3. *Чупов С.В.* Стохастичний алгоритм лексикографічного пошуку для задачі дискретного програмування / С.В. Чупов // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016.– Вип.28, № 1. – С. 150-159.

ПРО СИЛОВСЬКІ p-ПІДГРУПИ ГРУПИ $GL(n, R)$

Зубанич Оксана Василівна
4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»
Кирилюк Олександр Антонович
Доцент кафедри алгебри

Моя робота присвячена вивченню з точністю до спряженості силовських p-підгруп групи $GL(n, Z_p)$, де Z_p– кільце цілих раціональних p-адичних чисел.

Силовські p-підгрупи групи $GL(n, K)$, де K – алгебраїчно замкнуте поле, описав з точністю до спряженості Супруненко Д. О [1]. На випадок довільного поля K таке описання розповсюдив Вольвачов Р. Т. [2]. Проте при $p = 2$ в його описанні були виявлені помилки, які виправлені в працях [3, 4]. Питання ізоморфізма і спряженості силовських p-підгруп групи $GL(n, R)$, де R – область головних ідеалів, вивчали Гудивок П. М., Рудько В. П., Кирилюк О. А., Юрченко Н. В. та ін. (див. [5, 6]). У роботі [7] класифіковані неспряжені силовські p-підгрупи групи $GL(3, R_p)$ $(p > 2)$, де R_p – кільце цілих величин скінченного розширення F_p поля раціональних p-адичних чисел Q_p.

Доведено наступну теорему.

Теорема. *Нехай H_q – нетривіальна силовська q-підгрупа групи $GL(n, Z_p)$ і $1 \le n \le 2(p-1)$.*

1) *Нехай $p = 2$ і $n = 2$. Силовські q-підгрупи H_q групи $GL(n, Z_2)$, які існують тоді і тільки тоді, коли $q = 2, 3$, з точністю до спряженості вичерпуються групами*

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \text{ де } V_1 \cong D_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle; \quad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \text{ де } V_2 \cong C_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle.$$

2) *Нехай $p > 2$ і $q = 2$, $n > 2$. Представимо число n у вигляді*

$$n = a_0 + a_1 \cdot 2 + \cdots + a_s \cdot 2^s \quad (a_i = 0,1;\ a_s \neq 0;\ i = 1, 0, \ldots, s).$$

Будь-яка силовська 2-підгрупа групи $GL(n, Z_p)$ спряжена з групою $H_2 = diag[G_{2^0}, \ldots, G_{2^r}, \ldots]$, де $G_{2^0} = \{\pm 1\}$; $G_{2^r} = H \wr N_{2^{r-1}}$ при $r > 0$, яка трактується як підгрупа групи $GL(2^r, Z_p)$ і повторюється a_r разів $(r = 0, 1, \ldots, s)$, а H – одна з наступних груп:

а) $G_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ *при* $p \equiv 1 \pmod 4$; б) $G_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ *при* $p \equiv -1 \pmod 4$

(ξ – *первісний корінь степеня* 2^m *з* 1 *в полі* Q_p, $p - 1 = 2^m \cdot k$, $(k, 2) = 1$, $m > 0$, $\alpha = \xi + \xi^{-1}$; $N_{2^{r-1}}$ – *силовська* 2*-підгрупа симетричної групи* $S_{2^{r-1}}$).

Література

1. *Супруненко Д. Е.* Линейные p-группы / Д. Е. Супруненко // Докл. АН БССР. – 1960. – Т. 4, № 6. – С. 233-235.
2. *Вольвачов Р. Т.* p-подгруппы Силова полной линейной группы / Р. Т. Вольвачов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – Т. 27, № 5. – С. 1031-1054.
3. *Конюх В. С.* О линейных p-группах / В. С. Конюх // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1987. – № 1. – С. 3-8.
4. *Leedham-Green C. R.* Some remarks of Sylow subgroups linear groups / C. R. Leedham-Green, W. Plesken // Math. Z. – 1980. – 191. – P. 529-535.
5. *Гудивок П. М.* Силовские p-подгруппы полной линейной группы над дискретно нормированными кольцами / П. М. Гудивок, А. А. Кирилюк // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 5. – С. 326–329.

6. *Гудивок П. М.* О силовских p-подгруппах полной линейной группы над областями целостности / П. М. Гудивок, В. П. Рудько // Доп. НАН України. – 1995. – № 8. – С. 5-7.
7. *Кирилюк А. А.* Неприводимые силовские p-подгруппы группы $GL(3, \square_p)$ / А. А. Кирилюк // Наук. вісник Ужгород. Ун-ту. Сер. мат. і інформат. – 2002. – № 7. – С. 49-57.

МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ НУМЕРОЛОГІЇ

Ільницька Лілія Іллівна

2 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Нумерологія – давня наука про числа. Її нерідко називають магією чисел, насправді ж, ця наука набагато ближче до астрології, ніж до магії. Незважаючи на те, що нумерологія здобула велику популярність порівняно недавно, вона має досить давнє походження. Зараз неможливо точно встановити, коли саме зародилася нумерологія, з тієї причини, що в давнину такої окремої галузі знання не було.

В основі нумерології лежить наступний принцип: всі багаторозрядні числа можуть бути зведені до одиничних розрядів (простих чисел від 1 до 9), які відповідають певним характеристикам, що впливає на життя людини. Букви алфавіту можуть мати числове вираження через свій порядковий номер, тому кожне ім’я можна виразити через число і, тим самим, визначити характер і долю людини.

Нумерологія, як і астрологія допомагає визначити характер, природні обдарування, сильні і слабкі сторони, щоб передбачити майбутнє, відкрити найбільш підходящий час для прийняття рішень і для дій.

Найбільш важливим для людини є число народження, яке з моменту появи людини на світ закладає його характер, природні схильності. Виходить це число шляхом додавання числа, номера місяця й останніх цифр року народження (повне число дня народження). У нумерології за системою Піфагора визначаються риси характеру людини, її нахили та інтереси. Розрахунок проводиться за датою народження. Наприклад, число людини, яка народилася 28 січня 1998 року, буде:

$$2 + 8 + 1 + 1 + 9 + 9 + 8 = 38 = 3 + 8 = 11 = 1 + 1 = 2.$$

Метою проекту було ознайомлення з моделями визначення ступеня впливу дати народження на характер і долю людини. Для досягнення мети були вирішені поставлені завдання. Вивчаючи відповідну літературу, познайомилася з поняттям нумерологія і впливом числа на характер і долю людини. Навчилась визначати число народження або число долі.

Практична частина проекту полягала у створенні програми в середовищі Delphi, яка дозволяє визначити число народження і число долі людини за її датою народження та їх значеннями.

Література

1. *Садов А. И.* Знаменательные числа / А. И. Садов // Христианское чтение. − 1909. – № 12. С. 1581-1594.
2. *Шеппинг Д. О.* Символика чисел / *Д. О. Шеппинг*. – Воронеж, 1893. – 8 с.
3. *Уваров А. С.* Христианская символика. Ч. 1/ А. С. Уваров. – М. – 1908. – 212 с.
4. *Леон-Дюфура К.* Словарь Библейского богословия / К. Леон-Дюфура. – Брюссель: Жизнь с Богом, 1990. – 1230 с.

ДЕЯКІ МЕТОДИ КЛАСИФІКАЦІЇ ОБ'ЄКТІВ

Калабішка Василь Юрійович
6 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

В багатьох галузях науки і техніки гостро відчувається необхідність розв'язку задачі класифікації об'єктів. Розв'язок цієї задачі дасть змогу істотно розширити можливості ПК, отримати ключ до розв'язку багатьох задач пов'язаних з штучним інтелектом. Крім математиків, проблемами класифікації об'єктів цікавляться представники таких наук, як медицини, біології, геології, геофізики і т. д. Їхня увага до цих проблем обумовлена бажанням використовувати алгоритми розпізнавання для розв'язку так званих задач діагнозу та інтерпретації, задач класифікації об'єктів за непрямими даними.

Існує чимало різноманітних алгоритмів розв'язку цієї задачі, але жоден з них не дає бажаної якості розпізнавання. Головним недоліком цих методів є те, що вони добре працюють тільки для певного класу задач. Тому і надалі є актуальною задача створення нових алгоритмів класифікації об'єктів та модифікація існуючих.

Метою дипломної роботи є побудова програми, яка б реалізовувала деякі алгоритми класифікації об'єктів, їх модифікація, визначення найбільш ефективного алгоритму та пристосування цих алгоритмів для класифікації певних груп об'єктів, а також спроба використати алгоритми класифікації, як допоміжні у задачі розпізнавання образів. Робота складається з двох частин, висновків та списку літератури.

Під об'єктом надалі будемо розуміти деякий *n*-вимірний вектор з цілочисленими координатами, а під класом – деяку множину цих об'єктів.

Розглянемо відстань між об'єктами і групами об'єктів в просторі параметрів. У цьому методі будемо оперувати відстанню між об'єктами $a = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $b = (y_1, y_2, \dots, y_n)$:

$$(a, b) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \quad (1)$$

а також відстанню від об'єкту *a* до множини об'єктів $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$:

$$\mathrm{D(a, B)} = \frac{1}{\mathrm{N_b}} \sum_{\mathrm{i=1}} \mathrm{d(a, b_i)} \quad (2)$$

де N_B – число векторів віднесених до класу *B*.

Введемо аналогічно відстань між двома класами об'єктів *A* і *B*, за яку візьмемо середню суму відстаней, кожного об'єкта множини *A* до множини *B*, розділену на число об'єктів в множині *A*:

$$\mathrm{D(A, B)} = \frac{1}{\mathrm{N_A}} \sum_{i=1}^{N_A} D(a_i, B) \quad (3)$$

Ця відстань відповідає інтуїтивному уявленню про взаємну близькість двох груп об'єктів і перетворюється у відстань (2), якщо одна з груп містить всього один об'єкт, і в відстань (1), якщо обидві групи складаються з одного об'єкта кожна.

Існує два типи алгоритмів. Під час реалізації алгоритмів об'єктивної класифікації об'єкти можуть задаватися машині по-різному: послідовно, один за іншим, або паралельно. Відповідно можуть існувати алгоритми двох типів – алгоритми послідовної і алгоритми паралельної класифікації.

Алгоритми послідовної класифікації мають, принциповий недолік, який полягає у тому, що через випадковий порядок задання об'єктів алгоритми сильно "помиляються" на перших кроках. Тому для створення задовільного розбиття потрібна достатньо довга послідовність об'єктів. Алгоритми паралельної класифікації позбавлені цього недоліку.

Література

1. *Аркадьев А.Г.* Обучение машины классификации обьектов / А.Г. Аркадьев, Э.М. Браверман. – М.: Наука, 1971. – 192 с.
2. *Браверман Э.М.* Структурные методы обработки эмпирических данных. / Э.М. Браверман, И.Б. Мучник. – М.: Наука, 1983. – 464 с.

ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ТЕОРЕТИКО-ІГРОВИХ МЕТОДАХ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Койтюк Дмитро Васильович

3 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Робота присвячена розгляду теоретичних основ матричних ігор та зведенню матричної гри до задачі лінійного програмування.

Нехай задано матричну гру $m \times n$ з платіжною матрицею

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де i-й рядок відповідає A_i-й стратегії гравця A, j-й стовпець відповідає B_j-й стратегії гравця B.

Припустимо, що матриця H не містить сідлової точки, тому розв'язання гри представляється у змішаних стратегіях. Позначимо α і β відповідно нижню і верхню ціни гри, $x = (x_1,\dots,x_m)$, $x_i \ge 0$, $i = 1,\dots,m$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, – змішану стратегію першого гравця, $y = (y_1,\dots,y_n)$, $y_j \ge 0$, $j = 1,\dots,n$ $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, – змішану стратегію другого гравця.

Змішані стратегії x^*, y^* називають оптимальними, якщо вони задовільняють нерівність $M(x; y^*) \le M(x^*; y^*) \le M(x^*; y)$, де $M(x; y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j$.

Співвідношенням відшукання α і β можна поставити у відповідність еквівалентні їм задачі

$$\begin{aligned} &\max\{\alpha : M(x; y) \ge \alpha\}, \\ &\min\{\beta : M(x; y) \le \beta\}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Тоді для будь-якої чистої стратегії $y(j)$ ($y_j = 1$, $y_k = 0$, $k = 1,\dots,n$, $k \ne j$) гравця B виконується

$$M(x; y(j)) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i, \qquad (3)$$

а для будь-якої чистої стратегії $x(i)$ ($x_i = 1$, $x_k = 0$, $k = 1,\dots,m$, $k \ne i$) гравця A

$$M(x(i); y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \,. \tag{4}$$

Отже, враховуючи (3) - (4), (2) можна записати у такій формі

$$\max\{\alpha : M(x; y(j)) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq \alpha,\ j = \overline{1,n};\ x_i \geq 0, i = \overline{1,m};\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}, \tag{5}$$

$$\min\{\beta : M(x(i); y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq \beta, i = \overline{1,m};\ y_j \geq 0,\ j = \overline{1,n};\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}. \tag{6}$$

(5) і (6) є парою двоїстих задач лінійного програмування, а тому їх оптимальні значення повинні збігатися, тобто $\alpha_{onm} = \beta_{onm} = V$, де V - ціна гри (необхідне значення ефективності).

Для задачі (5) покладемо $t_i = x_i / V$ і $T = 1/V$, а для задачі (6) – $u_j = y_j / V$ і $Z = 1/V$. Тоді одержуємо, що відшукання оптимальної змішаної стратегії x_{onm} гравця *A* зводиться до розв'язання наступної задачі лінійного програмування:

мінімізувати функцію

$$T = t_1 + t_2 + \ldots + t_m \tag{7}$$

при умовах

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} t_i \geq 1,\ j = \overline{1,n};\ t_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}, \tag{8}$$

а оптимальна змішана стратегія y_{onm} гравця *B* є розв'язком задачі лінійного програмування вигляду:

максимізувати функцію

$$Z = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \tag{9}$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \geq 1,\ i = \overline{1,m};\ u_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Актуальність роботи полягає у тому, що серед задач математичного програмування найпростішими (і найкраще вивченими) є задачі лінійного програмування. Тому зведення матричної гри до задачі лінійного програмування значно полегшує знаходження оптимальної стратегії.

Література

1. *Вентцель Е. С.* Элементы теории игр / Е. С. Вентцель. – М.:Физматгиз, 1961. − 67 с.
2. *Зайченко Ю.П.* Дослідження операцій / Ю.П. Зайченко. – К.: ВІПОЛ, 2000. – 688 с.
3. *Радзієвська О. І.* Дослідження операцій/ О.І. Радзієвська, Н.Л. Кузьмінська, Ю.О. Васютинська. – К.:НУХТ, 2014. − 90 с.
4. *Таха Х. А.* Введение в исследование операций / Х. А. Таха. – М.: ВИЛЬЯМС, 2001. – 912 с.

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ ЗОБРАЖЕННЯ У ВИГЛЯДІ СТОХАСТИЧНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Копанишин Тетяна Володимирівна

6 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

Однією з актуальних задач теорії випадкових процесів є побудова математичної моделі випадкових процесів, дослідження її загальних властивостей. На сьогоднішній день інтенсивно розробляються різні методи стохастичного моделювання, зокрема, чисельного моделювання випадкових процесів, зростає також сфера застосування стохастичних моделей в різних областях природничих та соціальних наук, таких як метеорологія, радіотехніка, електроніка, соціологія, океанологія, фінансова математика, теорія масового обслуговування тощо.

Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ може бути зображений у вигляді ряду $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(t)$, який збігається у середньому квадратичному. Моделлю процесу X називатимемо суму $X_M = \{X_M(t), t \in T\}$, де

$$X_M(t) = \sum_{k=1}^{M} \xi_k f_k(t), \qquad (1)$$

Нехай випадковий процес X та всі X_M, $M = 1,2,\ldots$ належать певному функціональному банаховому простору $A(T)$ з нормою $\|\cdot\|$. Нехай задано два числа α та δ $(0 < \alpha < 1, \delta > 0)$. Говоритимемо, що модель X_M наближає X з надійністю $1-\alpha$ та точністю δ у нормі простору $A(T)$, якщо для цієї моделі
має місце нерівність

$$P\{\|X(t) - X_M(t)\| > \delta\} \le \alpha. \qquad (2)$$

Отже, для побудови моделі потрібно знайти такі M, для яких при заданих δ та α виконується нерівність (2). Нехай удається встановити нерівність $P\{\|X(t) - X_M(t)\| > \delta\} \le W_M(\delta)$, де $W_M(\delta), \delta > 0$ – відома функція, що монотонно спадає за M та δ. Якщо M таке число, що $W_M(\delta) \le \alpha$, то для моделей $X_{M'}$, де $M' \ge M$ виконується нерівність (2).

Тобто для побудови моделі X_M, що наближає X з надійністю $1-\alpha$ та точністю δ у нормі простору $A(T)$, досить знайти M (бажано найменше), для якого виконується нерівність $W_M(\delta) \le \alpha$.

Якщо в моделі (1) $\xi_k, k = 1,\ldots,M$ – некорельовані строго субгауссові випадкові величини з $E\xi_k = 0$, та $E\xi_k^2 = \sigma_k^2$, $k = 1,2,..M$, то моделювання $\xi_k, k = 1,\ldots,M$ зводиться до побудови M незалежних строго субгауссових величин з $E\eta_k = 0$, $E\eta_k^2 = 1$, $k = 1,2,\ldots,M$. Тоді $\xi_k = \sigma_k \eta_k$, $k = 1,2,\ldots,M$, буде необхідною послідовністю.

Література:

1. *Гихман И.И.* Теория случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход – М.:Наука. – 1971. – 664 с.

2. *Козаченко Ю.В.* Моделювання випадкових процесів / Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко – К.: Видавничий центр «Київський університет», 1999. – 224 с.
3. *Ядренко М.И.* Спектральная теория случайных полей / М.И. Ядренко. – К.: Высш. шк., 1980. – 207 с.

МОДЕЛІ І МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ РЯДІВ В НЕЧІТКО ЗАДАНИХ МНОЖИНАХ

Копинець Василь Васильович

5 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

Будь-яка діяльність людини пов’язана з обробкою інформації. В процесі прийняття рішень доводиться аналізувати значні масиви даних, які одержані на попередніх етапах. При цьому від якості обробки цієї інформації безпосередньо залежить і якість прийнятого рішення. Тому на даний момент розроблено багато різноманітних систем підтримки прийняття рішень, які покликані спростити процес обробки великих масивів даних. Особливо важливими такого роду системи є в економічній і соціальній сфері, де кількість факторів, які можуть впливати на об’єкт дослідження, є дуже великими.

Як правило, такий аналіз даних проводять з метою одержання прогнозу стосовно параметрів досліджуваного процесу. При цьому параметри можуть описуватися як за допомогою чітких, так і за допомогою нечітких величин. Наявність нечітких величин значно ускладнює процес аналізу і вимагає більших обчислювальних ресурсів.

У роботі досліджується проблема прогнозування динамічних рядів, як у випадку чітких, так і у випадку нечітких даних. Для їх аналізу використовуються модифікації відомих методів: методів ковзаючих середніх, зважених середніх та ін.[1,2]. Досліджуються нові класи різницевих, дробових та ірраціональних алгоритмів, які утворені суперпозицією елементарних алгоритмів.

Дуже часто необхідно приймати рішення маючи суперечливі дані, що обумовлено присутністю певного рівня «шуму». Для подолання цієї проблеми використовуються інтервальні нечіткі множини, коли в якості значень функцій належності виступає не число, а інтервал. Це дозволяє розширити можливість опису предметної галузі.

Література

1. *Грабовецкий Б.Є.* Основи економічного прогнозування / Б.Є. Грабовецкий. – Вінниця: ВФ ТАНГ, 2000. – 188 с.
2. *Зенкін А.И.* Про математичні методи прогнозування / А.И. Зенкін, – М., 1990. – 120 с.
3. *Гаркуша Н.М.*. Моделі та методи прийняття рішень в аналізі та аудиті / Н.М. Гаркуша, О.В. Цуканова, О.О. Горошанська. – К.:Знання, 2012. – 583 с.
4. *Присенко Г.В.* Прогнозування соціально-економічних процесів/ Г.В. Присенко, Є.І. Равікович. – К.:КНЕУ, 2005. – 382 с.

СТОХАСТИЧНИЙ ЛЕКСИКОГРАФІЧНИЙ ПОШУК ДЛЯ ЗАДАЧ ПОКРИТТЯ ТА УПАКОВКИ СКІНЧЕННОЇ МНОЖИНИ

Кузьма Олександра Омелянівна

6 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

Математична модель задачі про упаковку:
максимізувати

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max, \tag{1}$$

за умов

$$x \in X_1^D, \tag{2}$$

де $X_1^D = \left\{ x \in B^n \middle| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1, i = 1,...,m \right\}$.

Математична модель задачі про покриття:
мінімізувати

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min, \tag{3}$$

за умов

$$x \in X_2^D, \tag{4}$$

де $X_2^D = \left\{ x \in B^n \middle| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge 1, i = 1,...,m \right\}$.

$a_{ij} \in \{0,1\}$, $c_j > 0$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$, $B^n = \{0,1\}^n$ – множина усіх булевих векторів розмірності *n*.

Використання точних алгоритмів лексикографічного пошуку для задач (1), (2) та (3), (4) у яких кількість змінних та обмежень велика, виявляється мало ефективним в розумінні часу роботи алгоритму. Для підвищення ефективності процесу пошуку варто використовувати наближені або стохастичні алгоритми. Але при їх використанні певна частина допустимих розв'язків може пропускатися, в тому числі може бути пропущений і оптимальний.

В роботі використовуються нові підходи до лексикографічного пошуку розв'язку задач (1), (2) та (3), (4), які використовують алгоритми стохастичного лексикографічного пошуку лексикографічних екстремумів множин для виявлення кращих розв'язків на обмежених лексикографічних проміжках. Перший спосіб використовує розбиття лексикографічного інтервалу $x^{lmin} \le^L x \le^L x^{lmax}$, де x^{lmin} та x^{lmax} – лексикографічний мінімум та максимум множини $X_k^D, k = 1,2$ відповідно, на окремі лексикографічні проміжки. Другий спосіб використовує той факт, що для задач (1), (2) та (3), (4) існує такий лексикографічний порядок (впорядкування змінних задачі) у якому x^{lmin} або x^{lmax} є і оптимальним розв'язком відповідної задачі. Визначаючи, певним чином, лексикографічні порядки, можемо потрапити на такий порядок *order* у якому лексикографічний проміжок $\bar{x} \le^L x \le^L x_{order}^{lmax}$ для задачі (1), (2), або $x_{order}^{lmin} \le^L x \le^L \bar{x}$ для задачі (3), (4) буде містити шуканий розв'язок, де $\bar{x}$ – нижня або верхня лексикографічна межа пошуку. Оскільки лексикографічні інтервали, що будуються на основі

цих підходів як правило не перетинаються, виникає можливість в одночасному або паралельному аналізі декількох інтервалів.

Література

1. *Сергиенко И.В*. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования / И.В. Сергиенко, В.П. Шило. – К.:Наукова думка, 2003. – 264 с.
2. *Чупов С.В*. Новые подходы к решению задач дискретного программирования на основе лексикографического поиска / С.В. Чупов // Кибернетика и систем. анализ. – 2016. – № 4. – С. 43-54.
3. *Чупов С.В.* Структурні та стохастичні властивості алгоритму лексикографічного пошуку розв‘язку задачі дискретної оптимізації / С.В. Чупов // Компьютерная математика. – К.:Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, 2016.– № 1.– С. 155-164.
4. *Чупов С.В.* Стохастичний алгоритм лексикографічного пошуку для задачі дискретного програмування / С.В. Чупов // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016.– Вип. 28, № 1. – С. 150-159.

МОДЕЛЮВАННЯ ЛОГІСТИЧНОЇ СТРАТЕГІЇ ПІДПРИЄМСТВА

Курта Наталія Віталіївна

4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Можна із впевненістю стверджувати, що пріоритетні напрями стратегічного управління насамперед стосуються сфери логістики, тобто сфери просторово-часової трансформації товарів, послуг, людей, капіталу, інформації.

Логістичні стратегії – подібно як і інші функціональні стратегії (наприклад, маркетингові стратегії) взаємопов'язані із конкурентними стратегіями, які насамперед можна трактувати як такі, що безпосередньо розвивають стратегії конкуренції.

Логістичне стратегічне управління застосовується з метою мінімізації витрат логістичних каналів та забезпечення високої конкурентоспроможності. Жорсткі умови конкурентної боротьби вимагають від підприємств застосування нових підходів до планування та управління рухом товарних потоків від виробника готової продукції до споживача, впровадження логістичних стратегій, заснованих на принципах логістики, а зростання їх значимості в забезпеченні конкурентоспроможності підприємств зумовлює необхідність оптимізації їх вибору підприємствами. Отже, вибір логістичних посередників є основною та невід'ємною частиною логістичної стратегії [3].

Вибір логістичних посередників полягає в тому, що в сучасних умовах на ринку автотранспортних послуг функціонує велика кількість посередників і серед цього розмаїття споживач повинен вибрати собі надійного партнера для реалізації його логістичної стратегії.

В основу експертного (однокритеріального) методу поставлені оцінки спеціалістів-експертів для параметрів, які характеризують логістичних посередників, і описані процедури отримання інтегральних експертних оцінок (рейтенгів).

Багатокритеріальним може бути вибір способу перевезення, виду транспорту, маршруту, наприклад, по критеріям затрат, часу, ризику; вибір логістичного посередника, наприклад, по критеріям вартості послуг, якості, часу виконання робіт тощо.

Перелік потенційних постачальників аналізується за спеціальними критеріями, які дозволяють здійснити відбір прийнятних постачальників. Критерії оцінки і відбору генераторів матеріальних потоків залежать від вимог споживаючої логістичної системи і можуть бути різними:

- ціна продукції;
- надійність постачання;
- якість продукції;
- терміни виконання замовлень;
- репутація в своїй галузі;
- оформлення товару;
- фінансове становище постачальника, його кредитоспроможність та ін [4].

Підприємство визначає для себе найбільш значимі критерії залежно від специфіки своєї діяльності.

На основі заданих даних за допомогою різних критеріїв, знайти оптимальний варіант вибору логістичного посередника.

Вибір моделі рішення багатокритеріальної задачі залежить від того, наскільки рівна важливість критеріїв, в відповідності з якими робиться вибір. Використовуючи вагові коефіцієнти критеріїв, багатокритеріальну задачу вибору постачальника було розв'язано:

- методом адитивного згортання за формулою:

$$q(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j q_j(x) \to max, \quad x \in D, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j = 1, \quad a_j > 0,$$

де a_j – ваговий коефіцієнт для j-го критерія;

- методом рівномірної оптимальності за формулою :

$$q(x) = \sum_{j=1}^{n} q_j(x) \to max, \quad x \in D;$$

- методом мультиплікативного згортання:

$$q(x) = \prod_{j=1}^{n} q_j(x) \to max, \quad x \in D;$$

- методом мінімаксного згортання:

$$max_j\left[maxq_j(x) - q_j(x)\right] \to min;$$

на основі яких було вибрано постачальника [3].

Отже, логістичні стратегії є доволі важливою рушійною силою для досягнення стратегічних цілей підприємства, для підтримання конкурентоспроможності підприємства на ринку. Вони пов'язуються з іншими функціональними стратегіями, а також охоплюють усі сфери діяльності (постачання, виробництво тощо). За правильного застосування логістичних стратегій спостерігається зниження загальних витрат та підвищення рівня обслуговування клієнта, тобто збільшується ефективність діяльності та досягнення цілей підприємства, а саме: з'являються перспективи розвитку та росту діяльності підприємства.

Література

1. *Бауэрсокс Д. Дж.* Логистика: интегрированная цепь поставок / Д. Дж. Бауэрсокс. – М.: Олимп-Бизнес, 2001. – 640 с.
2. *Гаджинский А.М.* Логистика: Учебник для высших и средних учебных заведений / А.М. Гаджинский. – М.:ИВЦ «Маркетинг», 2000. – 375 с.
3. *Лукинский В. С.* Модели и методы теории логистики: Учебное пособие / В.С. Лукинский. – СПб.: Питер, 2008. – 448 с.

ЗАСТОСУВАННЯ $\boldsymbol{ARMA}$ ПРОЦЕСІВ

Лешко Каміла Володимирівна

4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Розглядаються моделі часових рядів, основною ознакою яких є наявність випадкового складника з різними властивостями. Для стаціонарних часових рядів випадковий складник будується з допомогою такого часового ряду, який прийнято називати білим шумом. Білим шумом будемо називати послідовність $\{\varepsilon_t\}\big(t \in (-\infty, +\infty)\big)$ незалежних (принаймні некорельованих) однаково розподілених випадкових величин, що мають моменти до другого порядку включно.

Процеси білого шуму є цеглинами для побудови більш складних моделей часових рядів.

Наприклад: процес $\{y_t\}$ рухомого середнього порядку q (MA(q)), будується за допомогою білого шуму $\{\varepsilon_t\}$ за рівнянням :

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q},$$

де $\mu, \theta_1, \ldots, \theta_q$ – деякі сталі.

Розвиток процесів авторегресії пов'язаний з необхідністю аналізу моделей, у яких одна змінна залежить від своїх попередніх значень. Побудова звичайних лінійних регресій не могла дати повне уявлення про напрями розвитку таких часових рядів. Внаслідок цього були запроваджені процеси авторегресії.

Також розглядаються мішані моделі авторегресії, векторна авторегресійна модель.

Окремий розділ присвячений вивченню властивостей $ARMA$ процесів. Розглядаються їх умови стаціонарності та підсумування.

Після вивчення властивостей AR(p)- та MA(q)-процесів є природнім розробити сумісний процес. Таким процесом є ARMA(p, q), який являє собою суму цих двох процесів. Особливістю цього процесу є те, що y_t залежить і від своїх попередніх значень і від збурень минулих періодів.

Оцінка моделі. Розглядується застосування методу максимальної правдоподібності, який дозволяє отримувати оцінки коефіцієнтів для будь-якої моделі ARMA-процесу

Література

1. *Оліскевич М.О.* Основи економетрії часових рядів: навчальний посібник / М.О. Оліскевич. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2008. – 321 с.

РОЗРОБКА ІНФОРМАЦІЙНОГО РЕСУРСУ НА САЙТІ ЕЛЕКТРОННОГО НАВЧАННЯ ДВНЗ «УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ» ДЛЯ ТЕСТУВАННЯ З АЛГЕБРИ УЧНІВ 9-Х КЛАСІВ ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ ШКІЛ

Мічак Людмила Володимирівна

4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Інформатизація освіти – один з напрямків процесу інформатизації сучасного суспільства, процес дослідження та забезпечення сфери освіти методологією та практикою розробки та оптимального використання сучасних (нових) інформаційних технологій, орієнтованих на реалізацію психолого-педагогічних цілей навчання.

З кінця XX ст. досить актуальною темою цих досліджень стало електронне навчання, яке набуває швидкого поширення.

Електронне навчання представляє собою нову організацію освіти, що ґрунтується на використанні як кращих традиційних методів отримання знань, так і нових інформаційних та телекомунікаційних технологій, а також на принципах самоосвіти. Воно призначене для широких верств населення незалежно від місця проживання, стану здоров'я.

Переваги: гнучкість, актуальність, зручність, модульність, економічна ефективність, інтерактивність, відсутність географічних кордонів для перевірки та закріплення знань.

Державна підсумкова атестація (ДПА) з математики стала невід'ємним атрибутом закінчення навчального процесу в основній школі.

Кожен варіант ДПА складається з трьох частин. Ці частини відрізняються за формою тестових завдань і за рівнем їх складності, відповідно до рівнів навчальних досягнень учнів з математики.

На сайті електронного навчання ДВНЗ «Ужгородського Національного університету», в системі Moodle [2] було створено електронний курс по першій (тестовій) частині ДПА для учнів 9-х класів. Завдання були взяті з збірника [1].

У першій частині пропонується 12 завдань з вибором однієї правильної відповіді. Для кожного завдання наведено чотири можливі варіанти відповіді, з яких тільки одна є правильною. Створена база завдань з 50 варіантів по 12 завдань в кожному. Завдання можна групувати, перетасовувати.

Дуже зручно використовувати цей ресурс при підготовці до ДПА, ЗНО, самоперевірці, закріпленні знань. Учні можуть проходити тести в будь-який зручний для них час, зареєструватися під будь-яким ніком, що забезпечує анонімність. Ще один плюс у об'єктивній оцінці відповідей учнів. При завершенні тестування видно які відповіді були правильні, а які ні.

Література

1. *Мерзляк А. Г.* Збірник завдань. Математика 9 клас. Державна підсумкова атестація. / А.Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2016. – 156 с.
2. Електронний ресурс: http://e-learn.uzhnu.edu.ua/.

ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОСТІ РОЗПОДІЛІВ СУМ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Марушка Мирослава Володимирівна

6 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

У даній роботі здійснюється оцінка швидкості збіжності послідовності характеристичних функцій двовимірного випадкового вектора до характеристичної функції двовимірного нормального закону. А саме уточнюється теорема 1 із [1], з використанням допоміжної леми 1.

Нехай $(\xi_i, \eta_j), j = 1,2, \ldots$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових векторів з законом розподілу $\mathrm{F(x,y)}$, характеристичною функцією $f(s,t)$ та $M\xi_j = M\eta_j = 0,\ M{\xi_j}^2 = M{\eta_j}^2 = 1$. Позначимо через $\Phi(x,y)$ функцію розподілу двовимірного нормального закону з тими ж моментами першого і другого порядку. Відповідна йому характеристична функція має вигляд $g(s,t) = e^{-\frac{1}{2}(s^2+2rst+t^2)}$, де r – коефіцієнт кореляції $(\xi_i, \eta_j), r \neq \pm 1$. Функцію розподілу випадкового вектора $\left(\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{\sqrt{n}}, \frac{\eta_1+\cdots+\eta_n}{\sqrt{n}}\right)$ позначимо через $F_n(x,y)$, а відповідну характеристичну функцію – $\varphi_n(s,t)$.

Для довільного $B > 0$ введемо псевдомоменти

$$\kappa_{01}(B) = \iint\limits_{\substack{(x,y):\\ x^2+y^2 \le B}} \max\left(1, (|x|+|y|)^3\right) d\Psi(x,y),$$

$$\kappa_{02}(B) = \iint\limits_{\substack{(x,y):\\ x^2+y^2 > B}} \max\left(1, (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right) d\Psi(x,y),$$

де $\Psi(x,y) = F(x,y) - \Phi(x,y)$.

Позначимо через $\kappa = \kappa(B) = \max\left(\kappa_{01}(B), \kappa_{02}(B)\right)$.

Нехай $\rho_n = \sup_{s,t}|\varphi_n(s,t) - g(s,t)|$.

Теорема 1. Нехай $c \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$ – довільна стала. Тоді при $n \ge 1$

$$\rho_n \le \inf_{B>0}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\kappa_{01}(B)C^{(1)}}{(1-|r|)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\kappa_{02}(B)C^{(2)}}{1-|r|} + \delta \sup_{\substack{(s,t):\\ \sqrt{s^2+t^2} > \frac{c(1-|r|)^2}{\kappa}}} |f(s,t)|^n\right),$$

де $C^{(i)}$ – сталі, що залежать тільки від c, а $\delta = \begin{cases} 0, \nu \le c(1-|r|)^2, \\ 1, \nu > c(1-|r|)^2 \end{cases}$

Лема 1. Для довільних значень s, t виконуються оцінки:

$$\omega(\mathrm{s,t}) = \left|\mathrm{f(s,t)\text{-}g(s,t)}\right| \le \min\left\{\kappa_{01}(\mathrm{B}) + \kappa_{02}(\mathrm{B}); \frac{(\mathrm{s}^2+\mathrm{t}^2)^{\frac{3}{2}}}{6}\kappa_{01}(\mathrm{B}) + +(\mathrm{s}^2 + \mathrm{t}^2)\kappa_{02}(\mathrm{B}); \frac{\mathrm{s}^2+\mathrm{t}^2}{2}\left(\kappa_{01}(\mathrm{B}) + \kappa_{02}(\mathrm{B})\right)\right\}$$

Література

1. *Боярищева Т.В.* Оцінка швидкості збіжності до двовимірного нормального закону в рівномірній метриці для характеристичних функцій / Т.В. Боярищева // Наук. вісн. Ужгор. універ.: Математика і інформатика. – 2010. – Вип. 20. – С. 13-18.

ДОСЛІДЖЕННЯ ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ТОПОЛОГІЧНИХ ІНДЕКСІВ

Мауріц Олександра Тіберіївна

6 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

Розглянемо нелінійну двоточкову крайову задачу з нелінійними граничними умовами наступного вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = f\big(t, x(t)\big), t \in [o, T], x, f \in R^n, \quad (1)$$

$$g\big(x(0), x(T)\big) = 0 \quad (2)$$

де $f: [0, T] \times D \to R^n$ і $g: D \times D \to R^n (n \geq 2)$ неперервні, а множина $D \subset R^n$ замкнена обмежена область.

Задача полягає у відшуканні розв'язку крайової задачі (1), (2) у класі неперервно диференційовних функцій $x: [0, T] \times D$.

Для дослідження вихідної задачі (1), (2) встановлюється обґрунтування загальної схеми чисельно-аналітичного методу та встановлення існування та єдиності розв'язку крайової задачі (1), (2) за допомогою топологічного індексу Брауера.

Література

1. *Самойленко А. М.* Чисельно-аналитичиские методы иследования решений краевых задач / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто. – Киев: Наук. думка, 1986. – 224 с.
2. *Ронто М. Й.* Про параметризацію крайових задач з нелінійними граничними умовами/ М.Й. Ронто., К.В. Маринець // Нелінійні коливання. – 2011. – Том 14, № 3. – С. 359-391.

МОДЕЛІ ТЕОРІЇ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Махлинець Наталія Андріївна

4 курс, напрям підготовки 6.040201 « Математика»

Проблема управління запасами є однією з найбільш важливих в організаційному управлінні. Запаси різного роду матеріальних цінностей виникають майже у всіх ланках системи виробництва – розподілу – споживання. Під запасом мається на увазі не тільки наявність деякого товару чи продукції на складі, а й виробничі, транспортні, трудові, інформаційні, водні ресурси, фінансовий капітал і т. д .Тому моделі управління запасами описують широке коло завдань оптимального планування виробничих, транспортних, інформаційних, фінансових, енергетичних та інших систем [1].

Як у бізнесі, так й у виробництві звичайно прийнято підтримувати розумний запас матеріальних ресурсів або комплектуючих для забезпечення безперервності виробничого процесу. Традиційно запас розглядається як неминучі витрати, коли занадто низький рівень запасу призводить до дорогоцінних зупинок виробництва, а занадто високий до „омертвіння" капіталу. Задача управління запасами визначає рівень запасу, який урівноважує два розглянутих граничних випадки. Важливим фактором, який визначає формулювання та розв'язання задачі управління запасами, є те, що об'єм попиту на запас, який зберігається (в одиницю часу) може бути або детермінованим (достовірно відомим), або стохастичним (описаним імовірнісним розподілом) [3].

Сучасна теорія дозволяє оптимально управляти як детермінованими, так і стохастичними системами управління запасами. Однак , детерміновані моделі не враховують апріорну невизначеність (в попиті, поставках, часі затримок і т. д.), властиву реальним системам управління запасами. Імовірнісні – вимагають точного задання імовірності). При цьому, у багатьох випадках немає підстави або недостатньо інформації, щоб розглядати фактори невизначеності як випадкові (тобто адекватно описуваними теоретико-імовірнісними моделями), що робить неефективним застосування таких моделей при вирішенні практичних завдань. Складність отримання чисельних результатів при роботі з випадковими величинами також знижує практичну цінність стохастичних моделей управління запасами [2].

Природа задачі управління запасами визначається неодноразовим розміщенням та отриманням замовлень заданих об'ємів продукції (у по-дальшому – запаси, які зберігаються) у певні моменти часу. З цієї точки зору стратегія управління запасами повинна давати відповідь на наступні два питання:

1. Яку кількість запасу, який зберігається, замовляти?
2. Коли замовляти?

Відповідь на перше питання визначає економічний розмір замовлення шляхом мінімізації наступної функції витрат:

$$\begin{pmatrix}\text{Сумарні витрати системи}\\ \text{управління запасами}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Витрати на}\\ \text{придбання}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Організаційні}\\ \text{витрати}\end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix}\text{Вирати на}\\ \text{зберігання запасу}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Втрати від}\\ \text{дефіцитут запасу}\end{pmatrix}$$

Всі ці вартості повинні бути виражені як функції шуканого об'єму замовлення та інтервалу часу між замовленнями.

Відповідь на друге питання (коли замовляти?) залежить від типу системи управління запасами, яка розглядається. Якщо система передбачає періодичний контроль стану запасу, момент надходження нового замовлення співпадає з початком періоду. Якщо ж в системі передбачений неперервний контроль стану запасу, нові замовлення розміщуються тоді, коли

рівень запасу опускається до заздалегідь визначеного значення, яке називається точкою поновлення замовлення [1].

Моделі управління запасами охоплюють два типи детермінованих моделей: статичні та динамічні. В статичних моделях розглядаються ситуації, коли об'єм попиту на продукцію, яка зберігається (запас), є сталим у часі. В динамічних моделях об'єм попиту є функцією часу.

Найпростіші моделі управління запасами характеризуються сталим у часі попитом, миттєвим поповненням запасу та відсутністю дефіциту.

Модель управління запасами виникає, коли потрібно визначити оптимальну кількість продукції, яку необхідно замовити, та терміни розміщення замовлень. З одного боку, при надмірному запасі потрібні більш високі капіталовкладення, але рідше виникає дефіцит. З іншого боку, при недостатньому запасі капіталовкладення зменшуються, але частота розміщення замовлень та ризик дефіциту зростають [2].

Література

1. *Гузія М.М.* Дослідження операцій/ М.М. Гузій, В.Є. Березовський, В.М. Дякон, Л.Є. Ковальов, М.О. Медведєва. – К.: Наук. думка, 2003. – 238 с.
2. *Маноха Л.Ю.* Моделювання систем: конспект лекцій для студ. напряму підготовки 6.050101 "Комп'ютерні науки" денної та заочної форм навч./ Л.Ю. Маноха, Н.В. Лімaнська – К.: НУХТ, 2014. – 198 с.

ПОСЛІДОВНЕ УТОЧНЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ НЬЮТОНА

Михайлишин Оксана Миколаївна

3 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Поява і безперервне вдосконалення швидкодіючих електронних обчислювальних машин (ЕОМ) призвело до справді революційного перетворення науки взагалі і математики особливо. Змінилася технологія наукових досліджень, колосально збільшилися можливості теоретичного вивчення, прогнозу складних процесів, проектування інженерних конструкцій. Вирішення великих науково-технічних проблем, прикладами яких можуть служити проблеми оволодіння ядерною енергією і освоєння космосу, стало можливим лише завдяки застосуванню математичного моделювання і нових чисельних методів, призначених для ЕОМ.Такі дослідження, як: оволодіння ядерною енергією (потребують вирішення комплексу складних завдань фізики та механіки), освоєння космосу (створення літальних апаратів і вирішення для них багатьох завдань аеродинаміки і балістики) та пошук нових джерел енергії проводяться на основі математичного опису моделі фізичних процесів та подальшого вирішення відповідних математичних задач на ЕОМ за допомогою обчислювальних алгоритмів.

Інженерам часто доводиться вирішувати алгебраїчні та трансцендентні рівняння, що можуть представляти собою самостійну задачу, що є складовою частиною більш складних задач. В обох випадках практична цінність чисельного методу в значній мірі визначається швидкістю та ефективністю отримання розв'язку. Вибір необхідного алгоритму для розв'язку рівнянь залежить від характеру задачі, яка розглядається.

Розв'язок нелінійної крайової задачі $\frac{dy}{dt} = f(t,x), \quad g(x_0, x_l) = d$ еквівалентний послідовному розв'язку деякої системи нелінійних рівнянь відносно початкового значення x_0 і задачі Коші з цим же початковим значенням. Тому всі методи розв'язку нелінійних систем, застосовуються і для побудови методів розв'язку нелінійної крайової задачі. Однак, в силу специфічності системи нелінійних рівнянь, отриманих при розв'язанні певної крайової задачі, не всі методи можуть бути ефективні для їх розв'язання.

Існують декілька методів для розв'язання нелінійної крайової задачі загального виду. Серед найбільш часто використовуваних є: метод Ньютона, метод продовження розв'язку по параметру, метод спуску та комбінований метод.

У даній курсовій роботі розглядається один з методів послідовного уточнення розв'язку крайової задачі на основі методу Ньютона. Ідея даного методу полягає в тому, що в околі з наближенням x^n, задача замінюється деякою допоміжною задачею. У свою чергу остання задача вибирається так, щоб похибка заміни мала більш високий порядок малості, аніж перший в околі нашого наближення. І далі за наступне наближення приймається розв'язок цієї допоміжної задачі.З використанням даного методу та за допомогою програмного математичного пакету Maple було розглянуто нелінійну крайову задачу (1.) та знайдено її розвязок.Отже, можна дійти до висновку, що основним недоліком розглядуваних ітераційних процесів розв'язку нелінійної крайової задачі є відсутність простих способів такого вибору початкового наближення, яке б забезпечило збіжність такого ітераційного процесу. Тому, при виборі початкового наближення, користуються припущеннями, які ґрунтуються на фізичному змісті задачі, або підбирають це значення шляхом деяких перевірених підрахунків.

Література

1. *Бахвалов Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. − 598 с.
2. *Шаманский В. Е.* Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ/ В.Е. Шаманский. – К.:Наукова думка, 1966. − 244 с.

ВПЛИВ ЗОВНІШНІХ ПОСИЛАНЬ НА ПОШУКОВУ ВИДАЧУ САЙТУ (SEO)

Могіш Іван Юрійович

6 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

Інтернет можна порівняти з величезною бібліотекою, в якій знаходиться маса інформації. Щоб відшукати саме те, що треба, використовуються пошукові системи – роботи, що аналізують запити людей і видають різні посилання. Робот може видати необмежену кількість посилань, але користувач не стане переглядати сотні сторінок з посиланнями, щоб в кінці знайти потрібний сайт. Більшість людей, а саме 95-96%, в своїх пошуках обмежуються тільки першою сторінкою (10 перших сайтів), мало хто заходять на другу.

Навіщо просувати сайт? По-перше, просування сайту допоможе відвідувачам швидко і легко знайти потрібну їм інформацію. По-друге, навіть якщо на сайті нічого не продається, розкрутка необхідна, щоб мати можливість за допомогою розміщення рекламних банерів, посилань, блоків контекстної реклами отримувати дохід.

Існує багато сайтів, які приносять хороший дохід за рахунок розміщення на них контекстної реклами Google і Яндекса. Але якщо ресурс не буде відвідуваним, використовувати його як рекламний не вийде, адже крутити рекламу в центрі пустелі теж не має сенсу – її ніхто і ніколи не побачить.

В роботі досліджується вплив зовнішніх посилань для сайту з різних рекламних площадок: форумів, соціальних мереж, тематичних сайтів.

Задача полягає у відшуканні найоптимальнішого варіанта розміщення зовнішніх посилань, які найбільше впливають на пошукову видачу (SEO).

SEO (англ. search engine optimization) — процес коригування HTML-коду, текстового наповнення (контенту), структури сайту, контролю зовнішніх чинників для відповідності вимогам алгоритму пошукових систем.

Для експерименту було закуплено по 10 зовнішніх посилань для кожного з варіантів. Для площадок були відібрані три пошукові запити, які знаходились в ТОП 50 пошукових систем Google і Yandex. Розміщення посилань відбувалось за такими правилами:

1. Унікальність тексту повідомлення від 95%.
2. Мінімальний розмір - 200-250 символів.
3. Повідомлення - не спам, а порада чи рекомендація.
4. Публікація повідомлення на першій сторінці теми. Другі і подальші, як правило, гірше індексуються.
5. Публікація в свіжої темі. Якщо матеріал публікується в старому неактуальному топіку, то він може викликати багато підозр.

Після розміщення всіх посилань відбулися суттєві зміни в позиціях пошукових запитів:

- Запит «Заробіток в Інтернеті» який до розміщення знаходився на 10 позиції, перемістився на 2 позицію (+8). Для нього були куплені посилання з тематичних сайтів.
- Запит «Внутрішня оптимізація сайту» до розміщення був на 12 позиції, перемістився на 8 позицію (+4). Для нього були розміщені соціальні сигнали.
- Запит «Внутрішній аудит сайту» який знаходився на 11 позиції, перемістився на 6 позицію (+5). Тут були куплені зовнішні посилання з форумів.

Література

1. *Гроховский Л.* Про пошукові алгоритми SEO оптимізації: Внутрішній SEO аудит / Л. Гроховский.– 2015. – 180 с.
2. *Енж Є.* SEO – мистецтво просування сайтів: Основні алгоритми зовнішніх посилань / Є. Енж.– 2016. – 57 с.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ОБРОБКИ СТАТИСТИЧНИХ ДАНИХ У МЕДИЦИНІ

Мушка Ніна Іванівна

6 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

Будь-яка діяльність людини так чи інакше пов’язана з обробкою даних. Завдяки використанню інформаційних технологій у наш час етап обробки даних став менш трудомісткім. На перше місце відносно трудомісткості вийшли такі етапи, як освоєння статистичних пакетів, етап підготовки даних до аналізу, етап попереднього аналізу даних й етап інтерпретації результатів. Усе в цілому привело до змін у технології обробки й аналізу даних.

При цьому для виконання методів обробки медико-біологічних даних від користувача потрібно застосування статистичних методів обробки даних та використання відповідних пакетів прикладних програм. Сам аналіз даних з використанням статистичнних методів включає в себе такі етапи: планування дослідження; підготовка даних до аналізу; попередній аналіз даних; вибір методу аналізу та його реалізація; інтерпретація результатів; подання результатів [1] . Розділ статистики, що вивчає питання, пов’язані з медициною, гігієною та охороною здоров’я називається медичною статистикою. Вивчаючи випадкові явища і спираючись на теорію вірогідності, медична статистика зуміла розпізнати з певною допустимою похибкою багатофакторіальну кореляцію між явищами та чинниками, що їх обумовлюють. Таким чином стало можливим вивчення показників здоров’я населення (захворюваність, інвалідність, демографічні показники: народжуваність, смертність, природній приріст, середню тривалість життям), фізичний розвиток, а також показники діяльності лікувально-профілактичних закладів.

В роботі розглянуті наступні методи обробки статистичних даних:

1. Методи регресійного аналізу

Економетрична модель – це функція чи система функцій, що описує кореляційно-регресійний зв’язок між економічними показниками, один чи кілька з яких є залежною змінною, інші – незалежними. Задачею регресійного аналізу є встановлення виду залежності між змінними та вивчення залежності між ними.

2. Методи прогнозування

Для розв'язання задач прогнозу вхідними даними є числові послідовності, кількісні значення яких відображають процес зміни і розвитку досліджуваних показників у часі. В основі усіх методів прогнозування лежить ідея екстраполяції закономірностей розвитку процесу, що складаються на момент виконання прогнозу, на майбутній проміжок часу.

3. Методи зведення та групування

Зведення – друга стадія (етап) статистичного дослідження. Зведення у вузькому розумінні слова – це підрахунок підсумку, тобто сумування індивідуальних значень показника.

Статистичним групуванням називають розчленування, розподіл одиниць сукупності на класи, групи та підгрупи за суттєвими ознаками. Та ознака, котру покладено в основу групування, тобто за якою утворюються групи, є групувальною.

4. Вибірковий метод

Встановлення статистичних закономірностей, щодо масових випадкових явищ, ґрунтується на вивченні статистичних даних – відомостей про те, які значення прийняла окрема ознака унаслідок проведення досліду.

На практиці статистичних досліджень відрізняють два види дослідів:

• суцільний, коли розглядаються всі елементи сукупності;

• вибірковий, де вивчається лише деяка частина елементів.

5. Індексний метод

Індексний метод широко використовується у практиці аналітичної роботи для вивчення ступеня виконання різних планових завдань, визначення динаміки аналізованих показників, розрахунку впливу окремих факторів на зміну результатів виробничо-експлуатаційної діяльності підприємств і організацій міського виробництва. Наприклад, при аналізі сукупної зміни собівартості продукції рослинництва за певний проміжок часу мають справу з різними видами продукції – зерном, овочами, баштанними і т.д.. Об'єднання різних елементів в одну сукупність називають агрегатом. Для аналізу змін, що відбуваються в таких агрегатах, найкращим прийомом вважається розрахунок індексів [2].

6. Графічні способи зображення статистичних даних

Для кращого сприйняття й зрозуміння закономірностей явищ і процесів у економічному аналізі широко застосовуються графічні способи зображення інформації. Наявність потужних і зручних програм для аналізу статистичних даних на персональних комп'ютерах, і зокрема, формування електронних таблиць Microsoft Excel для Windows розширює коло споживачів методів графічного зображення статистичної інформації, що визначає актуальність дослідження [2] .

Серед багатьох визначень статистики загалом і медичної статистики зокрема найбільшою мірою суть науки виражає таке: медична статистика – це наука, яка вивчає здоров'я населення в залежності від соціально-економічних, культурних, санітарно-гігієнічних та медико-біологічних чинників і має за мету встановлення тенденцій цих залежностей в умовах діяльності системи медичної допомоги.

Література

1. *Бек В. Л.* Теорія статистики / В. Л. Бек – К.: ЦУЛ, 2003. – 288 с.
2. *Бережная Е.* Математические методы моделирования экономических систем / Е. Бережная – М.:ФиС. 2002 – 368 с.

ПРО ПІДАЛГЕБРУ АЛГЕБРИ ПРОЕКТИВНИХ $\boldsymbol{Z_2}$-ЗОБРАЖЕНЬ ЦИКЛІЧНОЇ 2-ГРУПИ, ПОРОДЖЕНУ НЕЗВІДНИМИ ПРОЕКТИВНИМИ $\boldsymbol{Z_2}$-ЗОБРАЖЕННЯМИ

Немеш Мар'яна Михайлівна

5 курс, спеціальність 014.04 «Середня освіта. Математика»

Баранник Валерій Феодосійович

Доцент кафедри алгебри

Нехай S – комутативне кільце з одиницею, S^* – мультиплікативна група кільця S, G – скінченна група порядку d, $GL(n, S)$ – група всіх унімодулярних матриць над S порядку n.

Проективним зображенням групи G над кільцем S називається таке відображення Γ групи G в групу $GL(n, S)$, для якого справедлива рівність:

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \mu_{a,b}\Gamma(ab) \ \left(\mu_{a,b} \in S^*, a, b \in G\right).$$

Два проективних зображення Γ_1 і Γ_2 групи G над кільцем S називаються еквівалентними, якщо існує така унімодулярна матриця C над кільцем S і такі елементи $\alpha_g \in S^*$ $(g \in G)$, що виконується рівність: $C^{-1}\Gamma_1(g)C = \alpha_g\Gamma_2(g)$.

Нехай $H = \langle a \rangle$ – циклічна група порядку $p^n (p \neq 2, n \geq 1)$; $\Lambda = (H, Z_p, \lambda)$ – схрещене групове кільце групи H та кільця Z_p при системі Z_p-факторів $\lambda_{a,b} \in Z_p^*$ $(a, b \in H)$. Це кільце володіє Z_p-базисом: $u_e, u_a, u_a^2, ..., u_a^{p^n-1}$, де

$$u_a^{p^n} = \gamma^{p^k}u_e \ (\gamma = (1+p)^s, s \neq 0(\text{mod } p), sp^k \leq p^n).$$

Позначимо кільце Λ через $\Lambda_{k,s}$. Нехай $\Lambda_{i,k,s}$ – Z_p-кільце з визначальним співвідношенням $v_{i,k,s}^{p^{n-k+i}} = \gamma^{p^i}v_e$ $(i \leq k)$. Позначимо через $A_{i,k,s}$ регулярне Z_p-зображення кільця $\Lambda_{i,k,s}$, $\Gamma_{i,k,s}$ – незвідне Z_p-зображення кільця $\Lambda_{i,k,s}$, яке реалізується в кільці $Z_p[\Theta_{i,k,s}]$, де $\Theta_{i,k,s}$ – корінь полінома $\Phi_{p^i}\left(\frac{x^{p^{n-k}}}{\gamma}\right)$ ($\Phi_{p^i}(y)$ – поліном ділення круга порядку p^i).

Всі незвідні проективні Z_p-зображення групи H вичерпуються зображеннями $\Gamma_{i,k,s}$. Очевидно, $A_{o,k,s} = \Gamma_{o,k,s}$.

Лема 1. *Мають місце наступні формули множення в підалгебрі $B(H, Z_p)$ алгебри проективних Z_p-зображень групи H, породжені незвідними проективними Z_p-зображенннями*:

$$\left[A_{i_1,k_1,s_1}\right] \circ \left[A_{i_2,k_2,s_2}\right] = p^{n-k_1+i_1}\left[A_{i,k,s}\right], \text{ де } k_2 - i_2 \leq k_1 - i_1;$$

$$\left[\Gamma_{i_1,k_1,s_1}\right] \circ \left[A_{i_2,k_2,s_2}\right] = \varphi\left(p^{n-k_1+i_1}\right)\left[A_{i,k,s}\right], \text{ де } k_1 - i_1 \geq k_2 - i_2;$$

$$\left[\Gamma_{i_1,k_1,s_1}\right] \circ \left[A_{i_2,k_2,s_2}\right] = p^{n-k_2+i_2}\left[\Gamma_{i,k,s}\right], \text{ де } k_1 - i_1 < k_2 - i_2;$$

$$\left[\Gamma_{i_1,k_1,s_1}\right] \circ \left[\Gamma_{i_2,k_2,s_2}\right] = \varphi\left(p^{n-k_2+i_2}\right)\left[\Gamma_{i,k,s}\right], \text{ де } k_1 - i_1 < k_2 - i_2;$$

$((k, s) = (k_1, s_1) \circ (k_2, s_2), i = k - k_2 + i_2)$;

$$\left[\Gamma_{i_1,k_1,s_1}\right] \circ \left[\Gamma_{i_1,k_1,s_1}\right] = p^{n-k_1+i_1-1}(p-2)\left[A_{i,k,s}\right] + p^{n-k_1+i_1-1}\left[A_{i-1,k,s}\right],$$

де $(k, s) = (k_1, s_1) \circ (k_1, s_1), i = k - k_1 + i_1$.

Нехай $k = Z_2[x]$, де Z_2 – кільце цілих 2-адичних чисел, $\alpha \pm 1, t \in Z,$ де Z – кільце цілих раціональних чисел. Покладемо

$$\Gamma(n,t,\alpha) = \frac{K}{\langle x^{2^n} - \alpha \cdot 5^t \rangle}.$$

Для $0 \le s \le 2^{n-k-1}$ введемо в розгляд k-підмодулі в k-модулі $\Gamma(n-k,t,1)$:

$$\Gamma_s(n-k,t) = (x-1)^s \Gamma(n-k,t,1) + 2\Gamma(n-k,t,1).$$

Нехай

$$\omega_s(n-k,t) = \Gamma_s(n-k,t) - \Gamma_{2^{n-k-s}}(n-k,t).$$

Позначимо через $B_1(H, Z_2)$ підалгебру алгебри проективних Z_2-зображень групи H, породжену незвідними Z_2-зображеннями.

Теорема 1. *Алгебра* $\bar{B}_1(H, Z_2) = \dfrac{B_1(H, Z_2)}{V}$ *скінченновимірна і напівпроста* (V *– ідеал кільця* $B_1(H, Z_2)$, *породжений елементами* $[\Gamma_s(n-k,t)] - [\Gamma_{2^{n-k}-s}(n-k,t)]$, *де* $0 \le s \le 2^{n-k-1}$)

$$\dim_Q \bar{B}_1(H, Z_2) = \sum_{t=0}^{n} (2t+1)\varphi(2^{n-t}) + (2^{n-k} - 1) \cdot (n-k)$$

(φ *- функція Ейлера,* Q *– поле раціональних чисел*).

Теорема 2. *Нехай* $H = \langle a \rangle$ *– група порядку* p^n $(p \ne 2)$. *Алгебра* $B(H, Z_p)$ *скінченновимірна і напівпроста*

$$\dim_Q B(H, Z_p) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)\varphi(p^{n-k})$$

(Q *– поле раціональних чисел,* φ *– функція Ейлера*).

Література

1. *Баранник А. Ф.* Про алгебру проективних цілочислових зображень скінченних груп / А. Ф. Баранник, П. М. Гудивок // Доповіді АН УРСР, сер. А. – 1972. – 291, № 4. – С. 291–293.
2. *Гудивок П. М.* Целочисленные представления конечных групп: Учебное пособие / П. М. Гудивок. – Ужгород: Изд. УжГУ, 1978.

3D МОДЕЛЮВАННЯ ТА ВІЗУАЛІЗАЦІЯ

Павлусик Андрій Ігорович

4 курс, напрям підготовки 6.040301 «Прикладна математика»

Комп'ютерна графіка з'явилась достатньо давно – вже у 1960-х роках існували повноцінні програми роботи з графікою. Сьогодні прийнято користуватися термінами «комп'ютерна графіка» і «комп'ютерна анімація». Поняття «комп'ютерна графіка» об'єднує всі види робот зі статичними зображеннями, «комп'ютерна анімація» має справи з зображеннями, які динамічно змінюються. У теперішній час, завдяки грандіозному розвитку комп'ютерної техніки, деякі сторони нашого життя неможливо уявити собі без застосування комп'ютерних технологій, у тому числі без комп'ютерної графіки

Метою проекту є створення 3D – моделей фігур. Вони можуть бути представлені у вигляді програмного коду або як 3D-модель, а також за допомогою двовимірного зображення, що створюється за допомогою процесу рендерингу. За допомогою нього математична (векторна) просторова модель перетворюється на плоску (растрову) картинку. Якщо потрібно створити фільм, то рендериться послідовність таких картинок – кадрів. Як структура даних, зображення на екрані представлене матрицею крапок, де кожна точка визначена принаймні трьома числами: інтенсивністю червоного, синього і зеленого кольорів. Таким чином рендеринг перетворить тривимірну векторну структуру даних в плоску матрицю пікселів. Цей крок часто вимагає дуже складних обчислень, особливо якщо потрібно створити ілюзію реальності. Найпростіший вид рендерингу – це побудувати контури моделей на екрані комп'ютера за допомогою проекції. Зазвичай цього недостатньо і потрібно створити ілюзію матеріалів, з яких виготовлені об'єкти, а також розрахувати спотворення цих об'єктів за рахунок прозорих середовищ. Існує декілька технологій рендерингу, часто поєднуваних разом [1].

Для реалізації даного додатку було використано технологію Microsoft WPF (Windows Presentation Fundation), так як вона орієнтована на створення додатків для Windows з нестандартним користувацьким інтерфейсом, при збереженні функціональності звичайних додатків Windows Forms. Дана технологія використовує принцип розмітки для створення інтерфейсу, що робить процес розробки набагато гнучкішим [2].

В результаті було отримано продукт, в якому можна створити одну 3D – фігуру з певного списку. Даний проект в подальшому можна буде вдосконалити шляхом використання інших алгоритмів моделювання.

Можна зробити висновок, що головною перевагою просторового моделювання є візуалізація, яка дозволяє виявити та усунути помилки і недоліки ще до завершення виконання графічної роботи чи проектування деталі [3].

Література

1. *Сиденко Л.* Компьютерная графика и геометрическое моделирование/ Л. Сиденко. – Санкт-Петербург: Питер, 2009. – 224 с.
2. *Шилдт Г.* Полное руководство C# 4.0 / Г. Шилдт. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 1056 с.
3. *Землянов Г.С.* 3D-моделирование / Г.С. Землянов, В.В. Ермолаева // Молодой ученый. – 2015. – № 11.– С. 186-189.

ВИЗНАЧЕННЯ ПРІОРИТЕТІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

Поліщук Андрій Володимирович

4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

У реальних задачах вибору найбільш пріоритетного рішення, як правило, присутні кілька критеріїв оптимальності. Під багатокритеріальною задачею найчастіше розуміють не власне вербальний опис задачі, а її модель. Багатокритеріальна задача – це математична модель прийняття оптимального рішення за декількома критеріями. Ці критерії можуть відображати оцінки різних якостей об'єкта або процесу, відносно яких приймається рішення.

Усе більшої актуальності набувають багатокритеріальні задачі вибору, які містять два або більше критеріїв та розв'язуються у невизначених умовах. Невизначеність полягає в тому, що невідомо яким критеріям віддати перевагу і в якій мірі, і як зробити правильний вибір із допустимої множини альтернативних варіантів. Побудований алгоритм допомагає здійснювати вибір деякого рішення, із множини допустимих рішень, з урахуванням пріоритетів для критеріїв оптимальності.

Постановка задачі:

$$y_i = f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \to extr, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1}$$

$$x \in X \subseteq R^n, \tag{2}$$

де X – множина допустимих розв'язків (альтернатив), яка визначається сукупністю лінійних рівнянь та нерівностей, $y_i = f_i(x)$ – цільові функції, c_{ij} – коефіцієнти.

Маємо деяку сукупність цілей, які відображені критеріями $f_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, і потрібно знайти таку точку $x \in X \subseteq R^n$, яка в деякому розумінні мінімізує або максимізує кожен із критеріїв. Для цього спочатку проранжуємо множину альтернативних рішень, враховуючи значення оцінок за критеріями та зведемо багатокритеріальну задачу до задачі оптимізації з однією скалярною цільовою функцією.

Опишемо загальний алгоритм розв'язування задач багатокритеріального вибору з визначенням пріоритетів для критеріїв.

Крок 1. Знайти оптимальні розв'язки для кожного критерію на основі відомих методів лінійного програмування та значення критеріїв в оптимальних точках.

Крок 2. Задати матрицю рішень O на основі кроку 1.

Крок 3. Провести нормалізацію матриці рішень O (перехід від матриці O до матриці D).

Крок 4. Знайти матрицю $B = D \times D^T$ або $B = D^T \times D$.

Крок 5. Для матриці B визначити максимальне власне значення і відповідний йому власний вектор $Y = (y_1, ..., y_m)^T$.

Для визначення найбільшого власного значення і відповідного власного вектора використаємо *метод ітерацій*.

Суть *методу ітерацій* полягає в наступному:

– найбільше власне значення визначається

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \cdot y_i^l;$$

– власний вектор визначається ітеративно

$$Y^l = B \cdot Y^{l-1}; \; Y^0 = (1,1,\ldots,1)^T;$$

– ітеративний процес закінчується при виконанні умови

$$\max_i \left| Y^l - Y^{l-1} \right| \le \varepsilon.$$

Крок 6. Провести нормування власного вектора для отримання вектору пріоритетів $w_j, j = \overline{1,m}$. Наприклад, $w_j = \frac{y_j}{\max\limits_j y_j}, j = \overline{1,m}$.

Крок 7. Провести згортання критеріїв. Наприклад, на основі лінійної згортки:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j f_j(x).$$

Лінійна функція буде сумою критеріїв, помножених на вагові коефіцієнти $w_j, j = \overline{1,m}$, отриманих на попередньому кроці.

Таким чином, задача зводиться до однокритеріальної задачі лінійного програмування і приймає вигляд:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j f_j(x) \to extr, \quad (3)$$

$$x \in X \subseteq R^n. \quad (4)$$

Рішення, яке отримано в результаті оптимізації такого критерію, можна вважати ефективним.

Таким чином, наведено підхід для визначення пріоритетів у багатокритеріальних задачах оптимізації, що зводить до однокритеріальної задачі лінійного програмування. Застосування такого підходу дає можливість отримати ефективне рішення по різних цільових функцій.

Література

1. *Маляр Н.Н.* Подход к определению приоритетов альтернатив для задач многокритериального выбора / Н.Н.Маляр // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 4. – С. 63-67.
2. *Маляр М.М.* Моделі і методи багатокритеріального обмежено-раціонального вибору: Монографія / М.М. Маляр. – Ужгород: РА “АУТДОР-ШАРК”, 2016. – 222 с.
3. *Маляр М. М.* Задача вибору та підхід до її розв’язання / М.М. Маляр // Вісник СевДТУ. – Т. 50. – С. 98-104.
4. *Маляр М.М.* Використання динамічних критеріїв у моделях багатокритеріального вибору / М.М. Маляр, В.В. Поліщук, М.М. Шаркаді // Компьютерная математика. – 2015. – Вип. 1. – С. 125-133.
5. Поліщук В.В. Алгоритм ранжування альтернатив за багатьма критеріями / В.В. Поліщук // Збірник наукових праць – Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. – 2013. - № 68. – С. 100-105.
6. *Волошин О. Ф.* Моделі та методи прийняття рішень / О. Ф.Волошин, С. О. Мащенко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. – 336 с.
7. *Зайченко Ю.П.*Теорія прийняття рішень: підручник / Ю.П. Зайченко. – К.: НТУУ «КПІ», 2014. – 412 с.

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛІННЯ РИЗИКАМИ

Половка Мирослава Іванівна

5 курс, спеціальність 113 «Прикладна математика»

Формування оптимальної структури портфеля цінних паперів − одна з основних економічних задач, розв'язання якої дозволяє оптимізувати розподіл фінансових та матеріальних ресурсів, прогнозувати результати економічної діяльності. Дослідження математичних моделей цієї задачі об'єднані в класичну портфельну теорію, що широко використовується в рамках розвинутої ринкової економіки. Перехідна економіка України характеризується практичною відсутністю достовірної інформації відносно динаміки прибутковості портфеля цінних паперів, невизначеністю економічного стану, тому важливою науковою проблемою є розробка методів формування оптимального портфеля цінних паперів з урахуванням вказаних факторів на основі нових концепцій ризику, збільшення числа критеріїв, побудови стохастичних моделей. Отже, подальший розвиток класичної портфельної теорії, її адаптація до реалій перехідної економіки, розробка нових підходів до проблеми оптимізації структури портфеля цінних паперів в умовах підвищеного ризику та неповної інформації є актуальною задачею.

Основні аспекти проблеми ринку цінних паперів і діяльності банків в сфері фінансових інвестицій розглянуті в роботах вітчизняних і зарубіжних вчених, зокрема таких як Л. Примостка, І. Лук'яненка, В, О. Воробйова, А. Єпіфанова, Г. Марковіца, В. Шарпа.

Під інвестиційним портфелем розуміють набір цінних паперів, які придбані для отримання доходів і забезпечення ліквідності. Управління таким портфелем засновується на підтримці рівноваги між ліквідністю і прибутковістю. Ряд українських вчених вважають, що на етапі становлення і розвитку фондового ринку України використання моделей Марковіца і Шарпа не є доцільним, оскільки призводить до похибок, пов'язаних із нестабільністю котирувань цінних паперів і фондового ринку в цілому, і обґрунтовують необхідність застосування моделі квазі-Шарпа. Ця модель ґрунтується на взаємозв'язку дохідності кожного цінного паперу з деякого набору N цінних паперів з дохідністю одиничного портфеля з цих паперів. Під одиничним портфелем цінних паперів розуміють портфель, який складається з усіх цінних паперів, що розглядаються, взятих у рівній пропорції. Модель Квазі-Шарпа раціонально застосовувати при розгляді порівняно невеликої кількості цінних паперів, що належать до однієї чи кількох галузей. З її допомогою добре підтримувати оптимальну структуру вже існуючого портфеля [1]. Окрім зазначених моделей використовуються й інші економіко-математичні моделі, що розроблені для різних постановок задач.

В даній роботі розглядається багатокритеріальна задача формування та управління портфелем цінних паперів:

$$\begin{cases} R_p = \sum_{i=1}^{N} \bar{R}_i W_i + \left(R_{sp} - \overline{R_{sp}}\right) \sum_{i=1}^{N} \beta_i W_i \rightarrow max, \\ \sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\beta_i W_i)^2 \sigma_{sp}^2 + \sum_{i=1}^{N} \sigma_{\epsilon p}^2 W_i^2} \rightarrow min, \\ W_i \geq 0, \\ \sum W_i = 1, \\ S_i \leq H_{11}, \\ S_p \leq H_{12}, \end{cases} \quad (1)$$

де $S_i -$ гранична сума вкладень банку в цінні папери i-го емітенту; $H_{11} -$ норматив інвестування коштів банком в цінні папери i-го емітенту; $S_p -$ гранична сума загальних вкладень банку в цінні папери; $H_{12} -$ норматив загальної суми інвестування банком коштів в цінні папери; $\bar{R}_i -$ середня прибутковість цінного паперу за минулі періоди; $W_i -$ відсоткова частка цінного паперу в портфелі; $R_{sp} -$ очікувана прибутковість одиничного портфеля; $\overline{R_{sp}} -$ середня прибутковість одиничного портфеля за минулі періоди; $\beta_i -$ коефіцієнт регресії; $\sigma_{sp} -$ показник ризику одиничного портфеля; $\sigma_{\epsilon p} -$ залишковий ризик i-го цінного паперу; $R_p -$ прибутковість портфеля цінних паперів банку, що визначається як середньозважена дохідність складових його цінних паперів; $\sigma_p -$ ризик портфеля цінних паперів.

Методи, що використовуються для розв'язання задачі (1), дозволяють знайти точку або множину точок, оптимальних за Парето. У подібних випадках часто використовують методи скаляризації. Етапи узагальненої методики багатокритеріальної оптимізації економічних рішень викладені в [3].

Розроблено програмне забезпечення для задачі формування та управління портфелем цінних паперів на основі розглянутої двокритеріальної моделі, що дозволяє знаходити такий портфель цінних паперів, який відповідає вимогам інвестора як за прибутками, так і за ризиком.

Література

1. *Рухлов А.* Принципы портфельного инвестирования. Финансы. Ценные бумаги / А. Рухлов. – М.: ИНФРА–М, 2003. – 125 с.
2. *Дубровин В. И.* Модели и методы оптимизации выбора инвестиционного портфеля / В.И. Дубровин, О.И. Юськив // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2008. – № 1. – С. 49-60.
3. Кігель В.Р. Узагальнена методика багатокритеріальної оптимізації економічних рішень / В.Р. Кігель // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Міжвідом. наук. зб. Вип. 64. – К: КНЕУ, 2000. – 195 с.
4. *Савчук В.П.* Практическая энциклопедия. Финансовый менеджмент / В.П. Савчук. – К.: Companion Group, 2008. – 880 с.
5. *Чашко Т.А.* Методические аспекты разработки механизма оптимизации портфеля ценных бумаг банка / Т.А. Чашко, М.О. Житарь // Економіка і організація управління: Збірник наукових праць. – 2010. – Випуск 1 (7). – С. 81-90.

ЗАСТОСУВАННЯ МОВИ ПРОГРАМУВАННЯ ТА СТАТИСТИЧНОГО СЕРЕДОВИЩА ОБЧИСЛЕНЬ R ДЛЯ ОБРОБКИ ТАБЛИЧНИХ ДАНИХ

Поляк Анастасія Володимирівна
6 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

R – мова програмування для статистичної обробки даних і роботи з графікою, але в той же час це вільне програмне середовище з відкритим вихідним кодом, що розвивається в рамках проекту GNU. R застосовується скрізь, де потрібна робота з даними. Це не тільки статистика у вузькому сенсі слова , а й первинний аналіз (графіки, таблиці) і математичне моделювання. R без особливих проблем може використовуватися і там, де зараз прийнято використовувати комерційні програми аналізу рівня MatLab / Octave [1].

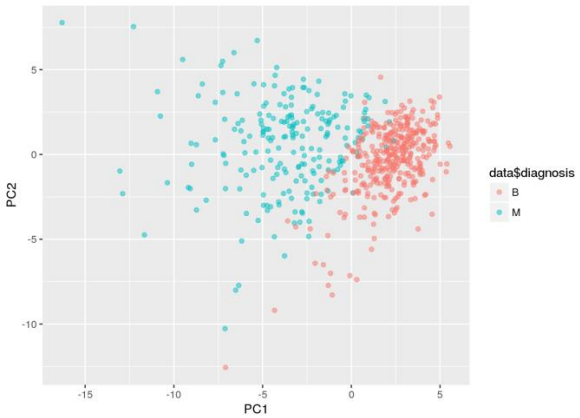
Для демонстрації можливостей пакету R було взято одну з нетривіальних задач, яка розв'язується у факторному аналізі та при кластеризації об'єктів. Метод головних компонент (англ. Principal component analysis, PCA) – один з основних способів зменшити розмірність даних, втративши найменшу кількість інформації.

Обчислення головних компонент може бути зведене до обчислення сингулярного розкладу матриці даних або до обчислення власних векторів і власних значень коваріаційної матриці вихідних даних. Іноді метод головних компонент називають перетворенням Кархунена-Лоєва або перетворенням Хотеллінга (англ. Hotellingtransform) [2].

Як негативну сторону методу головних компонент слід назвати складність математичного апарату, зумовленого абсолютністю знань теорії ймовірностей, математичної статистики, лінійної алгебри, а також математичного забезпечення ПЕОМ. Тому для демонстрації способу розв'язання задачі класифікації за допомогою пакетів та функцій R було застосовано функцію *prcomp* з пакету статистики, а також застосовано прийоми роботи з графіками та таблицями для візуалізації методу головних компонент.

Для аналізу результатів роботи процедур та візуалізації були розглянуті набори даних «Рак молочної залози». На підставі цих наборів було побудовано правило класифікації, яке визначає вид пухлини – доброякісна чи злоякісна. Це завдання класифікації, так як є 2 класи.

У підсумку було отримано такий графік:



Отже, результатом дослідження є розроблене програмне забезпечення на мові R, яке дає змогу проаналізувати дані, задані в таблиці «Об'єкт-властивість», зменшити їх розмірність та візуалізувати результати роботи програми.

Література

1. *Кабаков Р. И.* R в действии. Анализ и визуализация данных в программе R / Р.И. Кабаков. – М.:ДМК Пресс, 2014. – 588 с.
2. *Померанцев А.Л.* Метод Главных Компонент (PCA) / А.Л. Померанцев. – М.:Российское хемометрическое общество, 2012. – 207 с.

ОДНА КОНЗИСТЕНТНА ОЦІНКА КОЕФІЦІЄНТА РЕГРЕСІЇ ГАУССІВСЬКИХ НЕЗАЛЕЖНИХ ОДНОРІДНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

Попович Богдана Степанівна

4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Нехай $X_1(t_1,t_2), X_2(t_1,t_2), \eta(t_1,t_2)$, де $(t_1,t_2) \in [0,1]^2$– незалежні однорідні гауссівські випадкові поля з нульовими середніми та коваріаційними функціями

$$EX_i(t_1,t_2)X_i(s_1,s_2) = r_i(t,s), E\eta(t_1,t_2)\eta(s_1,s_2) = r_\eta(t,s), (t_1,t_2),(s_1,s_2) \in [0,1]^2 .$$

За спостереженнями випадкового процесу

$$Y(t_1,t_2) = \Theta_1 X_1(t_1,t_2) + \Theta_2 X_2(t_1,t_2) + \eta(t_1,t_2), \qquad (t_1,t_2) \in [0,1]^2,$$

у точках $\left\{\left(\frac{k}{2^n},1\right),\left(1,\frac{k}{2^n}\right), 0 \le k \le 2^n, n \ge 1\right\}$ побудовано сильно конзистентну оцінку коефіцієнта регресії $\Theta = (\Theta_1,\Theta_2) \in [0,d]^2, d > 0$ – відома стала [1]. Випадкове поле $\eta(t_1,t_2),(t_1,t_2) \in [0,1]^2$ – більш гладке, ніж випадкові поля $X_i(t_1,t_2), i = 1,2, (t_1,t_2) \in [0,1]^2$.

Припустимо, що для коваріаційних функцій $r_i(t,s), r_\eta(t,s), (t_1,t_2),(s_1,s_2) \in [0,1]^2$ виконуються наступні умови:

(i) існують сталі $c_i > 0, a_i > 0, \delta_i > 0, 1 \le i \le 4$ та $H_{11},\ H_{21} \in (0,1),\ H_{11} < H_{21},\ H_{12},\ H_{22} \in (0,1), H_{22} < H_{12}$ такі, що

$$|1 - r_1(h,1) - c_1 h^{2H_{11}}| \le a_1 h^{2H_{11}+\delta_1};\ |1 - r_2(h,1) - c_2 h^{2H_{21}}| \le a_2 h^{2H_{21}+\delta_2};$$

$$|1 - r_1(1,h) - c_3 h^{2H_{12}}| \le a_3 h^{2H_{12}+\delta_3}; |1 - r_2(1,h) - c_4 h^{2H_{22}}| \le a_4 h^{2H_{22}+\delta_4},\ h \in (0,1]^2;$$

(ii) $r_1, r_2 \in C^{(2)}([0,1]^2 \backslash \{D\})$, де $D = \{(t,s)|t = s\}$ та існують сталі $L_1, L_2, L_3, L_4 > 0$, що

$$\left| \frac{\partial^2 r_1(\tau,1)}{\partial \tau^2} \right| \le \frac{L_1}{\tau^{2-2H_{11}}}, \left| \frac{\partial^2 r_2(\tau,1)}{\partial \tau^2} \right| \le \frac{L_2}{\tau^{2-2H_{21}}};$$

$$\left| \frac{\partial^2 r_1(1,\tau)}{\partial \tau^2} \right| \le \frac{L_3}{\tau^{2-2H_{12}}}, \left| \frac{\partial^2 r_2(1,\tau)}{\partial \tau^2} \right| \le\le \frac{L_4}{\tau^{2-2H_{22}}}, \tau \in (0,1]^2.$$

(iii) існують сталі $\beta_1 > 2H_{11}, \beta_2 > 2H_{22}$ та $b_1, b_2 \ge 0$ такі, що

$$\left| 1 - r_\eta(h,1) \right| \le b_1 h^{\beta_1}, h \in (0,1]^2;\ \left| 1 - r_\eta(1,h) \right| \le b_2 h^{\beta_2}, h \in (0,1]^2$$

Теорема 1. Нехай виконуються умови (i)-(iii). Тоді статистика $\hat{\Theta}_n = \left(\hat{\Theta}_n^{(1)}, \hat{\Theta}_n^{(2)}\right) = \left(\sqrt{\frac{\hat{S}_n^{(1)}}{2C_1}}, \sqrt{\frac{\hat{S}_n^{(2)}}{2C_4}}\right), n \ge 1$, де

$$\hat{S}_n^{(1)} = 2^{n(2H_{11}-1)} \sum_{k=1}^{2^n} \left(Y\left(\frac{k}{2^n},1\right) - Y\left(\frac{k-1}{2^n},1\right)\right)^2,$$

$$\hat{S}_n^{(2)} = 2^{n(2H_{22}-1)} \sum_{k=1}^{2^n} \left(Y\left(1,\frac{k}{2^n}\right) - Y\left(1,\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^2,$$

є сильно конзистентною оцінкою коефіцієнта регресії $\Theta = (\Theta_1,\Theta_2)$.

Література

1. *Курченко О. О.* Бакстерівська оцінка коефіцієнта регресії в одній моделі / О. О. Курченко, О. О. Синявська // Вісник Київського університету. Серія: Фізико–математичні науки. – 2011. – Вип. 3. – С. 40-45.

ДВОФАКТОРНИЙ ТА ТРИФАКТОРНИЙ ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Попович Тетяна Петрівна

4 курс, напрям підготовки 6.040201 *«Математика»*

Розглядаємо сукупність однорідних об'єктів. Кожен з об'єктів характеризується ознакою Y. Вивчається вплив фактора А і фактора В на ознаку Y. Фактор А має I рівнів: $A = \{A_1, A_2, \dots, A_I\}$. Фактор В має J рівнів: $B = \{B_1, B_2, \dots, B_J\}$. Кожен об'єкт вибірки з сукупності одночасно перебуває під впливом одного з рівнів фактора А та одного з рівнів фактора В. За планом експерименту під впливом кожної з комбінацій рівнів факторів досліджують один або більше об'єктів вибірки. Якщо тільки один об'єкт, тоді маємо план двофакторного дисперсійного аналізу без повторювань. Якщо два і більше, тоді маємо план двофакторного дисперсійного аналізу з повторюваннями. Розглянемо двофакторний план з повторюваннями, параметричну модель:

План експерименту

У планах з перехресною класифікацією розглядають всі можливі комбінації рівнів факторів. Дію фактора А на i-му рівні та дію фактора В на j-му рівні називають $(i; j)$ коміркою, $i = 1,2, \dots, I$, $j = 1,2, \dots, J$. За планом експерименту є IJ комірок. У кожній комірці планується провести K вимірювань досліджуваної ознаки Y, тобто в $(i; j)$ комірці є K досліджуваних об'єктів. У плані експерименту загальне число досліджуваних об'єктів дорівнює:

$$n = IJK \tag{1}$$

Вибірка об'єму n із сукупності однорідних об'єктів має бути репрезентативною. Розподіл усієї вибірки по IJ вибірках у комірках проводиться за рандомізованим планом. Якщо $K = 1$, то маємо план експерименту без повторних вимірювань. Якщо $K > 1$, тоді план із повторними вимірюваннями.

Модель дисперсійного аналізу

Параметрична модель двофакторного плану з повтореннями представляє досліджувану ознаку таким виразом:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + W_{ijk}, \tag{2}$$

де $i = 1,2, \dots, I$; $j = 1,2, \dots, J$; $k = 1,2, \dots, K$; μ – генеральний центр розподілу ознаки; α_i – диференціальний ефект і-го рівня фактора A; β_j – диференціальний ефект j-го рівня фактора B; $(\alpha\beta)_{ij}$ – диференціальний ефект, обумовлений дією комбінації i-го рівня фактора A та j-го рівня фактора B; W_{ijk} – випадкова похибка, зумовлена дією сукупності неврахованих факторів, яка підпорядковується нормальному розподілу $N(0; \sigma)$.

Особливим у моделі (2) є четвертий доданок. За цією моделлю має місце взаємовплив дії двох факторів на досліджувану ознаку. Комплексна дія двох і більше факторів народжує нові ефекти. Яскравим прикладом такого ефекту є явище ЕПР та ЯМР: при одночасній дії на тіло постійного магнітного поля та електромагнітного опромінювання відповідних частот виникають явища електронного парамагнітного резонансу, чи ядерного магнітного резонансу. Істотність четвертого доданка в (2) є першим якісно новим проявом системного аналізу впливу двох факторів на досліджувану ознаку. Модель, у якій не розглядається взаємовплив дії факторів, називають адитивною моделлю дисперсійного аналізу. Адекватність адитивної моделі стверджується відповідною перевіркою гіпотез.

Величини μ, α_i, β_j, $(\alpha\beta)_{ij}$ в (2) називають параметрами моделі. Оцінювання параметрів моделі за даними вибірки здійснюється на основі МНК. Складена за МНК

система нормальних рівнянь матиме однозначні розв'язки, коли на параметри моделі накладають такі умови:

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0; \ \sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0;$$
$$\sum_{i=1}^{I} (\alpha\beta)_{ij} = 0; \ j = 1,2,\dots,J;$$
$$\sum_{j=1}^{J} (\alpha\beta)_{ij} = 0; \ i = 1,2,\dots,I;$$

Модель дисперсійного аналізу (2) передбачає, що всі випадкові похибки W_{ijk} є незалежними і мають однакові дисперсії. Оскільки параметри моделі є фіксованими в кожній з комірок, то оцінка дисперсії похибки в комірці дорівнює оцінці дисперсії ознаки в цій комірці за даними вибірки:

$$\hat{\sigma}_{ij}^2 = S_{ij}^2,$$

де $S_{ij}^2 = \frac{1}{K-1}(Y_{ij*}^2 - K(\overline{Y_{ij*}})^2$; $Y_{ij*}^2 = \sum_{k=1}^{K}(Y_{ijk})^2$.

Література

1. *Личковський Е.І.* Вища математика. Теорія наукових досліджень у фармації та медицині: підручник / Е.І. Личковський, П.Л. Свердан. – К.: Знання, 2012. – 476 с.

ЕКСПЕРТНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ЧИСЛОВОЇ ОЦІНКИ ОБ'ЄКТА

Просолін Василина Василівна

спеціальність 7.04020101 «Математика»

Розглядається задача числової оцінки об'єкта у такій постановці: Нехай задано об'єкт *O*. Необхідно визначити його числову оцінку за деяким критерієм *K*.

Нехай для визначення оцінки було залучено групу з k експертів: $E = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$, коефіцієнти компетентності яких відповідно $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, де $\alpha_i \in [0;1]$ і $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. Коефіцієнти компетентності експертів можуть бути задані особою, що приймає рішення або визначені за допомогою відомих методів.

Розглядають такі методи визначення числової оцінки об'єкта [1]:

Експертиза 1. Нехай кожен експерт E_i, $i = \overline{1,k}$ задає числову оцінку a_i. Тоді результуючу числову оцінку знаходимо за формулою (1):

$$a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \tag{1}$$

Експертиза 2 (утилітарний критерій). Відстань d між числовими оцінками a і b визначається як $d(a,b) = |a - b|$. Тоді, за колективну оцінку a беруться оцінки з множини (2):

$$a \in Arg \min_{a \in E^1} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i d(a, a_i) \tag{2}$$

Експертиза 3 (егалітарний критерій). Відстань між об'єктами визначається аналогічно до Експертизи 2. Тоді, за колективну оцінку a беруться оцінки з множини (3):

$$a \in Arg \min_{a \in E^1} \max_{i \in \{1,...,k\}} \alpha_i d(a, a_i) \tag{3}$$

Як правило, результуючі оцінки, які отримані при застосуванні різних експертиз, не співпадають. Доцільність використання тієї чи іншої експертизи для конкретної прикладної задачі вирішує особа, що приймає рішення з огляду на характеристики об'єкта дослідження.

Література

1. *Волошин О.Ф.* Моделі і методи прийняття рішень / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2010. – 336 с.

РЕАЛІЗАЦІЯ КЛАСИЧНОГО ТА ПАКЕТНОГО АЛГОРИТМУ НАВЧАННЯ НЕЙРОМЕРЕЖІ MLMVN ЗАСОБАМИ C++

Роботишин Микола Васильович

3 курс, напрям підготовки 6.040301 «Прикладна математика»

Метою моєї роботи є реалізація та порівняння алгоритмів навчання нейронної мережі MLMVN [1] засобами мови програмування C++ . Мережа MLMVN – це нейронна мережа з багатозначними нейронами (MVN). Цей нейрон може бути використаний для відображення як дискретних, так і неперервних багатозначних співвідношень між входами та виходом. Вагові коефіцієнти у цьому нейроні є комплекснозначними і активуюча функція є функцією аргументу (фази) зваженої суми.

У мережі MLMVN вихідний нейрон (нейрони) можуть мати як дискретну, так і неперервну активуючу функцію, всі ж нейрони крім вихідних мають неперервну активуючу функцію, тобто їхній вихід – це проекція зваженої суми на одиничне коло. Такі нейромережі широко використовуються для розв'язання багатьох задач, таких як розпізнавання образів та прогнозування подій.

Практика показує, що процеси навчання нейронних мереж займають багато часу. Пакетний алгоритм є набагато швидший за класичний, тому що ідея полягає в одночасному обрахуванні вагових коефіцієнтів вихідного нейрону для всіх елементів навчальної вибірки. Отже, кількість ітерацій при навчанні є меншою.

Вибір мов програмування зумовлений відомою їх ефективністю у математичних обчисленнях та можливістю реалізації паралельних обчислювальних процесів. У даній реалізації я використовував OpenNN бібліотеку, яка спрощує роботу з нейронними мережами. Ми сподіваємось, що дана реалізація дозволить обробляти великі масиви даних за коротший час у порівнянні з реалізацією алгоритму засобами пакету MatLab.

Література

1. *Aizenberg I.* MLMVN with Soft Margins Learning / I. Aizenberg // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 2014. – Vol. 25, No. 9. – pp. 1632-1644.
2. *Aizenberg I.* Complex-Value Neural Networks with Multi-Valued Neurons / I. Aizenberg. – Berlin/Heidelberg/New York:Springer, 2011. – 262 p.
3. *Aizenberg E.* Batch linear least squares-based learning algorithm for MLMVN with soft margins / E. Aizenberg, I. Aizenberg// IEEE Symposium on Computational Intelligence and Data Mining. – 2014. – pp. 48-55.

РОЗРОБКА ВЕБ-ДОДАТКУ ДЛЯ СКЛАДАННЯ РОЗКЛАДУ НАВЧАННЯ

Січка Євгеній Сергійович

4 курс, напрям підготовки 6.040301 «Прикладна математика»

У зв'язку із здешевленням обчислювальних засобів і зменшенню ціни за використання ресурсів мережі Internet, швидкого поширення набули так звані веб-додатки. Сфера їх використання стрімко розширюється і проникає в усі галузі діяльності людини. Такий стрімкий розвиток зумовлений широкими можливостями до їх використання та можливостями використання ресурсів мережі Internet.

Особливої актуальності набувають веб-додатки, які використовуються в процесі колективної взаємодії, обслуговуванню масштабних процесів, організації колективних заходів, організації навчального процесу та ін. Перевагою такого роду систем є можливість опрацювання інформації великою кількістю людей. А це в свою чергу призводить до підвищення якості обробки інформації.

Ще однією можливістю використання веб-додатків є можливість використання обчислювальних алгоритмів на базі розподілених обчислень. Таким чином є можливість залучати для розв'язання складних задач велику кількість обчислювальних засобів, які працюють паралельно. Очевидно, використання таких підходів значно зменшує час розв'язання складних задач.

Метою моєї роботи є розробка системи генерування розкладу занять на базі веб-додатку з використанням розподілених обчислень. В процесі роботи алгоритму дані про викладачів та навчальні плани передаються з головної машини на локальні. На кожній із локальних машин запускається алгоритм випадкового пошуку, який дозволяє побудувати певне допустиме наближення оптимального розкладу. Після цього побудовані розклади надсилаються на машину-сервер, де серед усіх побудованих вибирається найкращий.

Система також дозволяє здійснювати корегування існуючих розкладів або ж розробляти новий розклад у ручному режимі. При цьому відбувається повний контроль сумісності та технічних обмежень.

Література

1. *Никсон Р.* Создаем динамические веб-сайты с помощью PHP, MySQL, JavaScript, CSS и HTML5 / Р. Никсон. – Санкт-Петербург: Питер, 2015. – 688 с.
2. *Логоша Б. А.* Комплекс моделей и методов оптимизации расписания занятий в вузе / Б.А. Логоша, А.В. Петропавловская // Экономика и математические методы. – 1993. – Т. 29, № 4. – С. 76-85.
3. *Уоссермен Ф.* Нейрокомпьютерная техника / Ф. Уоссермен // Теория и практика. – М.:Мир, 1992. – 184 с.

ПОБУДОВА УЗАГАЛЬНЕНИХ КАНОНІЧНИХ ПОЛІНОМІВ ФУНКЦІЙ ДВОЗНАЧНОЇ ЛОГІКИ

Сливка Аліна

4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Задання бульових функцій за допомогою канонічних поліномів (поліномів Жегалкіна) є досить зручним аналітичним способом задання цих функцій з урахуванням однозначності їх представлення такими поліномами. В поліном Жегалкіна кожна змінна X_i входить лише без заперечення (в прямому вигляді). Однак більш загальним є представлення бульових функцій за допомогою канонічних поліномів, у які кожна змінна може входити лише в прямому вигляді або лише із запереченням (в інверсному вигляді) [1, 2].

Використання узагальнених кон'юнктивних перетворень для побудови вказаних канонічних поліномів з урахуванням можливості застосування швидких перетворень дає можливість обійтися без побудови матриці відповідного перетворення і зменшити кількість необхідних при цьому арифметичних операцій [2].

Представимо $\tilde{\alpha}$-канонічний поліном бульової функції $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ у вигляді $f = a_0 \otimes R_{\tilde{\alpha}}^{(0,0,...,0)} \oplus a_1 \otimes R_{\tilde{\alpha}}^{(0,0,...,1)} \oplus \cdots \oplus a_{2^n-1} \otimes R_{\tilde{\alpha}}^{(1,1,...,1)}$.

З урахуванням властивості 4 матриці узагальненого кон'юнктивного перетворення $K_{\tilde{\alpha}}$ останню рівність можна переписати у матричному вигляді $f = K_{\tilde{\alpha}} \otimes a$. Оскільки над полем $GF(2)$ матриця $K_{\tilde{\alpha}}$ обернена сама собі, то $a = K_{\tilde{\alpha}} \otimes K_{\tilde{\alpha}} \otimes a$. Звідки отримаємо $a = K_{\tilde{\alpha}} \otimes f$. Отримана рівність є основою алгоритму побудови $\tilde{\alpha}$–канонічного полінома заданої бульової функції.

Література

1. *Супрун Б.П.* Об одном методе полиномиального разложения булевых функций / Б.П. Супрун // Кибернетика.– 1989.– № 5.– С.122-124.
2. *Трофимлюк О.Т.* Узагальнені кон'юнктивні перетворення дискретних сигналів та їх застосування / О.Т. Трофимлюк, І.А. Мич // Обробка сигналів і зображень та розпізнавання образів.– 1998.– С.35-36.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ОДНІЄЇ ОЦІНКИ ЗОЛОТАРЬОВА

Сослюк Максим Ігорович
4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Форос Євгенія Іванівна
4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Капустей Михайло Михайлович
аспірант

Слюсарчук Петро Володимирович
зав. кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу

Розглядається узагальнення на випадок різнорозподілених випадкових величин одієї із оцінок Золотарьова [1], що виражаються через псевдомоменти. Такі дослідження проводились у [2] і [3]. Завдяки новим оцінкам для характеристичних функцій, уточнюються деякі із результатів [2] і [3].

Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ - послідовність незалежних випадкових величин з $M\xi_k = 0$, $D\xi_k = \sigma_k^2$, $0 < \sigma_k < +\infty$, $B_n^2 = \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$, $\bar{\sigma}_n = max\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Позначимо: $F_k(x)$ - функція розподілу випадкової величини ξ_k, $S_n = \frac{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}{B_n}$, $\Phi_n(x)$ – функція розподілу S_n; $\Phi(x)$ – функція розподілу стандартного нормального закону.

Введемо псевдомоменти вигляду

$$\nu_i^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^3) \left| d\left(F_i(x\sigma_i) - \Phi(x)\right)\right|, \quad \bar{\nu}_n^{(0)} = max\left\{\nu_1^{(0)}, \dots, \nu_n^{(0)}\right\}.$$

Теорема 1. Нехай $sup\left\{\frac{\bar{\sigma}_n^2}{B_n^2} n : n \geq 1\right\} = b < \infty$ і для $n \geq 2$ $\frac{\bar{\sigma}_n^2}{B_n^2} \leq \frac{3}{4}$. Існує стала C, що для всіх $n \geq 1$ справедлива нерівність

$$\sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq C \frac{\bar{\sigma}_n}{B_n} \bar{\nu}_n^{(0)}.$$

Нехай

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)|\, dt = A < \infty. \tag{1}$$

Із цієї умови випливає, що випадкова величина ξ_1 має щільність розподілу, а тому і випадкові величини $S_n = \frac{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}{B_n}$ будуть мати щільність розподілу, яку позначимо через $P_n(x)$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Теорема 2. Нехай $n \geq 2$, $sup\left\{\frac{\bar{\sigma}_n^2}{B_n^2} n : n \geq 1\right\} = b < \infty$ і для $n \geq 2$ $\frac{\bar{\sigma}_n^2}{B_n^2} \leq \frac{3}{4}$, $\frac{B_n^2 - \sigma_1^2}{\bar{\sigma}_n^2} \geq 1$, $c \in (0; 2^{-1-b}]$, $\bar{\nu}_n^{(0)} \leq c$. Якщо виконується умова (1), тоді при $n \geq 2$ справедлива нерівність

$$\sup_{x \in R} |P_n(x) - \varphi(x)| \leq \bar{\nu}_n^{(0)} \frac{\bar{\sigma}_n}{B_n} \left(c^{(1)} + c^{(2)} A \bar{\sigma}_n\right),$$

де $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ – сталі, що залежать тільки від c.

При доведенні теореми використовуються наступні леми.

Лема 1. Нехай $\omega_k(t) = \left| f_k(t) - e^{-\frac{t^2\sigma_k^2}{2}} \right|$. Для всіх $t\epsilon\, R$ мають місце нерівності

$$\omega_k(t) \le \nu_k^{(0)} min\left(1, \frac{|t|^3\sigma_k^3}{6}\right) \le \nu_k^{(0)} \frac{t^2\sigma_k^2}{\sqrt[3]{36}},$$

Лема 2. Нехай $c\epsilon(0; 2^{-1-b})$ – будь-яка стала. Якщо $\bar{\nu}_n^{(0)} \le$ c і $|t| \le T_n^{(1)} =$ $= \frac{1}{\bar{\sigma}_n}\sqrt{-2\ln \bar{\nu}_n^{(0)}}$, то $|f_k(t)| \le e^{-c_1 t^2\sigma_k^2}$, де $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{36}} > 0$, а при $\bar{\nu}_n^{(0)} \le$ c і $|t| > T_n^{(1)}$

$$|f_k(t)| \le 2\left(\bar{\nu}_n^{(0)}\right)^{\frac{\sigma_k^2}{\bar{\sigma}_n^2}}.$$

Якщо $\bar{\nu}_n^{(0)} >$ c, $|t| \le T_n^{(2)} = \frac{1}{\bar{\sigma}_n}\frac{\text{c}}{\bar{\nu}_n^{(0)}}$, то

$$|f_k(t)| \le e^{-c_2 t^2\sigma_k^2},$$

де $c_2 = \frac{1}{2} - \frac{\text{c}\sqrt{e}}{6} > 0$.

Література

1. *Zolotarev V.M.* Exactness of an approximation in the central limit theorem / V.M. Zolotarev // Proceedings of the Second Japan – USSR Symposium on Probability Theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1973. – pp. 531-543.
2. *Слюсарчук П.В.* Узагальнення одного результату В.М.Золотарьова/ П.В. Слюсарчук, І.Й. Поляк //Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика.– 1998.– Вип.3. – С.184-189.
3. *Боярищева Т.В.* Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для різнорозподілених величин / Т.В. Боярищева, П.В. Слюсарчук// Науковий вісник Ужгородського університету. Серія матем. – 1999. – Вип.4. – С.12-16.

ОРГАНІЗАЦІЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНЬ В АЛГОРИТМАХ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ

Сотак Тюнде Юліївна

6 курс, спеціальність 8.04030101 «Прикладна математика»

Паралельні обчислення – це форма обчислень, в яких кілька дій проводяться одночасно. Ґрунтуються на тому, що великі задачі можна розділити на кілька менших, кожну з яких можна розв'язати незалежно від інших.

Система MPI (Message Passing Interface – інтерфейс передачі повідомлень) є основним засобом програмування сучасних високопродуктивних комп'ютерів [1].

Чисельні методи – це математичний інструментарій, за допомогою якого математична задача формулюється у вигляді, зручному для розв'язання на комп'ютері [2].

В роботі розглянуті наступні алгоритми:

I. Алгоритм Гауса розв'язання систем лінійних рівнянь

Нехай розглядається система n лінійних рівнянь, яка у матричному вигляді може бути записана як $Ax = b$, де $A = (a_{i,j})$ є матриця розмірності $n \times n$, а вектори b і x складаються з n компонент.

Під задачею розв'язання системи лінійних рівнянь для заданих матриці A і вектора b зазвичай розуміється знаходження значення вектора невідомих, при якому виконуються всі рівняння системи.

Перший паралельний алгоритм

Всі процеси програми послідовно пронумеровані від 0 до $p-1$, де p – загальна кількість процесів. Номер процесу називається рангом процесу.

Матриця коефіцієнтів A і вектор правих частин b розрізані горизонтальними смугами (кількість смуг – p). Кожна смуга завантажується у відповідний процес: нульова смуга – у нульовий процес (процес з рангом 0), перша – у перший процес і т. д., остання смуга – у $p-1$-й процес [1].

Метод Гауса включає послідовне виконання двох етапів:

1. прямий хід – система лінійних рівнянь за допомогою послідовного виключення невідомих зводиться до верхнього трикутного вигляду послідовно по процесам, при цьому відповідний процес передає свої рядки іншим процесам з більшими номерами.
2. обернений хід – послідовно по процесам, починаючи з останнього, здійснюється визначення невідомих.

Другий паралельний алгоритм

Матриця коефіцієнтів A розподіляється по процесам циклічними горизонтальними смугами з шириною смуги в один рядок. Перший рядок матриці поміщається в нульовий процес (процес з рангом 0), другий рядок – в перший процес і т.д., $p-1$-й рядок в p-й процес (де p – кількість процесів в системі). Потім p-й рядок знову поміщається в нульовий процес, $p+1$-й рядок у перший і т.д.

Рядок, який віднімається від усіх інших рядків (після попереднього ділення на потрібні коефіцієнти), назвемо *напрямним* рядком. Прямий хід полягає в наступному: спочатку напрямним рядком є рядок з індексом 0 в процесі 0, потім рядок з індексом 0 в процесі 1 і т. д., і нарешті, рядок з індексом 0 в останньому процесі. Після цього цикл повторюється і напрямним рядком стає рядок з індексом 1 в процесі 0, потім рядок з індексом 1 в процесі 1 і т.д [1]. Аналогічно, послідовно по процесам, починаючи з останнього за номером процесу, здійснюється обернений хід.

II. Множення матриці на вектор

Матриці і матричні операції широко використовуються при математичному моделюванні найрізноманітніших процесів, явищ і систем.

В результаті множення матриці A розміру $m \times n$ і вектора b, що складається з n елементів, виходить вектор c розміру m, кожен i-й елемент якого є результат скалярного множення i-го рядка матриці A (позначимо цей рядок через a_i) і вектора b.

$$c_i = a_i * b = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j, 0 \le i < m.$$

Отримання результуючого вектора c передбачає повторення m однотипних операцій по множенню рядків матриці A і вектора b. Будемо вважати, що матриця A є квадратною.

Для багатьох методів матричних обчислень характерним є повторення одних і тих же обчислювальних дій для різних елементів матриць. Даний момент свідчить про наявність паралелізму при виконанні матричних розрахунків. Вибір способу поділу матриць призводить до визначення конкретного методу паралельних обчислень.

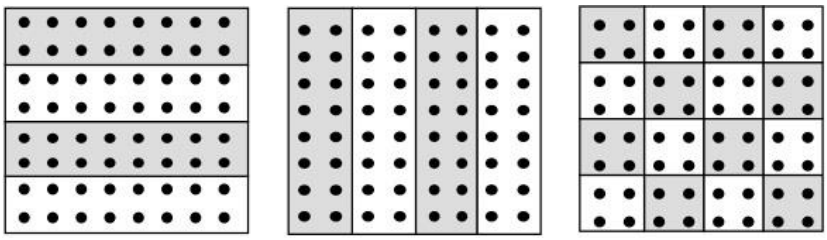


Рис.1. Способи розподілу елементів матриці між потоками

Розглянемо алгоритм множення матриці на вектор, коли матриця представляється горизонтальними смугами рядків. При такому способі поділу даних в якості базової підзадачі може бути обрана операція скалярного множення одного рядка матриці на вектор. Після завершення обчислень кожна базова підзадача визначає один з елементів вектора результату c.

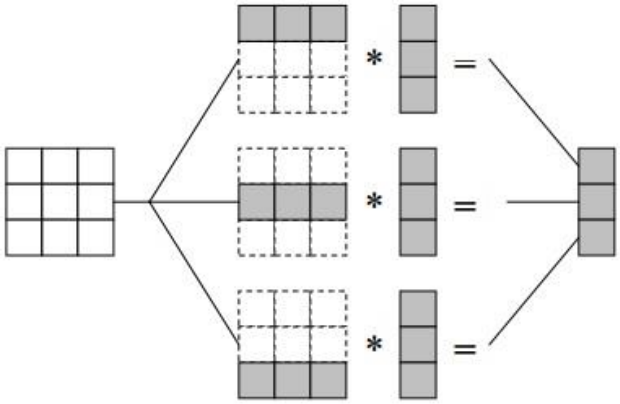


Рис.2. Організація обчислень при виконанні паралельного алгоритму множення матриці на вектор, заснованого на поділі матриці по рядках

Література

1. *Корнеев В.Д.* Параллельное программирование в MPI / В.Д. Корнеев.– Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2002. – 215 с.
2. *Фельдман Л.П.*. Чисельні методи в інформатиці / Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва – К.:Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.

РОЗРОБКА ІНФОРМАЦІЙНОГО РЕСУРСУ НА САЙТІ ЕЛЕКТРОННОГО НАВЧАННЯ ДВНЗ «УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ» ДЛЯ ТЕСТУВАННЯ З ГЕОМЕТРІЇ УЧНІВ 9-Х КЛАСІВ ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ ШКІЛ

Товт Наталія Миколаївна

4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

В мережі є багато варіантів та можливостей для підготовки до ЗНО. Зокрема, великий вибір проходження різних тестувань, в тому числі є й можливість спробувати пройти зовнішнє незалежне оцінювання за минулі роки. Тому, було розроблено інформаційний ресурс для дистанційного тестування на сайті електронного навчання ДВНЗ «Ужгородський національний університет» і для учнів 9-х класів загальноосвітніх шкіл.

Також, в роботі проаналізовано методику розв'язування задач з геометрії. Продемонстровані різні можливості та варіанти розв'язання однієї задачі. Володіючи лише базовими знаннями з геометрії, але вміючи логічно мислити, оперувати основними формулами та властивостями, учень має можливість розв'язати будь-яку задачу. Часто розв'язання задачі нестандартним способом є простішим, до того ж це цікавіше. Головне вміти використати свої творчі здібності та логічне мислення. А це в свою чергу сприяє свідомому засвоєнню математичних знань, розвитку розумової діяльності, навчає практичному використанню набутих умінь.

Розроблений курс містить 50 варіантів, по 12 завдань в кожному. Обрані задачі охоплюють весь об'єм навчального матеріалу з математики, що вивчають в середній школі. Це дає можливість учневі повторити всі теми та акцентувати увагу на найбільш проблемні для нього питання. Результат тестування об'єктивний, так як провіряється комп'ютером. Кількість набраних балів залежить від кількості правильних відповідей.

Література

1. *Мерзляк А.Г.* ДПА 2016: Збірник завдань для державної підсумкової атестації Математика 9 клас / Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. – Харків: Гімназія, 2016. – 160 с.
2. *Кушнір І. А.* Методи розв'язання задач з геометрії. Книга для вчителя / І.А. Кушнір. – Київ: Абрис, 1994. – 464 с.
3. Електронний ресурс: http://e-learn.uzhnu.edu.ua/login/index.php.

РОЗРОБКА ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ У ОСВІТНІХ ЗАКЛАДАХ

Тромбола Михайло Іванович

6 курс, спеціальність 8.04030101 «Прикладна математика»

Систему підтримки прийняття рішень можна визначити таким чином:

1) сукупність процедур обробки даних та суджень, що допомагають керівникам підприємств у прийнятті рішень, які базуються на використанні математичних моделей;
2) інтерактивні автоматизовані системи, що допомагають тим, хто приймає рішення, використовувати дані та моделі для розв'язання слабоструктурованих проблем;
3) система, що забезпечує користувачам доступ до даних і/або моделей, що сприяє у прийнятті рішень.

Задача побудови інформаційної системи полягає у розробці середовища для отримання інформації на основі баз даних, побудові звітів за вказаними шаблонами, здійснення обчислювальних операцій. Для розробки інформаційної системи побудови звітів на основі офісного пакету Microsoft Word, Microsoft Excel найкраще зарекомендувало себе середовище Microsoft Visual Studio з мовою програмування C#.

Важливою складовою інформаційної системи є підсистема доступу та зберігання даних. Оскільки інформаційна система повинна зберігати досить великий об’єм структурованої інформації, то виникла підзадача вибору реляційної системи керування базами даних.

У якості системи керування базами даних (СКБД) було розглянуто такі:

1) SQLite**:** потужна вбудована СКБД;
2) MySQL**:** найбільш популярна і часто використовувана СКБД;
3) PostgreSQL**:** найбільш гнучка СКБД.

Для розробки інформаційної системи з усіх вище перерахованих СКБД найбільшими перевагами і незначними недоліками характеризується SQLite.

Переваги SQLite:

- Файлове представлення: вся база даних зберігається в одному файлі, що збільшує її мобільність;
- Відповідність стандартам: SQLite використовує мову SQL.

Недоліки SQLite:

- Відсутність користувацького керування;
- Неможливість додаткового налаштування.

Як ми бачимо SQLite при її перевагах і недоліках – це найоптимальніший вибір для зберіганні даних при розробці інформаційної системи.

Література

1. *Edwards J.S.* Expert Systems in Management and Administration/ J.S. Edwards // Are they really different from Decision Support Systems European Journal of Operational Research. – 1992. – Vol. 61. – pp. 114-121.
2. *Фаулер М.* Архитектура корпоративных программных приложений: Пер. с англ. / М. Фаулер – М.:Издательский дом «Вильямс», 2007. – 544 с.

АНАЛІЗ ЕЛЕКТРОЕНЦЕФАЛОГРАМ ЗА ДОПОМОГОЮ НЕЙРОМЕРЕЖІ MLMVN З МЕТОЮ РАННЬОЇ ДІАГНОСТИКИ ЗАХВОРЮВАНЬ МОЗКУ

Федина Олена Петрівна
4 курс, напрям підготовки 6.040301 «Прикладна математика»

Електроенцефалограма (ЕЕГ) являє собою запис електричної активності нейронів головного мозку. Електроди накладаються на різні частини голови та реєструють активність нейронів різних ділянок мозку.

Орієнтуючись на те, що показує електроенцефалограма головного мозку, лікарі можуть виявити різні патології, наприклад ознаки пухлини і епілепсії. Варто відзначити і той важливий факт, що саме ЕЕГ є єдиним методом амбулаторного дослідження, за допомогою якого стає можливим проведення діагностики людини і у несвідомому стані. Більш того, дана методика не представляє небезпеки для пацієнтів будь-якої вікової категорії, включаючи дітей.

Використовуючи те, що показує електроенцефалографія головного мозку, медики можуть фіксувати вплив на хворих різних препаратів, оцінювати динаміку перебігу захворювання, а також вносити корективи в методи терапії. Продовжуючи розглядати особливості ЕЕГ, потрібно відзначити, що цей вид дослідження використовується для відстеження всіх змін у мозку – від оборотних до структурних. Це є одним з головних відмінностей даної методики від інших способів обстеження пацієнта.

На даний час стандартним методом аналізу ЕЕГ в клінічній діагностичній практиці є візуальний метод. При візуальному аналізі фахівець характеризує частоту хвиль і їх амплітуду, характер їх розподілу по корі головного мозку. Очевидно, що такий підхід до аналізу ЕЕГ є суб'єктивним. Крім того, при тривалому динамічному спостереженні цей процес стає надто трудомістким, що вимагає постійної присутності при реєстрації ЕЕГ фахівця-нейрофізіолога, який повинен володіти достатньо високим рівнем підготовки і досвідом роботи. Використання чисельних методів в електроенцефалографії зазвичай обмежується спектрально–кореляційними методами, які далеко не повністю відображують динаміку процесів в структурі мозку [2].

На даний час в літературі запропоновано багато методів спектрально-кореляційного аналізу ЕЕГ. До їх числа можна віднести, зокрема, безпосереднє перетворення Фур'є, розрахунок та аналіз кореляційної функції тощо. В той же час жоден з відомих методів ізольовано не в змозі повністю забезпечити повноцінну діагностику та дослідження біоелектричної активності мозку.

В моїй роботі розглядається аналіз електроенцефалограм на виявлення епілепсії. Дослідження проводились за допомогою нейромережі MLMVN [1] на даних, записаних в Боннському університеті (Німеччина) та доступних онлайн для експериментальної перевірки різних методів їхнього аналізу [3]. Для аналізу цих даних застосовується перетворення Фур'є, що дозволяє отримати розподіл сигналу по частотах. Потім спектри Фур'є нормалізуються і застосовується метод k-fold cross validation.

Література

1. *Aizenberg I. N.* Complex-Valued Neural Networks with Multi-Valued Neurons / *I. N Aizenber.* – Berlin; Springer, – 2011. –263 p.
2. *Зименковский Б. І.* Медичний словник Дорланда / *Б. І. Зименковский, П. В. Джуль.* – К.: Наутілус, – 2003. – 1354 с.
3. Клініка епілепсії Боннського університету (Німеччина) [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://epileptologie-bonn.de/cms/front_content.php?changelang=4

ВИКОРИСТАННЯ СУЧАСНИХ МЕТОДІВ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ

Федорянич Марія Василівна

7 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

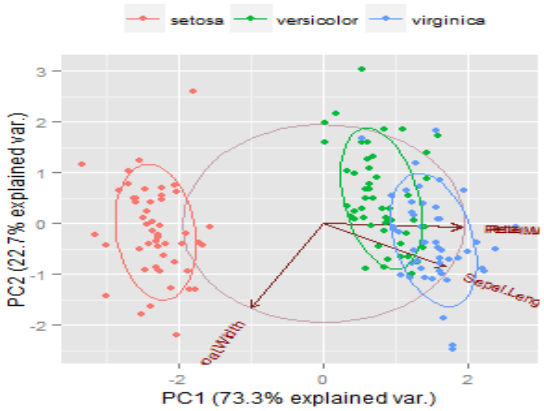
Досліджувана тема стає все більш актуальною, оскільки область застосування систем штучного інтелекту поширюється в різних галузях і включає: доведення теорем; ігри; розпізнавання образів; прийняття рішень; адаптивне програмування; створення машинної музики; обробка даних природною мовою; мережі, що навчаються (нейромережі); вербальні концептуальні навчання та ін. [1].

Метою інтелектуальних технології є знаходження нового знання, що користувач може надалі застосувати для поліпшення результатів своєї діяльності. Результат моделювання – це виявлені відношення в даних.

Найбільш масове застосування нейромереж (НМ) відзначається в задачах класифікації й кластеризації даних. Задачею класифікаторів є встановлення приналежності образа до одного з формально визначених класів. Під класифікацією розуміється віднесення деякого образа до класу, виконуване по цих формальних правилах і по сукупності ознак.

Для розв’язання задачі штучного інтелекту ми використали метод головних компонент. Метод головних компонент дає можливість по m — числу вихідних ознак виділити m головних компонент, або узагальнених ознак. Правильно відібрані в кореляційну модель ознаки, як правило, пов'язані між собою. Наявність таких зв’язків між ними дозволяє на основі одного фактора мати інформацію про інший. Існування тісного зв'язку між ознаками дає підставу для виключення однієї з них. Його використовують, як правило, при десятках взаємопов’язаних ознак. При цьому ставиться мета «набрати» певну частину загальної варіації результативної ознаки мінімальною кількістю змінних. Останні підбирають до тих пір, поки сума їх дисперсій не сягатиме заданої частки у дисперсії досліджуваного явища [2].

Для аналізу результатів роботи процедур та візуалізації були розглянуті набори даних «Ірисів Фішера». На підставі цих наборів було побудовано правило класифікації, яке визначає вид рослини за даними вимірювань. Це завдання класифікації, так як є три класи – три види ірису. У підсумку було отримано такий графік:



Отже, на основі таблиці «Об’єкт-властивість», використавши мову програмування R, ми змогли проаналізувати дані, зменшити їх розмірність та візуалізувати результати роботи програми.

Література

1. *Глибовець М.М.* Штучний інтелект / М.М. Глибовець, О.В. Олецький. – К.:КМ Академія, 2002. – 366 с.
2. *Померанцев А.Л.* Метод Главных Компонент (PCA) / А.Л. Померанцев. – М.:Российское хемометрическое общество, 2012. – 207 с.

ЗАСТОСУВАННЯ БАКСТЕРІВСЬКОГО ПІДХОДУ ДО ПОБУДОВИ ДОВІРЧИХ ІНТЕРВАЛІВ ПАРАМЕТРА ХЮРСТА

Цайбер Вікторія Ігорівна

6 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

Спостерігаючи значення величин $X(0), X\left(\frac{1}{n}\right), \dots, X(1)$, що відрізняється від справжніх значень випадкового процесу дробового броунівського руху $\{B_H(t), t \in [0,1]\}$ в точках

$$\left\{\frac{k}{n}, \frac{k+0.5}{n} \middle| 0 \le k \le n, n \ge 1\right\}$$

на величину похибки вимірювання $\varepsilon_{k,n}, 0 \le k \le n,\ \varepsilon_{k,n} \simeq N(0, \sigma^2)$ з відомою дисперсією σ^2 [2], побудовано неасимптоттичний довірчий інтервал для невідомого параметра Хюрста $H \le H^* \le 1$, де величина H^* – відома, причому

$$X\left(\frac{k}{n}\right) = B_H\left(\frac{k}{n}\right) + \varepsilon_{k,n}, X\left(\frac{k+0.5}{n}\right) = B_H\left(\frac{k+0.5}{n}\right) + \varepsilon_{k+0.5,n}.$$

Розглянемо послідовність бакстерівських сум [1]:

$$\hat{S}_n = n^{2H-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(X\left(\frac{k+1}{n}\right) - 2X\left(\frac{k+0.5}{n}\right) + X\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 - 6n\sigma^2\right), n \ge 1.$$

Функція

$$\theta(H) = 2^{2-2H} - 1, H \in (0;1)$$

є неперервною і спадною на інтервалі $(0;1)$. Нехай $g(\theta) = 1 - \frac{1}{2}\log_2(\theta + 1),\ \theta \in (0;3)$, – обернена функція до функції $\theta(H)$.

Теорема 1. Інтервал

$$\left(\hat{\theta}_n - \varphi_n; \hat{\theta}_n + \varphi_n\right) \cap (0;3), \qquad (1)$$

де

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{V_n(H)}{p}}, V_n(H) = \frac{18+2c_1}{n} + 72n^{2H-1}\sigma^2 + 8n^{4H-1}\sigma^4\left(8 + \frac{1}{n}\right) + \frac{2c_2^2}{n}\zeta(4),$$

$$c_1 = \sup_{H\in(0;1)}\left(\frac{6\cdot 2^{2H} - 4 - 4\cdot 3^{2H} + 2^{4H}}{2^{2H}}\right)^2,$$

$$c_2 = \sup_{H\in(0;1)}\left|\frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)}{8}\right|,$$

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}, \hat{\theta}_n = \hat{S}_n,$$

є довірчим інтервалом для параметра θ з рівнем довіри $1 - p \in (0;1)$.

Тоді образ інтервалу (1) при відображенні $g(\cdot)$ буде довірчим інтервалом з рівнем довіри $1 - p \in (0;1)$ для невідомого параметра Хюрста H випадкового процесу дробового броунівського руху $\{B_H(t), t \in [0,1]\}$.

Література

1. *Курченко О. О.* Одна сильно конзистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху / О. О. Курченко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002. – Вип. 67. – С. 88-96.
2. *Synyavska O. O.* Interval estimation of the fractional Brownian motion parameter in a model with measurement error / O. O. Synyavska // Theory of Stochastic Processes. – 2016. – Volume 21 (37), no. 1. – P. 84-90.

АЛГОРИТМИ СПЕКТРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ СИГНАЛІВ ТА ЗОБРАЖЕНЬ

Шак Анастасія Василівна

6 курс, спеціальність 8.04030101 «Прикладна математика»

В роботі досліджуються алгоритми знаходження спектрів функцій двозначної логіки. Розглядається задача побудови матриць кон'юнктивних перетворень, формул швидких перетворень, перетворення Адамара-Уолша, алгоритми дискретного та швидкого перетворення Фур'є.

Комплексні коефіцієнти Фур'є C_k періодичної функції $f(t)$ з періодом 2π можна отримати як скалярний добуток $f(t)$ і $e^{jkt}.C_k = \langle f(t), e^{jkt} \rangle$. Вектор f можна розкласти по ортонормованому базису, а коефіцієнти C_k можна визначити через скалярний добуток $f(t)$: e^{jkt}: $C_k = \langle f, e_k \rangle$. Тобто маємо: $C_k = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1} f_i e^{-i(2\pi/\mathrm{N})ki}$, $(k = 0,1,2,\ldots,\mathrm{N}-1)$. Це співвідношення називається дискретним перетворенням Фур'є (ДПФ) сигналу $\{f_0, f_1, \ldots, f_{\mathrm{N}-1}\}$.

У роботі розроблена програма, яка дозволяє знаходити кон'юнктивний спектр функції за допомогою звичайного матричного добутку та на основі формул швидких перетворень. Також реалізовано метод швидкого перетворення Фур'є (ШПФ), який носить назву «метелика». Виявилося, що знаходження спектру функції за допомогою алгоритму ШПФ займає набагато менше часу ніж знаходження спектру за формулами швидких перетворень. Така швидкодія алгоритму дозволяє створювати більш складні алгоритми обробки сигналів у реальному часі.

Література

1. *Трахтман А. М.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах / А.М. Трахтман, В.А. Трахтман. – М.: Советское радио, 1975. – 225 с.
2. *Голубов Б. И.* Ряды и преобразования Уолша: теория и применения / Б.И. Голубов, А.В. Ефимов, В.А. Скворцов – М.:Наука, 1987. – 343 с.

МОДЕЛІ І МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ РІШЕНЬ В ЕКОНОМІЦІ ТА ПІДПРИЄМСТВІ

Шеверя Людмила Вікторівна
6 курс, спеціальність 8.04020101 «Математика»

Концепція прийняття рішення в багатокритеріальних задачах прийняття рішень полягає у свідомому виборі з множини альтернатив однієї. Цей вибір робить особа, що приймає рішення (ОПР), яка прагне до досягнення своєї певної цілі. У ролі такої особи виступають чи окрема людина (прийняття індивідуальних рішень), чи група людей (прийняття колективних рішень), що володіють правами вибору рішення і несуть відповідальність за його наслідки.

Застосування математичних методів при прийнятті рішень допускає побудову математичної моделі, що формально представляє проблемну ситуацію, тобто ситуацію вибору рішення. Для задач прийняття рішень в умовах визначеності, коли випадкові і невизначені фактори відсутні, компонентами такої моделі є: множина альтернатив (рішень) X, з якої і слід зробити вибір однієї найкращої альтернативи (оптимального розв'язку), і опис переваг особи, що приймає рішення. Для того, щоб була забезпечена можливість (воля) вибору, множина альтернатив X повинна містити не менш двох елементів.

При наявності числових оцінок наслідків порівняння альтернатив за перевагою ОПР здійснюється не безпосередньо, а за допомогою заданих на X числових функцій $f_1, f_2,..., f_m$, які називаються критеріями (показниками корисності чи ефективності, критеріальними функціями, цільовими функціями і т.п.).

У багатокритеріальній задачі кожний розв'язок $x \in X$ цілком характеризується своєю оцінкою y=f(x) і тому вибір оптимального розв'язку зводиться до вибору оптимальної оцінки з множини Y всіх досяжних оцінок.

Природно, що найбільш просто порівнювати за перевагою ті векторні оцінки, що відрізняються одна від одної лише однією компонентою. У загальному випадку, значення критерію f_i можуть по-різному співвідноситися за перевагою ОПР у залежності від того, які значення всіх інших критеріїв.

Розглядається скінченновимірна задача багатокритеріальної максимізації:

$$f(x) \to \max,$$
$$x \in X,$$

де X – множина альтернатив, яка є множиною з простору E^n; $f(x) = (f_i(x))_{i \in M}$ – вектор критеріїв, який задається відображенням $f : X \to E^m$; $M = \{1,2,...,m\}$ - множина індексів критеріїв, m – кількість критеріїв. У таких задачах множина альтернатив X, як правило, виділяється з якоїсь більш широкої множини $D \subseteq E^n$ за допомогою обмежень, що найчастіше представляються у виді нерівностей: $X = \{x \in D | g_1(x) \ge 0, g_2(x) \ge 0, ..., g_k(x) \ge 0\}$, де $g_i(x), j = 1,2,...,k,$ – числові функції, які визначені на D. При цьому вважається, що і вектор критеріїв $f(x) = (f_1(x), f_2(x),..., f_m(x))$ також визначений на D. В багатокритеріальній задачі максимізації із двох векторних оцінок, що відрізняються лише однією компонентою, переважнішою буде та, у якої ця компонента більша.

Література

1. *Авдул П.В.* Економіко-математичні методи і моделі для керівника / П.В. Авдул, Е.І.Гойзман, В.А.Кутузов та ін. – К.:Економіка, 1998. – 413 с.
2. *Бейко И. В.* Методы и алгоритмы решения задач оптимизации / И.В. Бейко, Б.Н. Бублик, П.Н. Зинько. – К.:Высш. школа, 1983. – 512 с.

ПОБУДОВА УЗАГАЛЬНЕНИХ ПОЛІНОМІВ ФУНКЦІЙ ДВОЗНАЧНОЇ ЛОГІКИ ТА ЇХ МІНІМІЗАЦІЯ

Шелевер Олександра Василівна

4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»

Задання бульових функцій за допомогою канонічних поліномів (поліномів Жегалкіна) є досить зручним аналітичним способом задання цих функцій з урахуванням однозначності їх представлення такими поліномами. В поліном Жегалкіна кожна змінна x_i входить лише без заперечення, тобто в прямому вигляді. Однак більш загальним є представлення бульових функцій за допомогою канонічних поліномів, у які кожна змінна може входити лише в прямому вигляді або лише в інверсному вигляді [1, 2].

Використання узагальнених кон'юнктивних перетворень для побудови вказаних канонічних поліномів з урахуванням можливості застосування швидких перетворень дає можливість обійтися без побудови матриці відповідного перетворення і зменшити кількість необхідних при цьому арифметичних операцій [2].

Поліномом Жегалкіна (або канонічним поліномом) булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається поліном, утворений із булевих змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, який задає цю функцію.

Очевидно, що різні узагальнені канонічні поліноми задають різні бульові функції. Задача побудови узагальненого канонічного поліному розв'язується однозначно.

Представимо канонічний поліном функції у вигляді

$$f = \alpha_0 \otimes R^{(0,0,\dots,0)} \oplus \alpha_1 \otimes R^{(0,0,\dots,1)} \oplus \dots \oplus \alpha_{2^n-1} \otimes R^{(1,1,\dots,1)}.$$

З урахуванням властивостей матриці узагальненого кон'юнктивного перетворення $K_{\tilde{\alpha}}$, останню рівність можна переписати у матричному вигляді $f = K_{\tilde{\alpha}} \otimes \alpha$, де $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1})$ – вектор коефіцієнтів полінома.

Оскільки над полем *GF(2)* матриця $K_{\tilde{\alpha}}$ обернена сама собі, то $\alpha = K_{\tilde{\alpha}} \otimes K_{\tilde{\alpha}} \otimes \alpha$. Звідки з урахуванням визначення канонічного полінома f отримаємо $\alpha = K_{\tilde{\alpha}} \otimes f$. Ця рівність є основою алгоритму побудови узагальненого канонічного полінома заданої бульової функції.

Література

1. *Супрун Б.П.* Об одном методе полиномиального разложения булевых функций / Б.П. Супрун // Кибернетика.– 1989.– № 5.– С.122-124.
2. *Трофимлюк О.Т.* Узагальнені кон'юнктивні перетворення дискретних сигналів та їх застосування / О.Т. Трофимлюк, І.А. Мич // Обробка сигналів і зображень та розпізнавання образів.– 1998.– С.35-36.

ПРО МІНІМАЛЬНІ НЕЗВІДНІ МАТРИЧНІ ГРУПИ

Яцина Маріанна Юріївна
4 курс, напрям підготовки 6.040201 «Математика»
Кирилюк Олександр Антонович
Доцент кафедри алгебри

Вивчення скінченних підгруп повної лінійної групи $GL(n, K)$ над областями головних ідеалів K є актуальною задачею теорії лінійних груп над кільцями.

Вперше мінімальні незвідні підгрупи групи повної лінійної групи над полем почав вивчати Д. О. Супруненко [1]. Він та В. П. Юферев [2] описали всі мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q, F)$, де q – просте число, а F– поле. В роботах П. М. Гудивка, В. П. Рудька, О. А. Кирилюка та інших (див. [3, 4]) вивчались мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q, R)$, де R – дискретно нормоване кільце.

В даній роботі вивчаються з точністю до спряженості мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q, Z_p)$, де q – просте число, Z_p – кільце цілих раціональних p-адичних чисел поля Q_p.

Доведено теорему.

Теорема. Нехай p = 2, $\psi(q)$ – число класів спряжених мінімальних незвідних розв'язних підгруп групи $\mathrm{GL}(\mathrm{q}, \mathrm{Z}_2)$, т – показник, якому належить 2 за модулем q. Тоді $\psi(q) \geq 2^{s+1} - 1$, де $s = (q-1)/m$. Якщо 2 є первісним коренем за модулем q, то мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $\mathrm{GL}(\mathrm{q}, \mathrm{Z}_2)$ з точністю до спряженості вичерпуються групами:

$$W_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Література

1. *Супруненко Д. Е.* Минимальные неприводимые разрешимые линейные группы простой степени / Д. Е. Супруненко // Труды Моск. Матем. об-ва. – 1973. – Т. 29. – С. 223-234.
2. *Юферев В. П.* Классификация минимальных неприводимых линейных групп простой степени / В. П. Юферев // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1975. – № 5. – С. 96-97.
3. *Кирилюк А. А.* Классификация минимальных неприводимых разрешимых подгрупп группы $GL(3, R_p)$ / А. А. Кирилюк // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.. – 2000. – Вип. 5. – С. 41-48.
4. *Гудивок П. М.* О минимальных неприводимых подгруппах полной линейной группы над кольцом целых P-адических чисел / П. М. Гудивок, А. А. Кирилюк // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. 37-44.