МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра математичного аналізу

М Е Т О Д И Ч Н І В К А З І В К И
до практичних та лабораторних занять
З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ
для студентів математичного факультету

УЖГОРОД – 2004

ВСТУП

Метою викладання теорії ймовірностей є роз'яснення студентам методологічних проблем, які виникають при математичному аналізові реальних масових випадкових явищ, а також виклад основних ідей, методів, понять математичного апарату даної науки, вироблення на відміну від звичного детермінованого так званого імовірнісного способу міркування. В результаті вивчення курсу теорії ймовірностей і математичної статистики студент повинен набути певних навичок у побудові математичних моделей випадкових явищ, оволодіти методами математичного дослідження стохастичних явищ (переклад реальної задачі на математичну мову, вибір оптимального методу її дослідження і розв'язання, інтерпретація одержаних результатів і т.п.) та розвивати на цій основі логічне і алгоритмічне мислення. Для успішного засвоєння курсу теорії ймовірностей студенту необхідно володіти основами комбінаторики, диферінціальним і інтегральним численням, окремими розділами функціонального аналізу.

В даній методичній розробці показано розв'язки типових вправ. Наведено задачі для самостійних та лабораторних робіт для студентів математичного факультету. Призначення пункту „ Розв'язування типових вправ" визначено його назвою. Основна увага тут приділяється не кількості задач, а їх різноманітності. При підборі цих завдань використані різні джерела, в тому числі добре відомі збірники задач вказані в списку використаних джерел. Дана методична розробка сприятиме кращою оволодіванню практичного матеріалу з теорії ймовірностей. Автор сподівається, що дана навчально-методична розробка сприятиме конкретизації самостійної роботи студента при вивченні студентами нормативного курсу „ Теорія ймовірностей і математична статистика"

Автор старший викладач кафедри математичного аналізу Поляк І.Й.

Заняття 1. Елементи комбінаторики.

Запитання для самоперевірки.

1. Сформулюйте основний принцип комбінаторики.
2. Які є основні типи сполук.
3. Які сполуки називаються розміщення , перестановками, комбінаціями (без повторень)?
4. Випишіть формули для знаходження числа розміщень та комбінацій з n елементів по k $(k \le n)$.
5. Випишіть формули для знаходження числа розміщень, перестановок комбінацій з n елементів по k, якщо елементи в сполуках можуть повторюватися.

Розв'язування типових вправ.

1. Скільки чотиризначних чисел можна скласти із цифр 0,1,2,3,4,5, якщо
   а) жодна з цифр не повторюється;
   б) цифри можуть повторюватися;
   в) числа повинні бути непарними (цифри повторюються)?

Розв'язування.

а) Першою цифрою повинна бути одна із п'яти цифр 1,2,3,4,5. Якщо перша цифра вибрана, то друга може бути вибрана 5 способами, третя – 4 способами, четверта – 3 способами. Згідно правила множення, всіх чотиризначних чисел скласти $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.

б) Першою цифрою може бути одна з цифр 1,2,3,4,5 (5 випадків), для кожної з наступних цифр маємо 6 способів вибору (0,1,2,3,4,5,6). Отже, всіх чисел будемо мати $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$.

в) Перша цифра може бути одна із цифр 1,2,3,4,5, а останньою одна з цифр 1,3,5 (числа повинні бути непарними). Отже, всіх непарних чисел можна скласти $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$.

2. В урні міститься 7 білих та 8 чорних куль. Скількома способами із урни можна вийняти а) 5 довільних куль; б) 5 білих куль; в) 2 білі і 3 чорні кулі?

Розв'язання.

а) Вважаємо 15 куль в урні як 15-елементну множину з якої вибірку із 5 довільних куль (без повернення і без врахування порядку куль у вибірці) можна здійснити $C_{15}^5 = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5!} = 3003$.

б) Вибір 5 білих куль можна здійснити $C_7^5 = C_7^2 = \dfrac{7 \cdot 6}{2!} = 21$ способом.

в) Вибірку із 2 білих та 3 чорних (всього 5 куль із 15) можна здійснити $C_7^2 \cdot C_8^3 = \dfrac{7 \cdot 6}{2!} \cdot \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 1176$ способами (використано правило множення).

3. Автомобільний номер складається із трьох букв і чотирьох цифр. Скільки авто номерів можна скласти із 10 цифр та 32 букв російського алфавіту?

Розв'язання.

Якщо цифри і букви в авто номерах не повторюються, то впорядкований набір із трьох букв можна здійснити $A_{32}^{3} = 32 \cdot 32 \cdot 30 = 29760$ способами. За правилом множення всього авто номерів можна скласти $n = A_{32}^{3} \cdot A_{10}^{4} = 29760 \cdot 5040 = 149990400$.

Якщо ж цифри і букви в авто номерах можуть повторюватися, то всього авто номерів можна скласти $n = 32^{3} \cdot 10^{4} = 327680000$.

Лабораторна робота № 1

Варіант 1.

1.Скільки можна утворити всіх п'ятизначних телефонних номерів ?

2. У розіграші першості країни з футболу беруть участь 17 команд. Скількома способами можуть бути розподілена золота, срібна, бронзова медалі ?

3.Нехай $ð_{1,} ð_{2}, ..., ð_{n}$ - різні прості числа. Скільки дільників має число $m = ð_{1}^{\alpha_1} ð_{2}^{\alpha_2} ... ð_{n}^{\alpha_n}$ де $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - деякі натуральні числа.

4.Студенти другого курсу згідно учбового плану вивчають 10 дисциплін. На один день можна планувати заняття з трьох дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на один день?

5.Скількома способами можна розмістити 9 осіб у трьох вагонах потяга так, щоб в першому було - 2, в другому – 3 в третьому – 4 особи?

Варіант 2.

1.Скільки можна утворити всіх одинадцятизначних телефонних номерів у яких номер починається цифрою 8, а друга – 0, третя – 5, четверта – 0 ?

2.В університетський спартакіаді беруть участь 14 команд. Скількома способами команди можуть посісти перше, друге та третє місця?

3.У прямокутній таблиці з m рядків і n стовпців треба записати числа +1 і -1 так, що добуток чисел у кожному рядку й кожному стовпці дорівнював 1. Скількома способами це можна зробити?

4.Є p білих і q чорних куль $(p > q)$. Скількома способами можна розташувати в ряд усі кулі, так, щоб ніякі 2 чорних кулі не лежали підряд.

5.В опуклому n- кутнику проведено всі діагоналі. Відомо, що жодні три з них не перетинаються в одній точці. На скільки частин поділиться при цьому багатокутник?

Варіант 3

1.Скількома способами можна поділити $m + n + s$ предметів на три групи так, щоб в одній групі було m предметів, у другій - n, у третій - s ?

2. автомобільний номер складається з двох літер і чотирьох цифр. Яке число різних номерів можна скласти , використовуючи 26 літер латинського алфавіту?

3.З міста А до міста В веде n доріг, а з В до С - m. Скількома способами можна здійснити подорож маршрутом А-В-С?
4.Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1,2,3,...,n\}$ так, щоб числа 1,2,3 стояли поруч в зростаючому порядку?
5.Скількома способами можна з 9 осіб вибрати комісію, що складається з чотирьох осіб?

Варіант 4
1.Скількома способами 7 осіб можуть стати в чергу до каси?
2.Скільки тризначних чисел можна записати цифрами 0,1,2,3,4, якщо кожну з них використовувати не більше одного разу?
3.У ск5ількох точках перетинаються діагоналі опуклого n- кутника , якщо жодні три з них не перетинаються в одній точці?
4.У розіграшу першості країни з футболу беруть участь 16 команд. Команди, які посідають перше, друге й третє місця, нагороджуються відповідно золотою, срібною та бронзовою медалями, а команди, які опиняться на двох останніх місцях, залишають вищу лігу. Скільки різних результатів першості може бути?
5.Скількома способами читач може вибрати три книги з п’яти?

ЗАНЯТТЯ 2-3.Стохастичний експеримент. Класичне означення ймовірності. Геометричні ймовірності.

Запитання для самоперевірки.

1. Що таке стохастичний експеримент?
2. Які події називають випадковими? Достовірними? Неможливими?
3. Дайте означення основних операцій над подіями.
4. Які події а) називаються несумісними? б) утворюють повну групу?
5. Випишіть основні властивості, яким задовольняють операції над подіями.
6. Що називається а) відносною частотою події? б) статистичною ймовірністю?
7. Сформулюйте класичне означення ймовірності.
8. Перелічить основні властивості ймовірності. В якій схемі використовуються геометричні ймовірності?

Розв’язування типових вправ.

1. Із урни, яка містить $n=7$ білих та $m=8$ чорних куль навмання вибирають $k=5$ куль. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться : а) рівно 2 білі і 3 чорні кулі; б) жодної білої кулі; в) хоча б одна біла куля.

Виписати відповідь в загальному вигляді. Довести, що $\sum_{r=0}^{k} C_n^r \cdot C_m^{k-r} = C_{n+m}^k$.

Розв’язування.
Можливі наслідки експерименту – набори з 5 куль взятих із даних 15 куль. Число все можливих таких наборів дорівнює $C_{15}^5=3003$. а) нехай подія $A_2\left\{\text{ð³âí î 2 á³ë³ êóë³ ñåðåä 5 âèáðàí èõ}\right\}$. Сприятливих випадків для події $A_2 \in C_7^2 C_8^3=1176$. Тому $P(A_2)=C_7^2\cdot C_8^3/C_{15}^5=0,3916$.
б)подія $A_0=\left\{\text{æ î äí î ¿· á³ëî ¿· êóë³· ñåðåä· 5· âèáðàí èõ}\right\}$ $P(A_0)=C_7^0\cdot C_8^5/C_{15}^5=0,112$
в) подія $B=\left\{\text{õî ÷à· á ·1· á³ëà· êóëÿ· ñåðåä· 5· âèáðàí èõ}\right\}$. Тоді протилежна до В подія $\bar{B}=A_0 \quad P(B)=1-P\left(\bar{B}\right)=0,888$.

<u>Зауваження</u> . Якщо подія $A_r=\left\{\text{ð³âí î · r · á³ëèõ· êóëü· ñåðåä · ê · âèáðàí èõ}\right\}$, то $P_r=P(A_r)=C_n^r\cdot C_m^{k-r}/C_{n+m}^k;(0\le r\le k)$. Ймовірності $P_r(r=0,1,2,...,k)$ утворюють гіпергеометричний розподіл ймовірностей.
Оскільки $\bigcup_{r=0}^{k}A_r=\Omega, \text{ò î} \sum_{r=0}^{k}P_r=1; A_i\cdot A_j=\varnothing, i\ne j$, тобто $\sum_{r=0}^{k}C_n^r\cdot C_m^{k-r}=C_{n+m}^k$.

2. Навмання вибирається п’ятизначний телефонний номер. Знайти ймовірності таких подій:
   $A=\left\{\text{âñ³·öèô ðè · ð³çí ³}\right\};$ $B=\left\{\text{î · ñ}\right\};$
$C=\left\{\text{í î ì åð ï î ÷èí à°ò üñÿ öèô ðî þ 3³° ïàðí èì ÷èñëî ì}\right\}$.

Розв’язування. Всього п’ятизначних телефонних номерів із 10 цифр 0,1,2,...,9 можна сформувати $n=10^5=100000$ (від 0-00-00 до 9-99-99 включно). Із них для події А сприятливих випадків виявиться $m_A=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6=30240.$ Тому маємо $P(A)=\frac{m_A}{n}=0,3024$.
Аналогічно міркуючи, знаходимо число сприятливих випадків для події В: $m_B=10^4$ і для події С: $m_C=1\cdot10\cdot10\cdot10\cdot5=5\cdot10^3$. Отже, $P(B)=0,1;\quad P(C)=0,05.$

3. На відрізку $[-1;2]$ навмання вибирають два дійсні числа. Знайти Р(А), Р(В),Р(АВ),якщо
   подія $A=\left\{\text{ñóì à âèáðàí èõ ÷èñåë á³ëüø à î äèí èö³}\right\}$,
   $\text{ï î ä³ÿ } Â=\left\{\text{äî áóò î ê âèáðàí èõ ÷èñåë ì åí ø èé î äèí èö³}\right\}$
4. Розв’язування. Нехай x,y – вибрані числа. Тоді простір елементарних подій є множиною точок квадрату $\Omega=\{(x;y)\}$.
   $\Omega=\{(x,y)/-1\le x\le 2,-1\le y\le 2\}$, а подіями А, В, АВ є множини точок квадрату Ω, заштрихованих на малюнках:
Обчислимо площу квадрату Ω і його заштрихованих частин:
   $(\Omega)=3\cdot3=9;\quad ï\,ë.(À)=0,5ï\,ë.(\Omega)=4,5$

Пл. $ï\,ë.(Â)=6+\int_{0,5}^{2}\frac{1}{õ}dx=6+2\ln 2;$

   $ï\,ë.(ÀÂ)=4,5-\int_{0,5}^{2}\left(2-\frac{1}{õ}\right)dx=1,5+2\ln 2.$

За геометричними ймовірностями маємо $P(A)=\text{ï ë.}(\text{À})/\text{ï ë.}(\Omega)=0{,}5;\quad \text{Ð}(\text{Â})=\text{ï ë.}(\text{Â})/\text{ï ë.}(\Omega)=0{,}82;$

$\text{Ð}(\text{ÀÂ})=\text{ï ë.}(\text{ÀÂ})/\text{ï ë.}(\Omega)=(3+4\ln 2)/18=0{,}32$

5. Яка ймовірність того, що сума трьох взятих на угад відрізків, довжина кожного з яких не перевищує l, буде більшою за l?

Розв'язування. Нехай x,y,z- довжини вибраних відрізків. Тоді простір елементарних подій є множина точок (x,y,z) куба $\Omega=\{(x,y,z)/0\le x\le l, 0\le y\le l, 0\le z\le l\}$ з ребром l і розміщеного в першому октанті. Подія $B=\{(x,y,z)/x+y+z>l\}$ є множиною цього куба, розміщених під площиною $x+y+z=l$. Тому маємо $P(B)=V_B/V_\Omega=\frac{5}{6}l^3/l^3=\frac{5}{6}$.

Лабораторна робота № 2

Варіант 1.

1.Двічі підкидають монету; побудувати простір елементарних подій Ω цього статистичного експерименту. Описати як підмножини Ω події: А- принаймні один раз зявився герб, В- при другому підкиданні зявився герб. Знайти число всіх елементарних подій; число елементарних подій, що входять до А; до В.

2.У навмання вибраній групі, яка містить r студентів (наприклад, академічна група), цікавимося їхніми днями народження. Обчислити ймовірність події А, яка полягає в тому, що принаймні у двох студентів дні народження збігаються.

3. Куб, грані якого пофарбовано, розпиляли на тисячу кубиків однакового розміру. Кубики перемішали. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кубик: а) пофарбований; б) має дві пофарбовані грані; в) має три пофарбовані грані.

4. Серед N виробів M бракованих. Навмання беруть n виробів. Яка ймовірність того, що серед них m бракованих $(m<M)$? Яка ймовірність того, що серед них більш ніж m бракованих?

Варіант 2.

1. Гральний кубик підкидають двічі. Запропонувати (побудувати) простір елементарних подій Ω. Описати як підмножини Ω події: А – сума очок, що з'явилися, дорівнює 8; В – принаймні один раз з'явиться 6; С – при першому підкиданні з'явиться парне число очок; D – на обох кубиках з'явиться непарне число очок. Знайти число елементарних подій в Ω, А, В, С, D.
2. У навмання вибраній групі, яка містить r студентів (наприклад, академічна група), цікавимося їхніми днями народження. Обчислити ймовірність події А, яка полягає в тому, що принаймні два з них народилися в одному й тому самому місяці.

3. Підкидають три монети. Знайти ймовірності подій: А – на першій монеті випав „герб”; В – випало рівно два „герба”; С – випало не менше двох „гербів”.
4. На екзамені пропонуються N питань. Студент знає відповіді на n питань. Екзаменатор ставить студенту k питань, а для того щоб скласти екзамен, треба відповісти не менш ніж на r $(r < k)$. Яка ймовірність того, що студент складе екзамен?

Варіант 3

1. Підкидають монету, а після цього гральний кубик. Запропонувати (побудувати) простір елементарних подій Ω. Описати як підмножини Ω події: А – з’явиться герб; В – з’явилася цифра 5. Знайти число елементарних подій в Ω, А,В.
2. Студент прийшов на екзамен, знаючи 20 з 25 питань програми. Екзаменатор ставить студенту 3 питання. Обчислити ймовірність того, що: 1) студент знає відповіді на всі питання; 2) студент знає відповіді на два питання; 3) студент складе іспит (якщо для цього треба відповісти не менш ніж на два питання); 4) студент не складе іспит.
3. Підкидається два гральних кубики. Знайти ймовірність подій: А – сума очок, що випали, ділиться на 6, В – сума очок ділиться на 2, С – добуток є парним числом.
4. Учасник лотереї „Спорт лото” з 49 назв видів спорту (позначених числами 1-49) має назвати 6. Повний виграш отримує той, хто правильно вкаже всі шість назв. Виграш отримують і ті , хто вгадає не менше трьох назв. Обчислити ймовірність повного виграшу в „Спорт лото”. Обчислити ймовірність того, що учасник „Спорт лото” вгадає 5,4,3 назви. Яка ймовірність отримати виграш у „Спорт лото”?

Варіант 4.

1. У ліфті 7 пасажирів, ліфт зупиняється на 10 поверхах. Для кожного пасажира фіксується номер поверху, на якому він вийшов. Запропонувати (побудувати) простір елементарних подій Ω. Описати як підмножину Ω подію А- всі пасажири вийшли на різних поверхах. Знайти число елементарних подій в Ω, А.

2.У шаховому турнірі беруть участь 20 чоловік, які за жеребкуванням поділяються на дві групи по 10 чоловік кожна. Яка ймовірність того, що: а) двоє найсильніших учасників гратимуть у різних групах; б) четверо найсильніших гравців будуть грати по два в різних групах?

3.З урни, що містить $Ì_1$ куль з номером 1, $Ì_2$ куль з номером 2, ...,$Ì_N$ куль з номером N випадково вибирається n куль. Обчислити ймовірність події А – зявилося m_1 куль з номером 1, m_2 куль з номером 2, ... ,m_N куль з номером N.

4.Підкидаються 12 гральних кубиків. Яка ймовірність того, що кожне з чисел 1,2,3,4,5,6 випаде двічі?

Варіант 5.

1.Підкидають три гральних кубики. Запропонувати (побудувати) простір елементарних подій Ω. Описати як підмножини Ω події: A – тільки на одному кубику випала одиниця, B – тільки на двох кубиках випала шістка, C – на кубиках випали різні грані, D – на кубиках випало однакове число очок. Знайти число елементів в Ω, A, B, C, D.

2.У ліфті 7 пасажирів. Ліфт зупиняється на десяти поверхах. Яка ймовірність того, що ніякі два пасажири не вийдуть на одному й тому самому поверсі?

3.Обчислити ймовірність того, що чотиризначний номер випадково взятого автомобіля у великому місті: а) складається з різних цифр; б) має тільки дві однакові цифри; в) має дві пари однакових цифр; г) має тільки три однакові цифри; д) складається з однакових цифр.

4.Підкидають шість гральних кубиків. Обчислити ймовірність того, що сумарне число очок, що випало, дорівнюватиме 7.

ЗАНЯТТЯ 4. АКСІОМАТИЧНЕ ОЗНАЧЕНЯ ЙМОВІРНОСТІ. ЙМОВІРНІСНИЙ ПРОСТІР.

Запитання для самоперевірки.

1. Що називається а) алгеброю? б) σ - алгеброю подій?
2. Що називається мірою множини? Ймовірнісною мірою?
3. Сформулюйте аксіоми Колмогорова А.М.
4. Що таке а) вимірний простір? б) імовірнісний простір?

Розв'язування типових вправ.

1. Гральний кубик підкидають двічі. Побудувати імовірнісний простір. Описати події:

$$A=\left\{\text{ñóì à î ÷î ê, ÿê}^{3}\text{ âèï àëè, äî ð}^{3}\text{âíþ }^{o}\text{ 8}\right\}$$

$$\hat{A}=\left\{\text{ï ðèí àéì í }^{3}\text{ î äèí ðàç ç"ÿâèò üñÿ 6}\right\}$$

Знайти $P(A), P(B), P\left(\bar{A}\right), P\left(\bar{B}\right), P(AB), P(A\cup B)$.

Розв'язування. Простір елементарних подій $\Omega=\{(i,j)/1\le i,j\le 6\}$, тобто елементарними подіями є точки (i,j) матриці $\Omega=\begin{pmatrix}(1.1) & (1.2) & ... & (1.6)\\ (2.1) & (2.2) & ... & (2.6)\\ - & - & - & -\\ (6.1) & (6.2) & ... & (6.6)\end{pmatrix}$

Ω містить 36 елементарних подій.

Алгебра подій – все можливі підмножини точок матриці Ω містить 2^{36} подій. Зокрема, подія $A=\{(2,6);(3,5);(4,4);(5,3);(6,2)\}$, а подія

$B=\left\{(i,6);i=\overline{1,5};(6,6);(6,j),\ j=\overline{1,5}\right\}$ містить 11 точок $\omega\in\Omega$. Вважаючи всі події рівно можливими, покладемо $P_i=P(\omega_i)=\frac{1}{36}$.

Тоді $P(A)=\sum\limits_{(j:\omega_i\in A)}P_i=\frac{5}{36};\ P(B)=\frac{11}{36}$, $\{\Omega,U,P\}$ – імовірнісний простір, бо всі властивості 1), 2), 3), I), II), III) тут виконуються.

Тому маємо: $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=\frac{31}{36};\quad P\left(\overline{B}\right)=\frac{25}{36};\quad P(AB)=\frac{2}{36};$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{14}{36}.$$

2. Нехай експеримент полягає у вимірюванні двох величин, які набувають значення із відрізка $[0,1]$. Побудувати імовірнісний простір.

Розв'язування. Простір елементарних подій $\Omega=[0,1]\times[0,1]$, т.б. це є множина точок площини з квадрату $\{(x,y)/0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, U - все можливі борелівські підмножини точок з квадрату Ω. Якщо $A\in U$, то покладемо $P(A)=m(A)$, де $m(\cdot)$ - міра Лебега / для квадровних $A\, m(A)=\text{ï ë.}(\text{À})$/ .

Елементарною перевіркою властивостей 1), 2), 3), I), II), III) переконуємося в тому, що $\{\Omega,U,P\}$ є імовірнісним простором.

Якщо, наприклад, $A=\left\{(x,y)/x^2+y^2\le 1;\ x\ge 0, y\ge 0\right\}$, то

$$P(A)=\text{ï ë.}(\text{À})/\text{ï ë.}(\Omega)=\frac{\pi}{4}=0,7854.$$

Якщо ж $B=\left\{(x,y)/x+y\le 1;\ x\ge 0, y\ge 0\right\}$, то

$$P(B)=\text{ï ë.}(B)/\text{ï ë.}(\Omega)=0,5;\ P\left(A\overline{B}\right)=0,284.$$

3. Підкидають гральний кубик, маса якого розподілена так, що частота появи певної грані пропорційна її номеру (число очок на ній). Побудувати імовірнісний простір стохастичного експерименту. Описати як підмножини Ω події: A – з'явилося число очок, кратне 3, B – випаде парне число очок – і обчислити їхні ймовірності.
   Підкидають симетричний гральний кубик (усі грані випадають однаково часто). Яким буде імовірнісний простір цього стохастичного експерименту? Обчислити ймовірності подій A і B.

   Розв'язання. За простір елементарних подій описаного стохастичного експерименту природно розглядати $\Omega=\{1,2,\dots,6\}$. Імовірність появи одиниці позначимо p, тоді ймовірність появи грані з номером j буде jp, і оскільки завжди $\sum\limits_{\omega\in\Omega}P(\omega)=1$, то $p+2p+\dots+6p=1$. Звідси,

$p=\dfrac{1}{21}, P(j)=\dfrac{j}{21}, j=1,2,\dots,6.$ Тим самим імовірнісний простір $\{\Omega,P\}$ стохастичного експерименту побудовано.

Події А і В опишуться відповідно підмножинами $A=\{3;6\}$ і $B=\{2;4;6\}$ простору Ω.

Імовірності подій А і В (як імовірності подій у дискретному імовірнісному просторі обчислюються так:

$P(A)=P(\{3;6\})=P(3)+P(6)=\dfrac{3}{21}+\dfrac{6}{21}=\dfrac{3}{7};$

$P(B)=P(\{2;4;6\})=P(2)+P(4)+P(6)=\dfrac{2}{21}+\dfrac{4}{21}+\dfrac{6}{21}=\dfrac{4}{7}.$

При підкиданні симетричного грального кубика простір елементарних подій буде таким самим: $\Omega=\{1,2,\dots,6\}$, а ймовірності елементарних подій, виходячи з міркувань симетрії, природно задати так $P(i)=\dfrac{1}{6},\quad i=1,2,\dots,6.$

Тоді $P(A)=P(\{3;6\})=P(3)+P(6)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3};$

$P(B)=P(\{2;4;6\})=P(2)+P(4)+P(6)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}.$

Зауваження. Зазначимо, що тут фактично розв’язуються дві задачі (і це стандартна ситуація).

Задачі для самостійного розв’язування.

1. Побудувати імовірнісний простір $\{\Omega,U,P\}$, якщо

а) Ω - скінчена множина;

б) Ω - зліченна множина;

в) Ω- область в n- вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, яка має скінчену міру Лебега.

2. Нехай $\Omega=\{1,2,\dots,n\}$. Всім числам приписані ймовірності пропорційні їх величинам. Знайти ці ймовірності. Яка ймовірність того, що вибране число а) парне; б) непарне; в) кратне q?

3. Монету підкидають поки не випаде герб. Побудуйте ймовірнісний простір. Знайти ймовірності того, що експеримент а) закінчиться до шостого підкидання; б) закінчиться на парному кроці; в) ніколи не закінчиться.

4. Три гравці проводять шаховий турнір за такою схемою: спочатку грають a з b, потім переможець грає з c і т.д. Турнір продовжується доти, поки один з гравців не виграє 2 партії підряд (він і оголошується переможцем). Нічийних партій немає. Знайти ймовірності виграшу для a,b,c, якщо всі гравці однаково майстерні.

5. Монету підкидають до тих пір, поки не з’явиться підряд два герба або дві решки. Знайти ймовірність події $A=\{$íåîáõ³äíî íå á³ëüøå òðüîõ êèäàíü$\}$.

6.В шафі знаходяться 9 однотипних приборів. На початку досліду всі вони нові. Для тимчасової експлуатації беруть навмання три прибори; після експлуатації їх повертають в шафу. На вид прибор, що був в експлуатації, не відрізняється від нового. Знайти ймовірність події $A=\{$ï³ñëÿ òðèêðàòíîãî âèáîðó åêñïëóàòàö³¿ íå çàëèøèòüñÿ íîâèõ ïðèëàä³â$\}$.

ЗАНЯТТЯ 5-6. УМОВНА ЙМОВІРНІСТЬ. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ПОДІЙ.

Запитання для самоперевірки.

1. Що називається умовною ймовірністю події А відповідно події В?
2. Сформулюйте теорему множення а) двох; б) трьох; в) n подій ($(n \geq 2)$.
3. Які події називаються незалежними а) попарно; б) в сукупності.
4. Випишіть формулу повної ймовірності і поясніть схему, в якій вона застосована.
5. Випишіть і поясніть зміст формул Байєса.

Розв’язування типових вправ.

1. Із повної колоди в 52 карти навмання вибирається одна карта. Події
   $A=\{$âèéíÿòà êàðòà – òóç$\}$,
   $\hat{A}=\{$âèéíÿòà êàðòà ÷îðíî¿ ìàñò³$\}$,
   $\tilde{N}=\{$âèéíÿòà êàðòà º ô³ãóðîþ âàëåò, äàìà, êîðîëü, òóç$\}$

Обчислити $P(A), P(B), P(C), P\left(A/B\right), P\left(B/C\right), P\left(A/C\right), P(AC), P(BC), P(ABC).$

Які із подій є незалежними?

Розв’язування. Використаємо класичне означення ймовірності: при вийманні навмання одної карти із колоди всіх рівно можливих випадків є $n=C_{52}^{1}=52$. Знаходимо число сприятливих випадків для А,В,С: $m_A=4$ (бо в повній колоді карт є 4 тузи), $m_B=26$ (бо є всього 26 карт чорної масті), $m_C=16$ (бо є всього 16 карт – фігур).

Отже,
$$P(A)=m_A/n=1/13;$$
$$P(B)=m_B/n=1/2;$$
$$P(C)=4/13.$$

Аналогічно знаходимо число сприятливих випадків для подій AB, AC, BC: $m_{AB}=2$ (бо є всього 2 тузи чорної масті), $m_{AC}=4;\quad m_{BC}=8.$

Отже, $P(AB)=\dfrac{1}{26}; P(AC)=\dfrac{1}{13}; P(BC)=\dfrac{2}{13}.$

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{2}{26}=\frac{1}{13};$$

За означенням маємо $P\left(B/C\right)=\dfrac{1}{2};$

$$P\left(A/C\right)=\frac{1}{4}.$$

Тому, що $P\left(A/B\right)=P(A),\quad P\left(B/C\right)=P(B),$ то незалежними є пари подій $(A,B),(B,C)$.

2. Три радіолампи виходять з ладу за час τ незалежно одна від одної з йморностями 0,2; 0,3; 0,4. Знайти ймовірності таких подій:

$A=\{\text{âñ³ ò ðè ëàì ï è âèéäóò ü ç ëàäó çà ÷àñ } \tau\};$

$\hat{A}=\{\text{âèéäå ç ëàäó î äí à ³ ò ³ëüêè î äí à ëàì ï à çà ÷àñ } \tau\};$

$\tilde{N}=\{\text{ç ëàäó âèéäå õî ÷à á î äí à ëàì ï à çà ÷àñ } \tau\}.$

Розв’язування. Введемо події $A_i=\{i-\text{î äí à ëàì ï à âèéäå ç ëàäó çà ÷àñ } \tau\},$ $(³=1,2,3)$

Події A_i - незалежні $(i=1,2,3)$.

$$A=A_1\cdot A_2\cdot A_3;$$

Тоді: $B=A_1\cdot \bar{A}_2\cdot \bar{A}_3+\bar{A}_1\cdot A_2\cdot \bar{A}_3+\bar{A}_1\cdot \bar{A}_2\cdot A_3;$

$$C=A_1+A_2+A_3.$$

Отже, використовуючи теореми додавання несумісних і множення незалежних подій, маємо

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0,2\cdot 0,3\cdot 0,4=0,024;$$

$$P(B)=P(A_1)P\left(\bar{A}_2\right)P\left(\bar{A}_3\right)+P\left(\bar{A}_1\right)P(A_2)P\left(\bar{A}_3\right)+P\left(\bar{A}_1\right)P\left(\bar{A}_2\right)P(A_3)=$$

$$=0,2\cdot 0,7\cdot 0,6+0,8\cdot 0,3\cdot 0,6+0,8\cdot 0,7\cdot 0,4=0,452;$$

$$P(C)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)=$$

$$=0,2+0,3+0,4-0,2\cdot 0,3-0,2\cdot 0,4-0,3\cdot 0,4+0,2\cdot 0,3\cdot 0,4=0,664.$$

Останню ймовірність можна обчислити простіше так:

$$P(C)=1-P\left(\bar{C}\right)=1-P\overline{\left(A_1+A_2+A_3\right)}=1-P\left(\bar{A}_1\cdot \bar{A}_2\cdot \bar{A}_3\right)=$$

$$=1-0,8\cdot 0,7\cdot 0,6=0,664;$$

Подія $C=\{\text{æ î äí à ç ðàä³î ëàì ï í å âèéäå ç ëàäó çà ÷àñ } \tau\}.$

3. Деталі виробляються на трьох заводах. Продуктивність першого заводу в три рази більша другого, а третього – в два рази менша, ніж другого. Доля браку на 1,2,3 заводах відповідно 2%, 3%, 4%. Наугад взята деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що вона виготовлена 1,2,3 заводом?

Розв'язування. Подія $B=\{\text{âèáðàí à äåò àëü âèÿâèò üñÿ áðàêî âàí î þ}\}$; гіпотези $H_i=\{\text{âèáðàí à äåò àëü âèãî ò î âëåí à } i-\text{èì çàâî äî ì}\}$, $(\text{³}=1,2,3)$.

За формулою повної ймовірності маємо:

$$P(B)=P(H_1)P\left(B/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(B/H_2\right)+P(H_3)P\left(B/H_3\right).$$

Нехай x - продуктивність другого заводу.

Тоді всього деталей $3x+x+\frac{x}{2}=\frac{9}{2}x$. Імовірності гіпотез:

$$P(H_1)=\frac{3x}{9/2\,x}=\frac{2}{3};\ P(H_2)=\frac{2}{9};\ P(H_3)=\frac{1}{9}.$$

Умовні імовірності події B:

$$P\left(B/H_1\right)=0,02;\ P\left(B/H_2\right)=0,03;\ P\left(B/H_3\right)=0,04.$$

Повна ймовірність події B:

$$P(B)=\frac{2}{3}\cdot 0,02+\frac{2}{9}\cdot 0,03+\frac{1}{9}\cdot 0,04=\frac{22}{900}.$$

Нехай вибрана деталь виявилася бракованою, т.б. подія И відбулася. Тоді за формулами Байєса знаходимо:

$$P\left(H_1/B\right)=\frac{P(H_1)P\left(B/H_1\right)}{P(B)}=\frac{\frac{12}{900}}{\frac{22}{900}}=\frac{6}{11};$$

$$P\left(H_2/B\right)=\frac{P(H_2)P\left(B/H_2\right)}{P(B)}=\frac{\frac{6}{900}}{\frac{22}{900}}=\frac{3}{11};$$

$$P\left(H_3/B\right)=\frac{P(H_3)P\left(B/H_3\right)}{P(B)}=\frac{\frac{4}{900}}{\frac{22}{900}}=\frac{2}{11}.$$

Задачі для самостійного розв'язування.

1.В урні є 5 білих і 7 чорних куль. Навмання а) без повернення, б) з поверненням вибирають 3 кулі Знайти ймовірності подій : $\hat{A}=\{\text{âñ³ òðè êóë³ á³ë³}\}$; $\hat{A}=\{\text{ð³âí î î äí à êóëÿ á³ëà}\}$.

2.Серед усіх родин з а) двома б) трьома дітьми обрано одну. Описати простір елементарних подій і випадкові події: $\hat{A}=\{\text{â ðî äèí ³ º õëî ï ÷èê ³ ä³â÷èí êà}\}$ $\hat{A}=\{\text{â ðî äèí ³ í å á³ëüø å î äí ³º¿ ä³â÷èí êè}\}$. Елементарні події рівно можливі. Обчислити $P(A),P(B),P(AB),P(A\cup B)$. Залежні чи незалежні події A ³ $\hat{A}$?

3.Проводиться три постріли в мішень з імовірностями влучення при першому пострілі – 0,6; при другому – 0,7; при третьому – 0,8. Знайти ймовірність таких подій:

$A=\{$âñ³ òðè âëó÷åííÿ$\}$, $B=\{$âñ³ òðè ïðîìàõè$\}$, $C=\{$ð³âíî îäíå âëó÷åííÿ$\}$,
$D=\{$õî÷à á îäíå âëó÷åííÿ$\}$.

4.Три мисливці одночасно зробили по одному пострілу у ведмедя який і був убитий однією кулею. Знайти ймовірність того, що ведмедя вбито першим, другим, третім мисливцем, якщо ймовірність влучення для них відповідно дорівнюють 0,2; 0,3; 0,4.

5.З урни, яка містить 3 білих і 7 чорних кулі перекладено 2 кулі в урну , яка містить 4 білі і 4 чорні кулі. Яка ймовірність вийняти білу кулю з другої урни після такого перекладання?

6.В групі із 25 студентів, які мають скласти екзамен з теорії ймовірностей є 10 відмінників, 7 підготовлених добре, 5 підготовлених задовільно, 3 підготовлені погано. Відмінники знають всі 25 питань програми, добре підготовлені – 20, задовільно – 15, погано – 10 питань програми. Навмання викликаний студент відповів на 2 заданих йому питання. Знайти ймовірності таких подій:
$A=\{$ñòóäåíò ï³äãîòîâëåíèé ïîãàíî$\}$; $\hat{A}=\{$ñòóäåíò ï³äãîòîâëåíèé ïîñåðåäíüî$\}$;
$C=\{$ñòóäåíò ï³äãîòîâëåíèé äîáðå àáî â³äì³ííî$\}$.

7. Дано: $P(A/B)=0,7; P(A/\overline{B})=0,3; P(B/A)=0,6.$ Обчислити $P(A)$.

8.Серед N екзаменаційних білетів є n “щасливих”. Студенти підходять за білетами один за одним. У кого більша ймовірність взяти “щасливий” білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

9.В кожній із двох урн міститься 6 білих і 4 чорних кулі. Із першої урни випадково вибирається дві кулі і перекладається в другу. Знайти ймовірність того, що випадково вибирана після цього куля із другої урни буде біла.

10.Із 20 стрілків 4 попадають в мишень з ймовірністю 0,9, 10 – з ймовірністю 0,8, 6 – з ймовірністю 0,6. Знайти ймовірність того, що випадково взятий стрілок промахнеться.

11.Лічильник реєструє частинки трьох типів: *A*, *B*, *C*. Ймовірності появи цих частинок відповідно дорівнюють 0,2; 0,5; 0,3. Частинки кожного з цих типів лічильник реєструє відповідно з ймовірностями 0,8; 0,2; 0,4. Лічильник зареєстрував частинку. Знайти ймовірність того, що це була частинка типу *A*.

12.Три верстати виготовляють відповідно 25%, 35% і 40% всіх виробів. В їх продукції брак становить відповідно 2%, 3% і 5%. Випадково вибраний із всієї продукції виріб виявився бракований. Яка ймовірність того, що він виготовлений першим верстатом?

Завдання для лабораторної роботи № 3.

Варіант 1.

1.Для сигналізації про аварію встановлено два незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії сигналізатор спрацює, дорівнює 0,95 для першого сигналізатора і 0,9 для другого. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює тільки один сигналізатор.

2.Прилад складається із трьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність безвідмовної роботи за час t першого, другого і третього відповідно дорівнює 0,6; 0,7; 0,8 . Знайти ймовірність того , що за час t безвідмовно будуть працювати : а) тільки один елемент; б) тільки два елемента; в) всі три елементи.

3.Скільки треба кинути гральних кубиків, щоб з імовірністю менше 0,3 можна було очікувати, що ні на одній із випавши граней не з’явиться п’ять очок.

4. Дано : $P(AB)=0,72, P\left(A\overline{B}\right)=0,18.$Знайти $P(A).$

5.Прилад містить два незалежно працюючих елемента. Ймовірність відмови елементів відповідно дорівнює 0,05 і 0,08. Знайти ймовірність відмови приладу, якщо для цього досить, щоб відмовив хоча б один елемент.

6. В піраміді п’ять рушниць, три з яких з оптичним прицілом. Ймовірність того, що стрілець влучить в мішень при пострілі з рушниці з оптичним прицілом дорівнює 0,95 для рушниці без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що в мішень буде влучено, якщо стрілець стріляє один раз із навмання взятої рушниці.

7.В піраміді 10 рушниць із яких 4 з оптичним прицілом. Ймовірність того, що стрілець влучить в мішень при пострілі із рушниці з оптичним прицілом дорівнює 0,95 для рушниці без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,8. Стрілець влучив в мішень із навмання взятої рушниці. Що більш ймовірно стрілець стріляв з рушниці з оптичним прицілом чи без оптичного прицілу?

Варіант 2.

1.Двоє стрільців стріляють по мішені. Ймовірність попадання в мішень при одному пострілі для першого стрільця – 0,7 для другого – 0,8 . Знайти ймовірність того, що при одному залпі в мішень влучить тільки один стрілець.

2.Ймовірність того, що потрібна техніку деталь знаходиться в першому, другому, третьому, четвертому ящику відповідно дорівнює 0,6; 0,7; 0,8; 0,9.Знайти ймовірність того , що деталь міститься: а) не більше ніж в трьох ящиках; б) не менше ніж в двох ящиках.

3.Ймовірність влучення в мішень стрільцем при одному пострілі дорівнює 0,8. Скільки пострілів повинен зробити стрілець, щоб з імовірністю менше за 0,4 можна було очікувати, що не буде жодного промаху.

4.Дано $P(A)=0,4; P(B)=0,3; P(A\cup B)=0,6.$ Знайти $P\left(A\overline{B}\right)$.

5.Для знищення мосту досить влучення однієї авіаційної бомби. Знайти ймовірність того, що міст буде знищено, якщо на нього скинути чотири бомби ймовірності влучення яких відповідно 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

6.В першій урні міститься 10 куль із яких 8 білих, в другій – 20 куль із яких 4 білі. Із кожної урни навмання взято одну кульку, а потім із цих двох куль навмання взято одну. Знайти ймовірність того, що взята куля біла.

7.Число грузових автомашин, що проїжджають по трасі, на якій розміщена бензоколонка відноситься до числа легкових машин як 3:2. Ймовірність того, що буде заправлена грузова машина дорівнює 0,2. До бензоколонки під'їхала для заправки машина. Знайти ймовірність того, що це грузова машина.

Варіант 3.

1.Ймовірність влучення в мішень першого стрілка дорівнює 0,7 , другого стрілка – 0,8 , а третього – 0,9. Знайти ймовірність влучення у мішень хоча б одного стрілка.

2. У залежності від наявності сировини підприємство може виробити та відправити замовникам цілодобово кількість певної продукції від 1 до 100. Яка ймовірність того, що одержану кількість продукції можна розподілити без залишку а) трьом замовникам; б) чотирьом замовникам; в) дванадцяти замовникам ; г) трьом або чотирьом замовникам.

3.Прилад складено з двох блоків, з'єднаних послідовно і незалежно працюючих. Ймовірність відмови блоків дорівнює 0,05 та 0,08. Знайти ймовірність відмови приладу.

4.У першому ящику 20 деталей, з яких 15 стандартних. У другому ящику 10 деталей, з яких 9 стандартних. З другого ящика навмання беруть одну деталь і перекладають її до першого ящика. Знайти ймовірність того, що взята після цього навмання деталь з першого ящика стандартна.

5.В урні 10 білих, 15 чорних, 20 блакитних та 25 червоних куль однакового розміру. Навмання взято одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде а) біла або чорна; б) блакитна або червона; в) біла , чорна або блакитна.

6.Ймовірність знищення літака з одного пострілу для першої гармати дорівнює 0,2, а для другої гармати – 0,1. Кожна гармата робить по одному пострілу, причому було одне влучення у літак. Яка ймовірність того, що влучила перша гармата.

7.У білому ящику 12 червоних та 6 блакитних куль. У чорному ящику – 15 червоних та 10 блакитних куль. Кидають гральний кубик. Якщо випаде кількість очок , кратна 3, то навмання беруть кулю з білого ящика. Якщо випаде будь яка інша кількість очок, то беруть кулю з чорного ящика. Якою буде ймовірність узяти червону кулю.

Варіант 4.

1.Чому дорівнює ймовірність того, що при киданні трьох гральних кубиків число 5 випаде хоча б на одному з них?

2.Працівник обслуговує три станка, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що на протязі години перший станок не вимагатиме уваги працівника дорівнює 0,9; а для другого та третього станків – 0,8 та 0,85 відповідно. Якою є ймовірність того, що на протязі години а) три станка не вимагатимуть уваги працівника; б) усі три станки потребують уваги працівника; в) хоча б один станок потребує уваги працівника.

3.У трьох ящиках маємо однакові деталі з різних заводів: еу першому – 20 стандартних та 5 нестандартних деталей; у другому – 15 стандартних та 3 нестандартних; у третьому – 14 стандартних та 2 нестандартних. Із навмання взятого ящика взята деталь, яка виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що цю деталь взято а) з першого ящика; б) із другого ящика; в) із третього ящика.

4. У магазин надійшло 30% телевізорів із першого заводу, серед яких 20% бракованих; 20% - із другого заводу, серед яких 10% бракованих; 50% із третього заводу, який має лише 5% браку. Яка ймовірність купити справний телевізор недосвідченим покупцем?

5.Ймовірність відмови мікросхеми дорівнює 0,4.Для підвищення надійності приладу мікросхему дублюють, тобто замість однієї беруть n. Яким повинно бути n, щоб ймовірність безвідмовної роботи дорівнювала 0,99.

6.Подія A може з'явитися при умові появи однієї із несумісних подій $B_1, B_2, B_3,$ які утворюють повну групу подій. Були знайдені умовні ймовірності $P(A/B_1)=0,6; P(A/B_2)=0,3$ після появи події A. Чому дорівнює умовна ймовірність $P(A/B_3)$ гіпотези B_3?

7. Серед студентів 4 курсу 2/5 одружені та 3/5 неодружені. Серед неодружених 0,5 молодші 22 років, а 2/3 одружених старші 22 років. Знайти ймовірність того, що довільно обраний студент цього курсу а) старший 22 років; б) одружений та старший 22 років.

Варіант 5.

1.Система має два незалежно працюючих елемента. Ймовірність їх відмови дорівнює 0,05 та 0,08 відповідно. Знайти ймовірність відмови системи, якщо для цього досить хоча б одного з елементів.

2. У обчислювальному центрі є 6 та 4 комп'ютерів IBMAT386 та IBMAT286 відповідно. Ймовірність виходу з ладу під час роботи для 386 моделі – 0,05, а для 286 моделі – 0,2. Студент виконує лабораторну роботу на обраному комп'ютері . Знайти ймовірність того , що під час роботи комп'ютер не вийде з ладу.

3. У перші урні 10 куль, з яких 8 білих. У другій урні 20 куль з яких 4 білих. Із кожної урни навмання взято по одній кулі, а потім із двох обраних навмання взято одну. Знайти ймовірність того, що остання куля буде білою.

4. У лікарню поступають (середньому) 50% хворих на грип , 30% хворих на ангіну та 20% хворих на запалення легенів. Ймовірність повного одуження від грипу дорівнює 0,7 від ангіни та запалення легенів – 0,8 та 0,9 відповідно.

Виписано хворого, який повністю одужав. Знайти ймовірність того, що він був хворий на грип.

5.Маємо два однакових ящики. У першому з них 8 пар взуття 41-го розміру та 6 пар 42-го розміру, а в другому – 10 пар 41-го розміру та 4 пари 42-го розміру. З вибраного навмання ящика витягли одну пару взуття 42-го розміру. Знайти ймовірність того, що ця пара взята з першого ящика.

6.У рибалки є три улюблених місця, куди він приходить з однаковою ймовірністю. Ймовірність кльову на першому місці дорівнює 0,5 , на другому – 0,5 , на третьому 0,25. Рибалка закинув вудку у навмання вибраному місці і риба клюнула. Знайти ймовірність того, що рибалка закинув вудку у першому місці.

7.Підприємство виготовляє 98% стандартних виробів, причому 90% з них – першого сорту. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб буде першого сорту.

ЗАНЯТТЯ 7-8.
ФОРМУЛИ БЕРНУЛІ. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ В СХЕМІ БЕРНУЛЛІ.

Запитання для самоперевірки.

1.Які випробовування називаються незалежними?

2. Що називається схемою Бернуллі?

3.Випішіть формули Бернуллі. В яких задачах вони використовуються?

4.Дайте означення і правила знаходження най імовірнісного числа появ події в схемі Бернуллі?

5.Випішіть функцію Гауса і функцію Лапласа, нарисуйте їх графіки, перелічіть основні властивості?

6.Сформулюйте локальну теорему Мавра-Лапласа та поясніть її застосування?

7.Сформулюйте інтегральну теорему Мавра-Лапласа та поясніть її застосування?

8.Сформулюйте теорему Бернуллі. В чому полягає властивість стійкості відносних частот?

9.Сформулюйте граничну теорему Пуасона та поясніть її застосування?

10.Що таке поліном ний розподіл ймовірностей?

Розв'язування типових вправ.

1.Стрілець зробив 8 пострілів у мішень з імовірностями влучення при кожному пострілі 0,6. Знайти ймовірності того, що в мішень буде а) рівно одне ; б) рівно два; в) жодного; г) хоча б одне влучення. Яке найімовірнісне число влучень?

Розв'язання. Скористаємося формулами Бернуллі в яких $n=8;\ p=0,6;\ q=0,4;\ m=0;1;2$ ò à $m\geq 1.$

$$P_8(1)=C_8^1\cdot 0,6\cdot 0,4^7=0,00786;\quad P_8(2)=C_8^2\cdot 0,6^2\cdot 0,4^6=0,04129;\quad P_8(0)=0,4^8=0,00065.$$

Оскільки $P_8(m\geq 1)+P_8(0)=1$ то $P_8(m\geq 1)=0,99935.$

Найімовірнісне число m_0 знайдемо із нерівностей

$np-q\le m_0\le np+p$ тоді $4,2\le m_0\le 5,2$, а отже $m_0=5;\ P_8\left(5\right)=C_8^5\cdot 0,6^5\cdot 0,4^3=0,27857.$

2.Партія виробів містить 5% браку. Скільки виробів слід перевірити, щоб з імовірністю не меншою 0,9 можна було зафіксувати хоча б один бракований виріб?

Розв'язання. За умовою задачі $p=0,05;q=0,95;P\left\{m\ge 1\right\}=0,9$. Тому, що $P_n\left(m\ge 1\right)+P_n\left(0\right)=1,$ а $P_n\left(0\right)=0,95^n$, то маємо : $1-0,95^n\ge 0,9\Rightarrow n\ge 44,8.$ Отже $P_n\left(m\ge 1\right)=1-0,95^n.$

Відповідь: Потрібно перевірити не менше 45 виробів.

3. Ймовірність виходу з ладу за час τ одного конденсатора 0,2. Знайти ймовірність того, що із 100 конденсаторів за час τ вийдуть із ладу а) рівно 30; б) не менше 30; в) від 14 до 26 конденсаторів. Конденсатори виходять з ладу незалежно один від одного.

Розв'язування. За умовою задачі: $n=100;p=0,2;q=0,8.$

а) $m=30;$ б) $m\ge 30;$ в) $14\le m\le 26.$

а). За формулою Бернуллі маємо : $P_{100}\left(30\right)=C_{100}^{30}\cdot 0,2^{30}\cdot 0,8^{70};$

Для наближеного обчислення величини використаємо теорему Муавра-Лапласа. Для цього обчислимо

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{30-100\cdot 0,2}{\sqrt{100\cdot 0,2\cdot 0,8}}=2,5.$$

Із таблиці значень функції Гауса знаходимо $\varphi\left(2,5\right)=0,0175.$ Отже

$$P_{100}\left(30\right)\approx\frac{1}{\sqrt{100\cdot 0,2\cdot 0,8}}\varphi\left(2,5\right)=0,0044.$$

б) Скористаємося інтегральною теоремою Муавра-Лапласа:

$P_n\left(m_1;m_2\right)\approx\Phi\left(b\right)-\Phi\left(a\right),$ де $a=\dfrac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi\left(x\right)$- функція Лапласа. В даному випадку $m_1=30;m_2=100.$ Отже, маємо :

$$a=\frac{30-100\cdot 0,2}{\sqrt{100\cdot 0,2\cdot 0,8}}=2,5;\ b=\frac{100-100\cdot 0,2}{\sqrt{100\cdot 0,2\cdot 0,8}}=20;\ \ \Phi\left(2,5\right)=0,4938;\Phi\left(20\right)=0,5;$$

$$P_m\left(m\ge 30\right)=P\left(30\le m\le 100\right)\approx 0,5-0,4938=0,0062.$$

в) Аналогічно маємо для

$$m_1=14;m_2=26;a=-1,5;b=1,5;\Phi\left(1,5\right)=0,4332;\Phi\left(-1,5\right)=-0,4332;$$

$$P_{100}\left(14;26\right)=P_{100}\left(14\le m\le 26\right)=2\Phi\left(1,5\right)=0,8664.$$

4.Серед продукції, що виготовлена на даному верстаті 2% браку. а) Скільки виробів необхідно взяти, щоб з надійністю 0,995 можна сподіватися , що відносна частота бракованих виробів серед них відрізняється від 0,02 за абсолютною величиною не більше як на 0,005? б) В яких межах міститься число бракованих виробів із заданою ймовірністю 0,995?

Розв'язання. Використаємо наближену формулу

$$\beta\equiv P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

а) за умовою задачі: $\beta = 0{,}995;\ p = 0{,}02;\ \varepsilon = 0{,}005.$ Отже,

$0{,}995 \approx 2\Phi\left(x_\beta\right),\ x_\beta = 0{,}005\sqrt{\dfrac{n}{0{,}02 \cdot 0{,}98}}.$ Для $\Phi\left(x_\beta\right) = 0{,}4975$ із таблиці значень функції Лапласа знаходимо $x_\beta = 2{,}81$. Знаходимо n із рівності

$2{,}81 = 0{,}005\sqrt{\dfrac{n}{0{,}02 \cdot 0{,}98}}$, звідси одержуємо $n = 6190.$

б) із рівності $0{,}995 = P\left\{\left|\dfrac{\mu}{6190} - 0{,}02\right| \le 0{,}005\right\}$ знаходимо

$P\left\{82{,}85 \le \mu \le 153{,}75\right\} = 0{,}995.$

Відповідь: з імовірністю 0,995 число бракованих виробів серед 6190 міститься в межах від 83 до 153 включно.

5. Телефонна станція обслуговує 500 абонентів. Ймовірність подзвонити на комутатор протягом 1 год. для кожного абонента дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що протягом години подзвонять : а) 3 абонента; б) хоча б один абонент.

Розв'язання. За умовою задачі $n = 500;\ p = 0{,}01;\ m = 3;\ m \ge 1.$ Застосуємо асимптотичну формулу Пуасона, тому що n велике, а p мале:

$P_n\left(m\right) \approx \dfrac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ äå $\lambda = np.\ \ \lambda = 500 \cdot 0{,}01 = 5;\ P_{500}\left(3\right) \approx \dfrac{5^3}{3!} e^{-5} = 0{,}1404.$

$P_{500}\left(m \ge 1\right) = 1 - P_{500}\left(0\right) \approx 1 - e^{-5} = 0{,}9933.$ Тут використано таблицю значень розподілу Пуасона.

Задачі для самостійного розв'язання .

1.Що ймовірніше: виграти в гравця, однакового за силою (гра ведеться без нічиїх),

1) 4 партії з 8 чи 3 з 5?

2) 3 партії з 6 чи 2 з 4?

3) не менш ніж 3 партії з 4 чи не менш ніж 5 з 8?

4) не більш ніж n з $2n$, чи більш ніж n з $2n$ партій?

2. Симетричний гральний кубик підкидають 10 разів. Нехай подія А число трійок, що випали. Знайти ймовірність того, що при 10 підкиданнях трійка випаде а) 5 разів; б) не більше 6 та не менше 4; в) не випаде жодного разу.

3.Ігровий кубик кидається 5 разів. Знайти ймовірность того, що подія А – число очок кратне трьом появиться а) 3 рази; б) хоча б один раз. Знайти най імовірнісне число появ події А та ймовірність цього числа.

4.Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі 0,2. Проводиться 400 пострілів по мішені. Знайти ймовірність того, що при 400 пострілах буде а) рівно 65 влучень; б) буде не менше 70, але не більше 90 разів? Знайти най імовірнісне число та його ймовірність.

5.Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Ймовірність розриву нитки на одному веретені за одну хвилину дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що за одну хвилину нитка обірветься а) на двох веретенах; б) більше ніж на двох веретенах; в) хоча б на одному веретені.

6.Завод відправив до бази 500 виробів. Імовірність пошкодження виробу при транспортуванні дорівнює 0,002. Знайти імовірність того, що при транспортуванні буде пошкоджено виробів а) три; б) менше трьох; в)більше за три.
6.Середня кількість замовлень таксі, що надходять до диспетчерського пункту щохвилини, дорівнює 3, знайти імовірність того , що за дві хвилини надійде а) 4 замовлення; б) менше за 4 замовлення в) на менше 4 замовлень.
7.Середня кількість обривів нитки на ткацькому верстаті в одну хвилину дорівнює 3.Знайти імовірність того , що за три хвилини буде а) 5 обривів нитки; б) менше 5 обривів нитки; в) не менше 5 обривів нитки.
8.Фабрика випускає 75% продукції першого сорту. В яких межах міститься число першосортних виробів серед 300 вибраних із надійністю 0,9972.
9.Монета була підкинута 4040 разів герб випав 2043 рази (Бюффон). Знайти ймовірність того, що при повторенні досліду відхилення за абсолютною величиною частоти від імовірності 0,5 не перевищить отриманого результату. Вважаючи, що подія, ймовірність появи якої становить 0,9999, практично достовірна, знайти практичну верхню границю можливого відхилення частоти від імовірності в кожному з дослідів.

Завдання для лабораторної роботи № 4

Варіант 1.

1.Пару симетричних монет підкидають десять разів. Подія А – число тих підкидань, при яких на обох монетах з'явився герб. Знайти ймовірність того, що при 10 підкиданнях на обох монетах з'явився герб подія А відбудеться: а) три рази; б) від трьох до п'яти раз.
2.Відділ технічного контролю перевіряє на стандартність 900 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна дорівнює 0.9. Знайти з імовірністю 0.95 межі в яких будуть міститися m стандартних деталей серед перевірених.
3.Фабрика випускає 75% виробів першого сорту. Знайти ймовірність того, що серед 300 випадково відібраних виробів першосортними виявляться а) рівно 200 б) від 219 до 234.
4.Ймовірність абоненту подзвонити на комутатор протягом однієї години дорівнює 0.005. Телефонна станція обслуговує 600 абонентів. Знайти ймовірність того, що протягом однієї години подзвонять а) 5 абонентів б) хоча б один абонент.

Варіант 2.

1.Симетричний гральний кубик підкидають 6 разів. Обчислити ймовірність того, що двічі випаде парне число очок. Обчислити ймовірність того, що непарне число очок випаде більше ніж чотири рази.
2.Імовірність влучення під час одного пострілу дорівнєю 0.4. Скільки треба зробити пострілів, щоб імовірність принаймні одного влучення була не меншою 0.9?

3.Монету підкидають 100 разів. Яка ймовірність того, що загальне число випадань герба буде у межах від 45 до 55 ?

4.В цеху працюють 400 верстатів-автоматів, кожний з яких протягом зміни потребує втручання оператора з імовірністю 0.2. Знайти ймовірність того, що протягом зміни потребують втручання оператора а) 100 верстатів б) від 70 до 120 верстатів. Яке най імовірнісне число верстатів, що потребують втручання.

Варіант 3.

1.Є 12 стандартних та 4 нестандартних деталі. Навмання беруть три деталі(з поверненням). Знайти ймовірність того, що серед взятих деталей а) усі три стандартні б) не більше однієї стандартної в) хоча б одна стандартна.

3.Імовірність появи успіху в кожнім з 400 незалежних випробовувань дорівнює 0.8. Знайти таке додатне число ε, що з імовірністю 0.9876 абсолютна величина відхилення частоти появи успіху від його імовірності 0.8 не перевищить ε.

4.Імовірність присутності студента на лекції дорівнює 0.8.Знайти імовірність того, що із 100 студентів на лекції будуть а) не менше 75 та не більше 90 б) не менше 75 в) не більше 74.

5.Середня кількість замовлення таксі, що надходять до диспетчерського пунтку щохвилини дорівнює 4. Знайти імовірність того, що за дві хвилини надійде: а) 5 замовлень; б) менше за 5 замовлень; в) не менше 5 замовлень.

Варіант 4.

1.У виробництві деякої продукції третій сорт складає 20%. Знайти ймовірність того, що з 5 навмання взятих виробів цієї продукції а)не менше ніж три будуть третього сорту б) хоча б один третього сорту.

2.Імовірність того, що будь-який абонент подзвонить на комутатор протягом години, дорівнює 0,01. Телефонна станція обслуговує 800 абонентів.Яка імовірність того, що протягом години подзвонять а) 5 абонентів б) більше двох абонентів.

3.Імовірність появи успіху в кожнім з 625 незалежних випробовувань дорівнює 0.8. Знайти імовірність того, що частота появи успіху відхилиться по абсолютній величині від його ймовірності не більше ніж на 0.04.

4.Ймовірність появи події в кожному із 100 незалежних випробовувань дорівнює 0.8. Знайти ймовірність того, що подія з’явиться: а) не менше 75 і не більше 90 раз; б)не менше 75 раз; в) не більше 74 раз.

5.Відділ технічного контролю перевіряє партію із 10 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна дорівнює 0.75. Знайти най імовірнісне число деталей, які будуть визнані стандартними.

Варіант 5.

1.Імовірність виготовлення стандартного виробу дорівнює 0.95.Яка імовірність того, що серед 10 виробів а) не більше одного стандартного б) два стандартних вироби.

2.Імовірність влучення в ціль при кожному пострілі дорівнює 0.001. Знайти імовірність влучання в ціль двох і більше куль, якщо число пострілів дорівнює 5000.

3.Скільки потрібно зробити дослідів з кидання монети, щоб з імовірністю 0.92 можна було очікувати відхилення частоти випадання герба від теоретичної імовірності 0.5 на абсолютну величину, меншу ніж 0.01.

4.Два рівносильних шахматиста грають матч із 12 партій. В кожній партії можливі три наслідки: $A_1 =$(виграв перший гравець), $A_2 =$(нічия), $A_3 =$(виграв другий гравець). Нехай $P(A_1) = P(A_3) = 0.2$, $P(A_2) = 0.6$. Знайти ймовірності слідуючи подій: $A =$(перший гравець виграв 3 партії, програв 3 партії інші зіграв в нічию, $B =$(один із гравців вигра 4 партії і програв 3 партії).

5.Ймовірність появи події в кожному із 2100 незалежних випробовувань дорівнює 0.7. Знайти ймовірність того, що подія з’явиться: а) не менше 1470 і не більше 1500 раз; б) не менше 1470; в) не більше 1469 раз.

Заняття 9-10.
ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН.

Запитання для самоперевірки

1.Що називається випадковою величиною та її законом розподілу.

2.Дайте означення функції розподілу випадкової величини та перелічіть її основні властивості.

3.Що називається рядом розподілу дискретної випадкової величини.

4.Дайте означення щільності (густини) розподілу випадкової величини та перелічіть її основні властивості.

Розв’язування типових вправ.

1.На відрізок [0;1] навмання кидають пару точок. Нехай ξ - координати однієї точки; η- іншої. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\zeta = \max\left(\xi^2, \eta\right)$.

Розв’язання . Кидання пари точок на відрізок [0;1] рівносильно киданню точки в квадрат [0;1] x [0;1] і навпаки. Очевидно $F_{\zeta}(x)=0$ при $x<0$, $F_{\zeta}(x)=1$ при $x>1$. При $0<x<1$

$F_{\zeta}(x)=P\{\zeta<x\}=P\left\{\max\left(\xi^2,\eta\right)\right\}=P\left\{\xi<\sqrt{x},\eta<x\right\}=P\left\{(\xi,\eta)\in A\right\}$, де

$A=[0;\sqrt{x}]\times[0;x]$. $P\left\{(\xi,\eta)\in A\right\}$, обчислимо , як геометричну ймовірність

$F_{\zeta}=P\left\{(\xi,\eta)\in A\right\}=\dfrac{S(A)}{S([0;1]\times[0;1])}=\dfrac{x\sqrt{x}}{1^2}=x\sqrt{x}$. Отже

$$F_{\zeta}(x)=\begin{cases}0, & \text{ÿêù î} \quad \text{õ}<0\\ \text{õ}\sqrt{\text{õ}}, & \text{ÿêù î} \quad 0<x<1\\ 1, & \text{ÿêù î} \quad x>1.\end{cases}$$

2.Випадкова величина має щільність імовірностей $p(x)=\dfrac{a}{1+x^2}$.Визначити параметр a та знайти функцію розподілу.

Розв’язання . Параметр a знайдемо використовуючи властивість нормування диференціальної функції розподілу

$1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{a}{1+x^2}dx=a\pi.$ Отже одержали $a=\dfrac{1}{\pi}$. Функцію розподілу знайдемо за формулою $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\dfrac{1/\pi}{1+u^2}du=\dfrac{1}{\pi}arctqx+0.5$.

3.Випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)=x^2-4x+4$. Визначити область значень випадкової величини та ймовірність того, що $X\geq 2.3$.

Розв’язання .

Згідно властивості функції розподілу маємо $0\leq F(x)\leq 1$тому $0\leq x^2-4x+4\leq 1$. Якщо область значень випадкової величини $[a;b]$, то $F(a)=0$ та $F(b)=1$. Підставимо замість x aта b то одержимо $a^2-4a+4=0\Rightarrow(a-2)^2=0\Rightarrow a=2$, $b^2-4b+4=1\Rightarrow b^2-4b+3=0\Rightarrow b=2, b=1$. Але в проміжку $[a;b], b>a$ тому $b=3$. Отже область значень незалежної випадкової величини X буде $[2;3]$. Подія $x<2.3$ буде протилежною до події $x\geq 2.3$ тому $P\{x\geq 2.3\}=1-P\{x<2.3\}=1-F(2.3)=1-0.09=0.91$.

4.Прилад складається із трьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови кожного елемента в одному досліді дорівнює 0.1. Скласти закон розподілу числа елементів, що відмовили в одному досліді.

Розв’язання .Випадкова величина ξ- число елементів, що відмовили в одному досліді, приймає слідуючи значення 0;1;2;3. Відмови елементів незалежні один від одного, ймовірності відмови кожного елемента рівні між собою, тому можна застосувати формулу Бернуллі, а отже $P_3(0)=q^3=0,9^3=0,729;$ $P_3(1)=C_3^1pq^2=0,243;$

$P_3(2)=C_3^2 p^2 q=0,027;\ P_3(3)=p^3=0,001.$ Напишемо шуканий біномний закон розподілу випадкової величини ξ.

ξ	0	1	2	3
P	0.729	0.243	0.027	0.001

Задачі для самостійного розв'язання .

1. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на а) [0;1], б) [a;b], в) [-1;3]. Знайти щільність розподілу випадкової величини а) $\eta=\dfrac{1}{\xi}$;б) $\eta=e^{\xi}$;в) $\eta=\xi^2$.

2. Випадкова величина ξ розподілена показниково з параметром λ. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta=\dfrac{1}{1-\xi}$.

3. Випадкова величина ξ розподілена показниково з параметром 1. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta=1-e^{-\xi}$.

4. Нехай ξ розподілена $N_{a;\sigma^2}$.Обчислити

а) $P\{a-\sigma\le\xi\le a+\sigma\};\ \acute{a})P\{a-2\sigma\le\xi\le a+2\sigma\}$.

5.Симетричний гральний кубик підкидають 10 разів. Знайти розподіл випадкової величини ξ - числа трійок, що випали.

6. Симетричну монету підкидають 10 разів. Знайти розподіл випадкової величини ξ - чила гербів, що випали.

7. Випадкова величина ξ - має розподіл Коші з щільністю $p(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$.

Обчислити а) $P\left\{-\sqrt{3}\le\xi\le 1\right\}$ б) $P\left\{|\xi|\ge\sqrt{3}\right\}$.

Завдання для лабораторної роботи № 5.

Варіант № 1.

1.Для випадкової величини ξ розподіленої за нормальним законом обчислити $P\{8\le\xi\le 12\};a=10;\sigma=2.$

2.Дано $F(x)=\begin{cases}0 & \text{ï ðè} \quad x\le 1\\ c\ln x & \text{ï ðè} \quad 1<x\le e\\ 1 & \text{ï ðè} \quad x>e\end{cases}$. Знайти $p(x)$, та сталу c.

3.Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на [-2;2]. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta=|\xi|$

4. Монету підкидають 4 рази. ξ - число появ герба при 4 підкиданнях монети. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ.

Варіант № 2.

1. Для випадкової величини ξ розподіленої за нормальним законом обчислити $P\{15\le\xi\le 25\};a=20;\sigma=5.$

2.Дано $p(x)=cx^{-10}$ при $x\ge 1$. Знайти $F(x)$ та сталу c.

3.Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на [-2;1]. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \frac{1}{\xi^2}$.

4.Пару симетричних монет підкидають тричі; ξ-число тих підкидань, при яких на обох монетах зявився герб. Знайти розподіл випадкової величини ξ.

Варіант № 3.

1. Для випадкової величини ξ розподіленої за нормальним законом обчислити $P\{0 \le \xi \le 6\}; a = 3; \sigma = 4.$

2.Дано

$$p(x) = \begin{cases} c\cos x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ 0, & x < 0, x > \pi/2 \end{cases}$$

Знайти $F(x)$ та сталу c.

3.Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку [0;2]. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = |\xi - 1|$.

4.Імовірність того, що стрілець попаде в мішень при одному пострілі дорівнює 0.8. Стрілку видаються кулі до тих пір поки він не промахнеться. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ- числа куль , що видані стрільцю.

Варіант № 4.

1. Для випадкової величини ξ розподіленої за нормальним законом обчислити $P\{-10 \le \xi \le 0\}; a = -5; \sigma = 2.$

2.Дано $p(x) = ce^{-|x|}$.Знайти $F(x)$ та сталу c.

3.Нехай $F(x)$ - функція розподілу випадкової величини ξ. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$.

4. Після відповіді студента на питання екзаменаційного білету, викладач задає студенту додаткові запитання. Ймовірність того, що студент відповість на будь-яке додаткове запитання дорівнює 0.9. Скласти закон розподілу випадкової величини ξ- числа додаткових запитань, які задасть викладач студенту.

Варіант № 5.

1. 1. Для випадкової величини ξ розподіленої за нормальним законом обчислити $P\{7 \le \xi \le 16\}; a = 10; \sigma = 3.$

2.Дано функцію розподілу випадкової величини $\xi, F(x) = 1 - ce^{-2x}$ *ï ðè* $x > 0$.Знайти щільність розподілу та сталу с.

3. Нехай $F(x)$ - функція розподілу випадкової величини ξ. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = e^{\xi}$.

4.В партії із шести деталей чотири стандартні. Навмання відібрані три деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини ξ- числа стандартних деталей.

Заняття 11.

ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ БАГАТОВИМІРНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН.

Запитання для самоперевірки.

1.Що називається випадковим вектором?

2.Дайте означення функції розподілу випадкового вектора та перелічіть її основні властивості.

3.Опишіть таблицю розподілу ймовірностей двовимірного дискретного випадкового вектора.

4.Дайте означення щільності розподілу випадкового вектора та перелічіть її основні властивості.

5.Дайте означення незалежності двох випадкових величин.

6.Як знаходиться розподіл суми добутку, частки двох випадкових величин.

Розв'язування типових вправ.

1.Задані незалежні випадкові величини ξ та η :

ξ	-1	0	1
P	0.2	0.3	0.4

ξ	0	1	2	3
P	0.1	0.2	0.3	0.4

Побудувати ряди розподілів, функції розподілів випадкових величин $\zeta=\xi+\eta$ та $\theta=\xi\eta$. Обчислити $P\{\zeta\le 0\}, P\{|\theta|\le 1\}$.

Розв'язування : Ряди розподілів для ζ та θ будуть

ζ	-1	0	1	2	3	4
P	0.02	0.07	0.17	0.27	0.27	0.2

θ	-3	-2	-1	0	1	2	3
P	0.08	0.06	0.04	0.37	0.1	0.15	0.2

Пояснення: можливими значеннями для випадкової величини $\zeta=\xi+\eta$ є все можливі суми, а для випадкової величини $\theta=\xi\eta$ - все можливі добутки їх ймовірності обчислюються так:

$$P\{\zeta=0\}=P\{\xi=0,\eta=0\}+P\{\xi=-1,\eta=1\}=P\{\xi=0\}P\{\eta=0\}+P\{\xi=-1\}P\{\eta=1\}=$$

0.3 0.1+0.2 0.2=0.7. Тут використовуються теореми додавання несумісних і множення незалежних подій. Функції розподілу

$$F_\zeta(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ 0.02, & -1<x\le 0,\\ 0.09, & 0<x\le 1,\\ 0.26, & 1<x\le 2,\\ 0.53, & 2<x\le 3,\\ 0.80, & 3<x\le 4,\\ 1 & x>4.\end{cases},\quad F_\theta(x)=\begin{cases}0 & x\le -3\\ 0.08, & -3<x\le -2,\\ 0.14, & -2<x\le -1,\\ 0.18, & -1<x\le -0,\\ 0.55, & 0<x\le 1,\\ 0.65, & 1<x\le 2,\\ 0.80, & 2<x\le 3,\\ 1 & x>3.\end{cases}$$

Використовуючи властивості функції розподілу знаходимо:

$P\{\zeta \le 0\} = P\{-\infty < \zeta \le 0\} = F_{\zeta}(0+) - F_{\zeta}(-\infty) = 0.09;$

$P\{|\theta| \le 1\} = P\{-1 \le \theta \le 1\} = F_{\theta}(1+0) - F_{\theta}(-1) = 0.65 - 0.14 = 0.51.$

2.Дано густину розподілу випадкового вектора

$$p(x,y) = \frac{1}{\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x^2 + 2xy + 5y^2\right)\right\} \equiv n\left(0;0;\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Знайти: густини розподілу компонент вектора, вияснити залежні чи незалежні випадкові величини ξ і η, густини розподілу $\xi+\eta$ і $\frac{\xi}{\eta}$.

Розв’язування . Знаходимо густину розподілу випадкової величини ξ:

$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y\sqrt{5} + \frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{2}{5}x^2\right\}dy = \sqrt{\frac{2}{5\pi}}e^{-\frac{2}{5}x^2}$. Тут використано заміну $y\sqrt{5} + \frac{x}{\sqrt{5}} = z, \quad dz = \sqrt{5}dy$ та значення інтегралу Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-az^2\right\}dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\;(a > 0)$. Аналогічно знаходимо густину розподілу випадкової величини η:

$p_{\eta}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x+y)^2 - 2y^2\right\}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2y^2}$. Тому що $p(x,y) \ne p_{\xi}(x)\cdot p_{\eta}(y)$, то ξ,η не є незалежними. Далі знаходимо $p_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(z-x,y)dy =$

$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x^2 + 2x(z-x) + 5(z-x)^2\right)\right\}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$. Знаходимо

$$p_{\frac{\xi}{\eta}}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y|p(zy,y)dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y|\exp\left\{-\frac{1}{2}\left((zy)^2 + 2zy\cdot y + 5y^2\right)\right\}dy =$$

$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}y\exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\left(z^2 + 2z + 5\right)\right\}dy = \frac{2}{\pi\left((z+1)^2 + 4\right)}$. $\quad p(z) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{a}{a^2 + (z-b)^2}$ – розподіл Коші .

3. Дискретна випадкова величина ξ має розподіл $P\{\xi = 0\} = 0.25, P\{\eta = 1\} = 0.75$ а випадкова величина η рівномірно розподілена в [-1;1]. ξ,η - незалежні. Знайти розподіл $\zeta = \xi + \eta.$

Розв’язування : За формулою повної ймовірності маємо:

$$P\{\zeta < x\} = P\{\xi + \eta < x\} = P\{\xi = 0\}P\{\xi + \eta < x/\xi = 0\} + P\{\xi = 1\}P\{\xi + \eta < x/\xi = 1\};$$

$$P\{\xi + \eta < x/\xi = 0\} = \frac{P\{\xi + \eta < x, \xi = 0\}}{P\{\xi = 0\}} = P\{\eta < x\} = F_{\eta}(x);$$

$$P\{\xi + \eta < x/\xi = 1\} = \frac{P\{\xi + \eta < x, \xi = 1\}}{P\{\xi = 1\}} = P\{\eta < x - 1\} = F_{\eta}(x-1).$$

Функція розподілу η

$$F_\eta(x)\begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \dfrac{x+1}{2}, & -1 < x \le 1, \\ 1 & x > 1. \end{cases} \quad F_\eta(x-1) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & 0 < x \le 2, \\ 1 & x > 2. \end{cases}$$

Отже, функція розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$ буде така:

$$F_\zeta(x) = P(\zeta < x) = 0.25P\{\eta < x\} + 0.75P\{\eta < x-1\} =$$

$$= \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \dfrac{x+1}{2}, & -1 < x \le 0, \\ \dfrac{4x+1}{8}, & 0 < x \le 1, \\ \dfrac{3x+1}{8}, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

А густина розподілу $\zeta = \xi + \eta$ буде така $P_\zeta(x) = F_\zeta{}'(x)$.

Задачі для самостійного розв'язання.

1.Дані дві незалежні випадкові величини ξ і η

ξ	-1	1	2	3
P	0.2	0.4	0.3	0.1

η	-2	0	1
P	0.3	0.2	0.5

Побудувати функції розподілу ξ і η, $\xi+\eta, \xi\cdot\eta, \xi^2$. Обчислити $P\{|\xi| \le 1\}, P\{\xi \ge 0\}$. Знайти розподіл вектора (ξ, η).

2. Функція розподілу випадкової величини ξ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ a + barcs^3nx, & -1 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти сталі а, в; щільності $p_\xi(x), p_\eta(y)$, якщо $\eta = 1 + \xi^2$;обчислити $P\{0 \le \xi \le 0.5\}$.

3.Нехай $\xi_{i,}$ $i = 1, 2, \ldots n,$ - незалежні випадкові величини, кожна з функцією розподілу $F(x)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$.

4. Закон розподілу вектора (ξ, η) заданий таблицею:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1

-1	0,10	0,15	0,20
1	0,15	0,25	0,15

Побудувати ряди розподілів випадкових величин $\xi, \eta, \xi+\eta, \xi\cdot\eta$.

5. Дано цільність(густину) розподілу випадкового вектора (ξ,η)

$$p(x,y)=\begin{cases} c(x+y), & 0\le y\le x\le 1 \\ 0, & \text{â³í ø èõ âèï àäêàõ} \end{cases}.$$

а) Знайти сталу С, густини розподілу $\xi, \eta, \xi+\eta$;

б) Вияснити залежні чи незалежні ξ ³ η;

в) Обчислити $P\{\xi+\eta<1\}$.

6. Дано випадкову величину ξ з рядом розподілу

ξ	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Переконатись, що $\xi+\xi\ne 2\xi;\quad \xi\cdot\xi\ne\xi^2$.Побудувати функцію розподілу $F_\xi(x)$ і обчислити $P\{\xi\le 0\}$.

Вказівка: Дві випадкові величини рівні, якщо їх ряди розподілу співпадають.

6.Випадковий вектор (ξ,η) рівномірно розподілений в прямокутнику $Ï=\{(x,y)|-1\le x\le 2;1\le y\le 2\}$.Записати густину і функцію розподілу вектора (ξ,η).Обчислити $P\{(\xi,\eta)\in G\}$,якщо 1. $G=\{(\xi,\eta)|0.5\le x\le 1.5;1.5\le y\le 2.5\}$

2. $G=\left\{(\xi,\eta)\middle|x^2+(y-1.5)^2\le(2.5)^2\right\}$.Встановити, залежні чи незалежні випадкові величини ξ і η.

7. Нехай ξ і η - незалежні випадкові величини, кожна з яких рівномірно розподілена на [0;1]. Знайти: 1. щільність розподілу суми $\zeta=\xi+\eta$; 2.функцію розподілу суми $\zeta=\xi+\eta$; 3. $P\{|\xi+\eta-0.5|<1\}$.

8.Випадковий вектор (ξ,η) має рівномірний розподіл в області $D\subset R^2$, якщо його щільність розподілу має вигляд $p(x,y)=\begin{cases} c, & (x,y)\in D; \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$ Знайти сталу *c*.

9.Випадковий вектор (ξ,η) має щільність розподілу $p(x,y)=\begin{cases} 8xy(1-x^2), & (x,y)\in D; \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$ де $D=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$. Знайти $p_\xi(x)$ і $p_\eta(y)$.

10.Знайти закони розподілу дискретних випадкових величин ξ і η, якщо випадковий вектор (ξ,η) заданий законом розподілу

$\xi\setminus\eta$	-2	0	2	4
1	0,1	0,2		
2		0,1	0,2	
3		0.1	0,2	0,1

Завдання для лабораторної роботи № 6.

Варіант 1.

1. Нехай ξ_i - незалежні випадкові величини відповідно з функціями розподілів $F_i(x)\, i=1,2,...,n.$ Знайти функцію розподілу випадкової величини $\max\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$.
2. Нехай $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна зі щільністю розподілу $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b],\\ 0, & x\notin[a;b].\end{cases}$

   Виписати спільну щільність розподілу випадкових величин $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$.
3. Знайти щільність розподілу суми $\xi_1+\xi_2$ незалежних випадкових величини ξ_1,ξ_2 які задані відповідно зі щільностями
$$p(x)=\begin{cases}\lambda_i e^{-\lambda_i x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0, \lambda_i>0.\end{cases} \quad \lambda_1\ne\lambda_2; i=1;2.$$
4. Дано щільність розподілу випадкового вектора (ξ,η)
$$p(x;y)=\begin{cases}24x^2y, & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0 & \text{â ³í ø èõ âèï àäêàõ.}\end{cases}$$
   Знайти щільність розподілу ξ.
5. Дано дві незалежні випадкові величини ξ і η

ξ	3	10	12
P	0.27	0.43	0.30

η	4	5
P	0.55	0.45

   Побудувати функції розподілу ξ і η, $\xi+\eta$, $\xi\cdot\eta$.

Варіант № 2.

1. Нехай ξ_i - незалежні випадкові величини відповідно зі щільностями розподілів $p_i(x)\quad i=1,2,...,n$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\max\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$.
2. Нехай $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна зі щільністю розподілу $p(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0, \lambda_i>0.\end{cases}$

   Виписати спільну щільність розподілу випадкових величин $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$.
3. Знайти щільність розподілу різниці $\xi_2-\xi_1$ незалежних випадкових величин зі щільностями $p(x)=\begin{cases}\lambda_i e^{-\lambda_i x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0, \lambda_i>0,\end{cases}$ $i=1,2;\quad \lambda_1\ne\lambda_2$.
4. Дано щільність розподілу випадкового вектора (ξ,η)

$$p(x,y)=\begin{cases}24x^2y(1-x), & 0<x<1,\,0<y<1\\ 0, & \text{â ³í ø èõ âèï àäêàõ}\end{cases}.$$

Знайти щільність розподілу η.

5. Дано дві незалежні випадкові величини ξ ³ η

ξ	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.35	0.35

η	0	1
P	0.65	0.35

Варіант 3.

1. Нехай ξ_i - незалежні випадкові величини відповідно з функціями розподілів $F_i(x)\, i=1,2,...,n.$ Знайти функцію розподілу випадкової величини $\min\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$.
2. Нехай $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна зі щільністю розподілу $p(x)=\frac{1}{2a}\exp\left\{-\frac{1}{a}|x-b|\right\},\, a>0.$
3. Нехай ξ ³ η незалежні випадкові величини, які мають показникові розподіли з параметром λ. Знайти щільність розподілу суми $\xi+\eta$ випадкових величин.
4. Дано щільність розподілу випадкового вектора (ξ,η)

$$p(x,y)=\begin{cases}xe^{-x(1+y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{â ³í ø èõ âèï àäêàõ}\end{cases}.$$

Знайти щільність розподілу ξ.

5. Дано дві незалежні випадкові величини ξ і η

ξ	1	2	3
P	0.25	0.5	0.25

η	-1	0
P	0.45	0.55

Побудувати функції розподілу ξ і η, $\xi+\eta$, $\xi\cdot\eta$.

Варіант 4.

1. Нехай ξ_i - незалежні випадкові величини відповідно з функціями розподілів $p(x)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\max\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$.
2. Нехай $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна зі щільністю розподілу $p(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}\exp\left\{-\frac{1}{a}(x-b)\right\}, & x>b,\\ 0, & x\le b\end{cases}$

Виписати спільну щільність розподілу випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$.

3. Нехай ξ ³ η незалежні випадкові величини, які мають показникові розподіли з параметром λ. Знайти щільність розподілу суми $\xi - \eta$ випадкових величин.
4. Дано щільність розподілу випадкового вектора (ξ, η)

$$p(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x > 0,\, y > 0 \\ 0, & \text{â ³í ø èõ âèï àäêàõ} \end{cases}.$$

Знайти щільність розподілу η.

5. Дано дві незалежні випадкові величини ξ і η

ξ	-1	0	1
P	0.35	0.10	0.55

η	1	2
P	0.65	0.35

Побудувати функції розподілу ξ і η, $\xi + \eta$, $\xi \cdot \eta$.

Варіант 5.

1. Нехай ξ_i - незалежні випадкові величини відповідно з функціями розподілів $p(x)$.Знайти щільність розподілу випадкової величини $\min\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$.
2. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна зі щільністю розподілу $p(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{\tilde{A}\left(\dfrac{n}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2}x}, x > 0$, (розподіл x^2 n степенями вільності)

Виписати спільну щільність розподілу випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$.

3. Нехай ξ ³ η незалежні випадкові величини. ξ - розподілення рівномірно на $[-a; a]$, η - має показників розподіл з параметром λ. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\theta = \xi + \eta$.
4. Дано щільність розподілу випадкового вектора (ξ, η)

$$p(x,y) = \begin{cases} 24x\ y\left(1 - x^2\right), & 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{â ³í ø èõ âèï àäêàõ} \end{cases}.$$

Знайти щільність розподілу ξ.

5. Дано дві незалежні випадкові величини ξ і η

ξ	3	10	12
P	0.27	0.43	0.30

η	4	5
P	0.55	0.45

Побудувати функції розподілу ξ і η, $\xi + \eta$, $\xi \cdot \eta$.

Заняття 12-13.

Числові характеристики випадкових величин.

Запитання для самоперевірки.

1. Як обчислюється математичне сподівання функції випадкової величини, закон розподілу якої відомий?
2. Що називається математичним сподіванням випадкової величини?
3. Перелічіть основні властивості математичного сподівання. Який його імовірнісний та механічний зміст?
4. Дайте означення дисперсії випадкової величини та перелічіть її основні властивості.
5. Як обчислюється дисперсія для дискретної та неперервної випадкової величини.
6. Що називається а) початковим, б) центральним моментом n-го порядку випадкової величини та як її обчислити?
7. Випишіть основну нерівність для абсолютних моментів.
8. Що називається модою медіаною, асиметрією, ексцесом?
9. Що називається математичним сподіванням та коваріаційною матрицею випадкового вектора?
10. Що називається коефіцієнтом кореляції? Перелічіть його основні властивості.
11. Який теоретико – ймовірносний зміст параметрів нормального закону?

Розв”язування типових вправ

1. Густина розподілу випадкової величини $\xi \quad P(x)=cx^2 \text{ ï ðè } -1\le x\le 2$.

а) Знайти с, функцію розподілу $F(x)$;

б) Обчислити математичне сподівання, дисперсію, асиметрію, ексцес, моду і медіану.

Розв”язання .

а) Із умови $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx=1$ знаходимо сталу с: $\int\limits_{-1}^{2} cx^2dx=1; \quad c=\frac{1}{3}$.

$P(x)=\frac{1}{3}x^2 \text{ ï ðè } -1\le x\le 2$. Функція розподілу ξ:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(u)du=\begin{cases} 0, \text{ ï ðè } x\le -1 \\ \frac{1}{9}\left(x^3+1\right), \text{ ï ðè } -1\le x\le 2 \\ 1, \text{ ï ðè } x>2 \end{cases}.$$

б) Знаходимо початкові моменти:

$$\alpha_1=M\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=\int\limits_{-1}^{2} x\cdot\frac{1}{3}x^2dx=\frac{5}{4};$$

$$\alpha_2=M\xi^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)dx=\int\limits_{-1}^{2} x^2\cdot\frac{1}{3}x^2dx=\frac{11}{5};$$

$$\alpha_3=M\xi^3=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3p(x)dx=\int\limits_{-1}^{2} x^3\cdot\frac{1}{3}x^2dx=\frac{7}{2};$$

$\alpha_4 = M\xi^4 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^4 p(x)dx = \int\limits_{-1}^{2} x^4 \cdot \frac{1}{3}x^2 dx = \frac{43}{7};$

Знаходимо центральні моменти: $\mu_0 = 0$

$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{11}{5} - \frac{25}{16} = 0,6375;\ \mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = \frac{7}{2} - 3\cdot\frac{11}{5}\cdot\frac{5}{4} + 2\cdot\frac{125}{64} = -0,8435;$

$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 = 3,4085;$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{\mu_2} = 0,7984359$

Таким чином, маємо:

$M\xi = \alpha_1 = 1,25;\ D\xi = \mu_2 = 0,6375\ A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = -1,0567;\ E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 3,6964$.

Знаходимо моду: $p'(x) = \frac{2}{3}x = 0;\ x = 0;\ p''(x) = \frac{2}{3} > 0.\ x = 0 -$ точка мінімуму $p(x)$. Отже $M_0 = 0.$ Розподіл антимодальний. Медіану знайдемо з умови: $F(x) = 0,5$. $\frac{1}{9}\left(x^3 + 1\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{3,5} = 1,52$

Отже, медіана $Me = 1,52.$

2. Дано розподіл випадкового вектора (ξ,η)

$\xi\,|\,\eta$	1	2	3
-1	0,05	0,1	0,1
0	0,2	0,2	0,1
1	0,1	0,1	0,05

Знайти: а) математичне сподівання $(M\xi, M\eta)$;

б) дисперсійну матрицю;

в) коефіцієнт кореляції $\rho_{\xi\eta}$.

розв'язування. Знаходимо спочатку маргінальні розподіли

ξ	-1	0	1
P	0.25	0.50	0.25

η	1	2	3
P	0.35	0.40	0.25

а) Обчислюємо $M\xi$ з $M\eta : M\xi = \sum_k x_k p_k = (-1)\cdot 0,25 + 0\cdot 0,50 + 1\cdot 0,25 = 0$

$M\eta = 1\cdot 0,35 + 2\cdot 0,40 + 3\cdot 0,25 = 1,9$

Математичне сподівання вектора (0;1,9).

б) Обчислюємо елементи дисперсійної матриці:

$M\xi^2 = \sum_k x_k^2 p_k = 0.5;\quad M\eta^2 = 4.2$; $b_{11} = D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 0.5;\ b_{22} = D\eta = 0.59;$

$M(\xi\cdot\eta) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} = -0.1; b_{12} = b_{21} = \operatorname{cov}(\xi,\eta) = M(\xi\cdot\eta) - M\xi\cdot M\eta = -0.1.$

Дисперсійна матриця :

$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ -0.1 & 0.59 \end{pmatrix}$.

в) Коефіцієнт кореляції: $\rho_{\xi\eta} = b_{12} / \sqrt{b_{11}}\sqrt{b_{22}} = -0.184$.

3. Густина розподілу випадкового вектора $p(x,y) = 0.5\sin(x+y)$ при $0 \le x \le \pi/2; 0 \le y \le \pi/2$.

Знайти : $M\xi, M\eta, D\eta, \operatorname{cov}(\xi,\eta), \rho_{\xi\eta}$. Обчислити $P\{\xi \ge \eta\}; M[\sin(\xi+\eta)]$.

Розв'язування. Тому що $p(x,y)=0$ поза квадратом $K = \{(x,y) | 0 \le x, y \le \pi/2\}$, то безпосередньо за формулами знаходимо:

$$M\xi = \iint_K 0.5x\sin(x+y)dxdy = \pi/4; M\eta = \pi/4; M\xi^2 = \pi^2/8 + \pi/2 - 2;$$

$$M\eta^2 = \pi^2/8 + \pi/2 - 2;\quad D\xi = D\eta = 0.1876.\quad M(\xi\cdot\eta) = \iint_K 0.5xy\sin(x+y)dxdy = \pi/2 - 1;$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = -0.046; \rho_{\xi\eta} = \operatorname{cov}(\xi,\eta)/\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta} = -0.245.$$

$$P\{\xi \ge \eta\} = P\{(\xi,\eta) \in G\} = 0.5\int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \sin(x+y)dy = 0.5;\quad M[\sin(\xi+\eta)] = \pi^2/16 - 0.25$$

4.Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з параметром λ. Обчислити $M\dfrac{1}{1+\xi}$.

Розв'язання. За відомим розподілом P_ξ випадкової величини ξ завжди можна обчислити математичне сподівання $Mg(\xi)$ функції $g(\xi)$ від випадкової величини ξ (якщо вона існує). У задачі $g(t) = \dfrac{1}{1+t}$, а випадкова величина ξ має пуассонів розподіл з параметром λ:

$$P_\xi(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k = 0,1,\ldots$$

Тому $M\dfrac{1}{1+\xi} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{1+k}P_\xi(k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{1+k}\cdot\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} =$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(1+k)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda} - 1\right) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

5. Обчислити математичне сподівання й дисперсію біномно розподіленої з параметрами $(n;p)$ випадкової величини ξ.

Розв'язання. Розподілом ξ є

$$P\{\xi = k\} = P_\xi(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,\ldots,n$$

Обчислюємо математичне сподівання

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} kP_\xi(k) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \; = \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} =$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=\{k-1=s\}=$$

$$=np\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{s!(n-1-s)!}p^{s}(1-p)^{n-1-s}=np\big(p+(1-p)\big)^{n-1}=np\,.$$

Отже, $M\xi=np$

Аналогічно

$$M\xi^2=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=np(np-p+1).$$

Звідси маємо

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=np(np-p+1)-(np)^2=np(1-p)\,.$$

Завдання для самостійного розв’язання .

1. З урни, що містить 2 білих і 8 чорних куль беруть три кулі. Знайти розподіл випадкової величини ξ – числа вибраних білих куль. Обчислити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини.
2. Нехай ξ – дискретна випадкова величина з розподілом

x_i	-2	-1	1
$P_\xi(x_i)$	1/2	1/4	¼

Обчислити $M\xi^2 2^{-\xi}$.

3.Випадкова величина ξ – має геометричний розподіл з параметром *p*. Обчислити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини.

4.Нехай ξ – число появ герба при трьох підкиданнях монети, для якої ймовірність появи герба дорівнює 1/3. Знайти розподіл випадкової величини та обчислити математичне сподівання і дисперсію.

5. Обчислити $M[\sin\frac{\pi}{2}\xi]$, якщо а) ξ має рівномірний розподіл на [-1;2]; б) ξ є числом кидань монети до першої появи герба.

6. Тривалість безвідмовної роботи приладу є випадкова величина з показниковим розподілом $p(t)=\lambda e^{-\lambda t}, t>0.$ Знайти $M\tau; D\tau$. Обчислити $P\{\tau\le M\tau\}$.

7. Дискретна випадкова величина має ряд розподілу

ξ	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
P	0.2	0.7	0.1

Знайти розподіл випадкової величини $\eta=\sin\xi$. Обчислити $M\eta; D\eta.$

8. Дискретна випадкова величина ξ має ряд розподілу

ξ	-2	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

Знайти розподіл випадкових величин $\eta = \xi^2 + 1; \theta = |\xi|$. Обчислити їх математичні сподівання та дисперсії.

9. Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює

а) $p(x) = \begin{cases} c\cos x, & |x| \le \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$ б) $p(x) = \begin{cases} c\cos^2 x, & |x| \le \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$

Знайти сталу с та обчислити математичне сподівання і дисперсію.

10. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на $[0,1]$. Обчислити $M\sin^2 \pi\xi; Me^{\xi}$.

11. Знайти числові характеристики випадкового вектора $p(x,y) = \begin{cases} 2(x+y), & 0 \le y \le x \le 1, \\ 0, & \text{â ³í ø èõ âèï àäêàõ.} \end{cases}$

12. Знайти математичне сподівання, коваріаційну матрицю і коефіцієнт кореляції випадкового вектора

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
-1	0.1	0.15	0.2
1	0.15	0.25	0.15

13. Швидкість V молекул ідеального газу в стані рівноваги при першій температурі є випадковою величиною з щільністю розподілу Максвела $p(x) = c\beta^{3/2}x^2e^{-1/2\beta x^2}, x > 0$. β – визначається температурою і масою молекул.

Знайти сталу с; середнє значення швидкості молекул; дисперсію; найімовірнсне значення швидкості молекул.

14. Знайти числові характеристики випадкового вектора (ξ,η) якщо його щільність розподілу $p(x,y) = 8xy\left(1-x^2\right); 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$. Довести, що ξ і η незалежні.

Завдання для лабораторної роботи.

Варіант № 1.

1. Дискретна випадкова величина X приймає три можливих значення $x_1 = 4$ з ймовірністю $P_1 = 0,5$; $x_2 = 6$ з ймовірністю $P_2 = 0,3$ та x_3 з ймовірністю P_3. Знайти x_3 та P_3, якщо відомо, що $M(X) = 8$.

2. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X – числа появи A у двох незалежних випробовуваннях, якщо ймовірності появи в цих випробовуваннях однакові і відомо, що $M(X) = 1,2$.

3. Нехай ξ - дискретна випадкова величина з розподілом

x_i	-2	-1	1	2
$P_\xi(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Обчислити $\mu\xi\sin^2\frac{\pi}{12}\xi$.

4.Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює:

$$P(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 0 \\ 0,5x,\ 0<x\le 2 \\ 0,\ x>2 \end{cases}.$$

Знайти $M\xi, D\xi$. Обчислити ймовірність того, що відхилення ξ від математичного сподівання не перевищить 0,5.

Варіант № 2.

1. Дан перечень можливих значень дискретної випадкової величини X: $x_1=-1, x_2=0, x_3=1,$ а також відомі математичні сподівання цієї величини та її квадрату: $M(X)=0{,}1, M\left(X^2\right)=0{,}9$. Знайти ймовірності $P_1, P_2, P_3,$ які відповідають можливим значенням x_1, x_2, x_3.
2.

Завдання для самостійного розв'язання .

1. Нехай ξ набуває значень 1 і –1 з ймовірностями ½ кожне. Знайти характеристичну функцію ξ.
2. Довести, що функція $\cos^2 t$ є характеристичною функцією, і знайти відповідний розподіл ймовірностей.
3. Випадкова величина ξ має гамма-розподіл: $p_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x>0, \end{cases}$ $(\lambda>0,\quad \alpha>0)$. Знайти характеристичну функцію.
4. Використовуючи вигляд характеристичної функції гауссової (нормально розподіленої) випадкової величини ξ $f(t)=\exp\left\{ita-\frac{1}{2}bt^2\right\}$, де $a=M\xi$, $b=D\xi$, довести, що сума будь-якої кількості гауссових випадкових величин є також гауссова величина.
5. Довести, що характеристична функція $f_\xi(t)$ дійсна тоді і тільки тоді, коли розподіл ξ симетричний(ξ і $-\xi$ мають однаковий розподіл).
6. Довести, що характеристична функція $f_\xi(t)$ дійсна тоді і тільки тоді, коли відповідна функція розподілу $F_\xi(x)$ задовольняє рівність $F_\xi(x)=1-F_\xi(-x-0)$.
7. Використовуючи властивості характеристичних функцій показати, що функції $\sin t$, $|\cos t|$ не можуть бути характеристичними.

Таблиці

Таблиця 1. Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ **.**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3969	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3443	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1782	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1136	1145	1127

1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

x	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0
$\varphi(x)$	0,00013	0,0000589	0,0000249	0,0000101	0,0000040	0,0000015

Таблиця 2. Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ **.**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18493	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49638	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997

x	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0
$\Phi(x)$	0,4999683	0,4999867	0,4999946	0,4999979	0,4999992	0,4999997

Таблиця 3. Квантилі хі-квадрат розподілу $\chi^2_{p,k}$

k	*p*										
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	$0{,}0^4 4$	$0{,}0^3 2$	0,001	0,004	0,016	0,46	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	2,37	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	3,36	7,78	949	11,1	13,3	14,9
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	4,35	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	5,35	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	10,3	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	11,3	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	12,3	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	13,3	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	14,3	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	15,3	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	16,3	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	17,3	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	6,84	7,63	8,91	10,4	11,7	18,3	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	19,3	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	20,3	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	21,3	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	22,3	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	23,3	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	24,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	25,3	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	26,3	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	27,3	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	28,3	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	29,3	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
35	17,2	18,5	20,6	22,5	24,8	34,3	46,1	49,8	53,2	57,3	60,3
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	39,3	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
45	24,3	25,9	28,4	30,6	33,4	44,3	57,5	61,7	65,4	70,0	73,2
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	49,3	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
75	47,2	49,5	52,9	56,1	59,8	74,3	91,1	96,2	100,8	106,4	110,3
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	99,3	118,5	124,3	129,6	135,6	140,2

Таблиця 4. Квантилі розподілу Стьюдента $t_{p,k}$

k	p						
	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
1	1,000	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,3
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,2
4	0,741	1,533	2,135	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1.812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2898	3,646
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

Таблиця 5. Квантилі розподілу Фішера-Снедекора $F_p(k_1,k_2)$ (k_1 – число ступенів вільності більшої дисперсії, k_2 – число ступенів вільності меншої дисперсії)

p=0,95

k_2	k_1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
3	16,13	9,55	9,78	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,14	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,75	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3.86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,85	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,93	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,30	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	284	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,37	2,30
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88

Продовження таблиці (p=0,95)

k_2	k_1								
	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3
2	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49
3	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,68
5	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
6	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
7	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
11	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
13	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11
16	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
18	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
20	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90
21	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87
22	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
23	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81
24	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
25	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77
26	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75
27	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73
28	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71
29	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70
30	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
40	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
60	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
120	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35
∞	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22

p=0,99

k_2	k_1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07
40	7,31	5,18	4,31	3,53	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41

Продовження таблиці (p=0,99)

k_2	k_1								
	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339
2	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49
3	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22
4	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56
5	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11
6	7,87	7,72	7,56	4,70	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97
7	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74
8	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95
9	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40
10	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00
11	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69
12	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45
13	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25
14	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09
15	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96
16	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84
17	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75
18	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66
19	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58
20	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52
21	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46
22	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40
23	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35
24	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31
25	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27
26	3,09	296	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23
27	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20
28	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17
29	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14
30	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11
40	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92
60	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73
120	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53
∞	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32

Література

1. Анісімов В.В., Черняк О.І. Математична статистика.- К.: МП “Леся”, 1995.
2. Барра Ж.-Р. Основные понятия математической статистики.- М.: Мир,1974.-280 с.
3. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики.-М.: Наука, 1983.- 416 с.
4. Боровков А.А. Теория вероятностей.- М.: Наука, 1986.- 432 с.
5. Боровков А.А. Математическая статистика.- М.: Наука, 1984.- 472 с.
6. Бочаров П.П., Печинкин Ф.В. Теория вероятностей. Математическая статистика.- М.: Гардарика, 1998.- 328 с.
7. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика.-М.: Иностр. лит., 1960.- 436 с.
8. Вентцель Е.С., Овчаров Л.Н. Теория вероятностей и ее инженерные приложения.- М.: Наука, 1988.- 480 с.
9. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика.-К.: Вища школа, 1979.- 320 с.
10. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.: Высш. шк., 1977.-479 с.
11. Гнеденко Б.В. Курс теорії імовірностей.- Київ-Львів: Радянська школа, 1949.- 360 с.
12. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей.- М.: Наука, 1988.- 400 с.
13. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.- М.: ГИТТЛ, 1949.-264 с.
14. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики.- М.: Высш. шк., 1971.- 328 с.
15. Зінченко Н.М., Оленко А.Я. Аналітичні моделі та методи соціології.- К.: Видав. центр “Київський ун-т”, 2000.- 106 с.
16. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. - М.: Высш. шк., 1984. - 248 с.
17. Карташов М.В. Конспект лекцій з курсу теорії ймовірностей.- К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2001.- 107 с.
18. Кендал М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи.- М.: Наука, 1973.- 817 с.
19. Коваленко И.Н., Филипова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.: Высш. шк., 1973.- 368 с.
20. Коваленко И.Н., Гнеденко Б.В. Теория вероятностей.- К.: Вища школа, 1990.- 328 с.
21. Колемаев В.А., Староверова О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.: Высш. Шк., 1991.- 400 с.
22. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. К.: Наукова думка, 1978.- 584 с.
23. Крамер Г. Математические методы статистики.- М.: Мир, 1975.- 648 с.
24. Ландкоф Н.С. Введение в теорию вероятностей.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1968.- 236 с.
25. Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці.- К.: Інформтехніка, 1995.
26. Лоэв М. Теория вероятностей.- М.: Изд-во иностр. лит., 1962.- 720 с.
27. Пархоменко В.М. Методи вибіркових обстежень.- К.: Видав. центр “Київський ун-т”, 2001.- 148 с.
28. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.: Наука, 1979.- 496 с.
29. Пытьев Ю.П., Шишмарев И.А. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков.- М.: Изд-во Москов. ун-та, 1983.-256 с.
30. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика.- М.: Наука, 1985.- 320 с.

31. Розанов Ю.А. Случайные процессы (краткий курс).- М.: Наука, 1971.- 288 с.
32. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики.- М.: Наука, 1982.- 256 с.
33. Скороход А.В. Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів.- К.: Вища школа, 1975.- 296 с.
34. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів.- К.: Либідь, 1990.- 168 с.
35. Слюсарчук П.В. Теорія ймовірностей і математична статистика. Текст лекцій.- Ужгород: Вид-во УжДУ, 1984.- 66 с.
36. Смирнов Н.В., Дудин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для инженерных приложений.- М.: Наука, 1969.- 512 с.
37. Солодовников А.С. Теория вероятностей.- М.: Просвещение, 1983.- 207 с.
38. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей.- М.: Изд-во Москов. ун-та, 1972.- 230 с.
39. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т.- М.: Мир, 1984.- Т.1.- 527 с. Т.2.- 751 с.
40. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей.- М.: Наука, 1978.- 224 с.
41. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей.- К.: Вища школа, 1977.- 156 с.
42. Ширяев А.Н. Вероятность.- М.: Наука, 1980.- 576 с.
43. Шметтерер Л. Введение в математическую статистику.- М. Наука, 1976.- 520 с.

Збірники задач

44. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. Задачи и упражнения.- М.: Наука, 1969.- 368 с.
45. Вишневецкий Л.Д., Гусак Д.В., Погребецкая Т.А., Тер-Саакянц Г.Л. Математическая статистика и случайные процессы: Практикум.- К.: Вища школа, 1992.- 143 с.
46. Вуколов Э.А., Ефимов А.В., Земсков В.Н., Золотарев Ю.Г., Каракулин А.Ф., Поспелов А.С., Терещенко А.М. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы.- М.: Наука, 1984.-608 с.
47. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.- М.: Высш. шк., 1975.- 333 с.
48. Дороговцев А.Я., Сільвестров Д.С., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Теорія ймовірностей. Збірник задач.- К.: Вища школа, 1976.- 384 с.
49. Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике.- Ленинград: Изд-во Ленинград. ун-та, 1967.- 332 с.
50. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков А.В. Сборник задач по математической статистике.- М.: Высш. шк., 1989.- 255 с.
51. Климов Г.П., Кузьмин А.Д. Вероятность, процессы, статистика: задачи с решениями.- М.: Изд-во Москов. ун-та, 1985.- 232 с.
52. Козлов М.В. Элементы теории вероятностей в примерах и задачах.-М.: Изд-во Москов. ун-та, 1990.- 344 с.
53. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей.- М.: Изд-во Москов. ун-та, 1963.- 155 с.
54. Оленко А.Я. Ймовірність і статистика. Задачі.- К.: НаУКМА, 2002.- 53 с.
55. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы.- М.: Наука, 1986.-328 с.
56. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под общей редакцией А.А. Свешникова.- М.: Наука, 1970.- 656 с.
57. Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Зубков А.М. Сборник задач по теории вероятностей.- М.: Наука, 1980.- 224 с.
58. Турчин В.М. Теорія ймовірностей. Основні поняття, приклади, задачі.- К.: Видав-во А.С.К., 2004.- 208 с.

59. Турчин В.М. Математична статистика в прикладах і задачах. У 2-х ч.- Дніпропетровськ: ДДУ, 1998.- Ч.1 – 68 с. Ч.2 - 228 с.
60. Черняк О.І., Обушна О.М., Ставицький А.В. Теорія ймовірностей та математична статистика: збірник задач.- К.: Т-во “Знання”, КОО, 2002.- 199 с.
61. Чибисов Д.М., Пагурова В.И. Задачи по математической статистике.- М.: Изд-во МГУ, 1990.- 171 с.

Заняття 1.

Предмет і основні задачі математичної статистики. Генеральна сукупність і вибірка.

1.1.Запитання для самоперевірки.

1.Основні задачі математичної статистики.

2.Дати поняття варіанти, варіаційного ряду, статистичного розподілу вибірки, моди, медіани.

3.Дати означення емпіричної функції розподілу і перелічіть основні властивості.

1.2. Теоретичні відомості.

Нехай для вивчення кількісної ознаки X із генеральної сукупності вилучена вибірка $x_1, x_2, ..., x_k$ об’єму n. Спостерігальні значення x_i ознаки X називають варіантами, а послідовність варіант записаних в зростаючому порядку,- варіаційним рядом.

Статистичним розподілом вибірки називають список варіант x_i варіаційного ряду і відповідних їх частот n_i.

Емпіричною функцією розподілу називають функцію $F^*(x)$, що визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$:

$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, n_x – число варіант, менших за x; n – об’єм вибірки.

1.3.Розв’язування типових задач.

1.Вибірка задана у вигляді розподілу частот.

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

Знайти розподіл відносних частот. Знайти емпіричну функцію розподілу і зобразити графік. Побудувати полігон відносних частот.

Розв’язання:

Запишемо шуканий розподіл відносних частот

x_i	4	7	8	12
ω_i	0,25	0,1	3/20	0,5

де $\omega_i = \frac{n_i}{n}$, та запишемо емпіричну функцію розподілу:

$$F^*(x)=\begin{cases}0 & при \quad x \le 4\\ 0{,}25 & при \quad 4 < x \le 7\\ 0{,}35 & при \quad 7 < x \le 8.\\ 0{,}5 & при \quad 8 < x \le 12\\ 1 & при \quad x > 12\end{cases}$$

1.4. Задачі і вправи для самостійного розв'язання.

1.Вибірка задана у вигляді розподілу частот :

а).

x_i	2	5	7
n_i	1	3	6

б).

x_i	3	6	8
n_i	6	2	2

Знайти розподіл частот.

2.Знайти емпiричну функцію розподілу та побудувати графік по заданому розподілу вибірки.

x_i	1	4	5
n_i	10	15	25

б).

x_i	3	5	6
n_i	15	20	15

3.Побудувати полігон частот по заданому розподілу вибірки.

а).

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

4.Побудувати гістограму частот по заданому розподілу вибірки.

а).

$x_i - x_{i+1}$	1 – 5	5 - 9	9 - 13	13 - 17	17 – 21
n_i	10	20	50	12	8

б).

$x_i - x_{i+1}$	3 – 5	5 - 7	7 - 9	9 -11	11 - 13	13 - 15	15 – 17
n_i	4	6	20	40	20	4	6

5. Обчислити моду , медіану слідуючи вибірок:

а). 7;3;3;6;5;1;2;1;3. б).3,1;3,0;1,5;1,8;2,5;3,1;2,4;2,8;1,3.