Курс: «Застосування диференціальних рівнянь для розв'язання проблем природознавства» **ст. викл. Рего В. Л.**

До Модуля 2

Лекція №15:

Спектральні задачі

Нехай L – лінійний диференціальний оператор, породжений лінійним диференціальним виразом

$$\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(n-k)}(x), \quad x \in (a,b)$$

та лінійними крайовими умовами

$$U_j(y) \equiv \sum_{s=0}^{n-1} \left(\alpha_{s,j} y^{(s)}(a) + \beta_{s,j} y^{(s)}(b) \right) = 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Розглянемо операторне рівняння з дійсним параметром $\lambda = const$

$$Ly = \lambda y, \tag{15.1}$$

еквівалентне крайовій задачі

$$\ell_n(y) = \lambda y(x), \quad x \in (a,b); \tag{15.2}$$

$$U_j(y) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{15.3}$$

Рівняння (15.1) при різних значеннях параметра λ може мати чи не мати нетривіальні розв'язки $y(x) \neq 0$.

Означення 15.1. Ті значення параметра λ, при яких операторне рівняння (15.1) має нетривіальні розв'язки, називаються *власними значеннями* оператора L, а відповідні нетривіальні розв'язки називаються *власними функціями*.

Означення 15.2. Уся множина власних значень називається *спектром* оператора L. Тому крайову задачу (15.2), (15.3), а також подібні до неї задачі знаходження власних значень і власних функцій часто називають *спектральними задачами*.

Нехай $p_k(x) \in C_{(a,b)}$, $k = \overline{0,n}$. Тоді для довільного фіксованого значення λ рівняння (15.1), а отже, і крайова задача (15.2), (15.3), має не більш ніж n лінійно незалежних розв'язків.

Означення 15.3. Максимальна кількість лінійно незалежних власних функцій, які відповідають одному й тому ж власному значенню, називається *кратністю* цього власного значення. Кратність довільного власного значення не може перевищувати порядку диференціального рівняння (15.2).

Означення 15.4. Спектр оператора L називається *дискретним*, якщо всі його власні значення однократні, тобто кожному власному значенню відповідає єдина лінійно незалежна власна функція.

Позначимо через $y_i(\lambda, x)$, $i = \overline{1,n}$, розв'язки задач Коші

$$\ell_n(y_i) = \lambda y_i(x), \quad x > a;$$

$$y_i^{(s)}(a) = \begin{cases} 1, & i = s+1; \\ 0, & i \neq s+1, \end{cases} \qquad i = \overline{1,n}.$$

Очевидно, що наведені задачі Коші мають розв'язки і ці розв'язки єдині; а система функцій $\{y_i(\lambda, x)\}$ є лінійно незалежною. Тоді функція

$$y(\lambda,x)=\sum_{i=1}^{n}C_i y_i(\lambda,x), \tag{15.4}$$

де C_i – довільні сталі, буде загальним розв’язком рівняння (15.2). Для існування власних значень необхідно, щоб із (15.4) можна було вибрати нетривіальний розв’язок, який справджував би крайові умови (15.2), тобто щоб існував нетривіальний розв’язок системи

$$\sum_{i=1}^{n}C_i U_j(y_i)=0, \quad j=\overline{1,m}. \tag{15.5}$$

Мають силу наступні критерії:
1) якщо $m<n$, то система (15.5), а отже, й крайова задача (15.2), (15.3) має нетривіальні розв’язки при будь-яких значеннях параметра λ;
2) якщо $m=n$, то нетривіальні розв’язки існують тоді й тільки тоді, коли детермінант матриці системи (15.5) рівний нулеві:

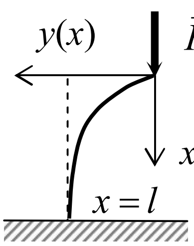
$$\Delta(\lambda)\equiv\det\left\|U_j(y_i)\right\|=0. \tag{15.6}$$

У цьому випадку рівняння (15.6) називається *характеристичним*, а нулі функції $\Delta(\lambda)$ – тобто ті значення параметра λ, котрі справджують рівність (15.6) – є власними значеннями крайової задачі (15.2), (15.3). Кратність власного значення не може перевищувати кратності відповідного кореня характеристичного рівняння;
3) якщо $m>n$, то система (15.5) має нетривіальні розв’язки, коли ранг її матриці менший за *n*, тобто всі мінори *n*-го порядку рівні нулеві. Тут можливі два випадки:
а) усі мінори *n*-го порядку тотожно рівні нулеві при довільних значеннях параметра λ – тоді будь-яке значення λ буде власним;
б) серед мінорів *n*-го порядку є не рівні тотожно нулеві – тоді власними значеннями крайової задачі (15.2), (15.3) будуть ті значення параметра λ, при яких усі мінори *n*-го порядку перетворюються в нуль, а відповідні їм нетривіальні розв’язки будуть власними функціями.
Зауважимо, що аналогічні критерії мають силу і для загальної спектральної задачі вигляду

$$\ell_n(y)\equiv\sum_{k=0}^{n}p_k(\lambda,x)y^{(n-k)}(x)=0, \quad x\in(a,b);$$

$$U_j(y)\equiv\sum_{s=0}^{n-1}\left[\alpha_{s,j}(\lambda)y^{(s)}(a)+\beta_{s,j}(\lambda)y^{(s)}(b)\right]=0, \quad j=\overline{1,m}.$$

де коефіцієнти $p_k(\lambda,x)$, $\alpha_{s,j}(\lambda)$, $\beta_{s,j}(\lambda)$ є неперервними функціями параметра λ, а за змінною *x* коефіцієнти $p_k(\lambda,x)\in C_{(a,b)}$, причому $p_0(\lambda,x)\neq 0$.



Мал. 15.1

Приклад 15.1. Дано тонкий однорідний стрижень довжини *l*, нерухомо закріплений на одному з кінців. На вільний кінець стрижня діє стискувальна сила *P*. Завдання: визначити ту величину сили *P*, при якій стрижень губить прямолінійну форму.
Розв’язання. Функція $y(x)$, яка описує форму зігнутого стрижня (мал. 15.1), є розв’язком диференціального рівняння

$$Py(x)=-EJy'', \tag{15.7}$$

де *J* – осьовий момент інерції поперечного перерізу стрижня, *E* –

модуль пруж-ності Юнга. Вважаємо, що стрижень однорідний і сталого перерізу: тоді $EJ = const$. Позначимо $\lambda^2 = P(EJ)^{-1} \geq 0,$ тоді з (15.7) одержимо диференціальне рівняння $y'' = -\lambda^2 y(x)$.

Із мал. 15.1 видно, що верхній кінець стрижня $x = 0$ у вибраній системі координат не зміщується, тобто $y(0) = 0$, а в нижньому закріпленому кінці дотичні до профілю стрижня завжди паралельні до осі Ox, тобто $y'(l) = 0.$ У підсумку одержуємо наступну спектральну задачу:

$$y'' = -\lambda^2 y(x), \quad x \in (0,l); \tag{15.8}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(l) = 0. \tag{15.9}$$

При $\lambda = 0$ загальний розв'язок рівняння (15.8) має вигляд $y(x) = C_1 x + C_2$. Із крайових умов (15.9) одержимо: $C_1 = C_2 = 0,$ тобто задача має тільки тривіальний розв'язок. Отже, $\lambda = 0$ не буде власним значенням. Зауважимо, що з фізичної точки зору цей факт є очевидним, оскільки $\lambda = 0$ означає, що стрижень не піддається дії сили, а отже займає прямолінійне положення.

Нехай $\lambda \neq 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (15.8) матиме вигляд $y(x) = C_3 \cos\lambda x + C_4 \sin\lambda x.$ Із крайових умов (15.9) одержимо систему:

$$\begin{cases} C_3 = 0; \\ \lambda\left(-C_3 \sin\lambda l + C_4 \cos\lambda l\right) = 0. \end{cases}$$

Маємо випадок $m = n = 2$, тому для визначення власних значень потрібно знайти ненульові (адже $\lambda \neq 0$) корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda \sin\lambda l & \lambda\cos\lambda l \end{vmatrix} \equiv \lambda\cos\lambda l = 0.$$

Звідси одержуємо множину власних значень

$$\lambda_k = \frac{\pi(2k+1)}{2l}, \quad k \in \mathrm{Z},$$

а відповідні власні функції матимуть вигляд

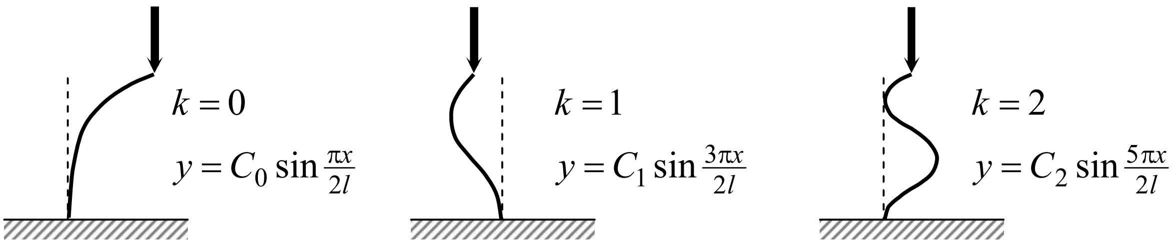
$$y_k(x) = C_k \sin\frac{\pi(2k+1)}{2l}x, \quad C_k = const.$$

Бачимо, що власні функції визначаються з точністю до сталого множника. Це означає, що спектр досліджуваної задачі є дискретним, тобто кожному власному значенню відповідає лише одна лінійно незалежна власна функція.

Оскільки власні значення відомі, то можна знайти і значення критичної сили:

$$P_k = EJ\lambda_k^2 = \frac{\pi^2(2k+1)^2}{4l^2}EJ, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

На мал. 15.2 подані профілі стрижня під дією критичної сили для деяких значень k у випадку $C_k > 0.$ Якщо $C_k < 0,$ то відповідний графік буде симетричним відносно вертикальної осі, яка проходить через закріплений кінець стрижня (на малюнках зображена пунктирною лінією).



Мал. 15.2

Слід відзначити: якщо стрижень неоднорідний або змінної товщини, то жорсткість згину EJ буде функцією координати і задача значно ускладниться.
Зауважимо, що не всяка спектральна задача має розв'язок, або ж її спектр є дискретним.

Приклад 15.2. Дослідити спектральну задачу:

$$y'' = -\lambda y(x), \quad x \in (0,1); \tag{15.10}$$

$$y(0) - y(1) = 0, \quad y'(0) - y'(1) = 0. \tag{15.11}$$

Розв'язання. Залежно від знаку параметра λ загальний розв'язок рівняння (15.10) матиме різний вигляд. Тому для повного дослідження необхідно розглянути три можливі випадки.
Нехай $\lambda < 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (15.10) матиме вигляд $y(x) = C_1 \,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 \,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Із крайових умов (15.11) одержимо систему:

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}}\right) + C_2\left(1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}}\right) = 0; \\ C_1\sqrt{-\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}}\right) - C_2\sqrt{-\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}}\right) = 0. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 - \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}} & 1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}} \\ \sqrt{-\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}}\right) & \sqrt{-\lambda}\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}} - 1\right) \end{vmatrix} \equiv 4\sqrt{-\lambda}\left(\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda} - 1\right) = 0$$

не має від'ємних коренів. Отже, $C_1 = C_2 = 0$, тобто крайова задача має тільки тривіальний розв'язок, а тому при $\lambda < 0$ власних значень не існує.
Нехай $\lambda = 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (15.10) матиме вигляд $y(x) = C_3 x + C_4$. Ця функція справджує крайові умови (15.11) при довільному значенні C_4, якщо тільки $C_3 = 0$. Отже, $\lambda = 0$ буде власним значенням, якому відповідатиме власна функція $y(x) = C_4 \neq 0$.
Нехай $\lambda > 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (15.10) матиме вигляд $y(x) = C_5 \cos\sqrt{\lambda}x + C_6 \sin\sqrt{\lambda}x$. Із крайових умов (15.11) одержимо систему:

$$\begin{cases} C_5\left(\cos\sqrt{\lambda} - 1\right) + C_6 \sin\sqrt{\lambda} = 0; \\ C_5\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - C_6\sqrt{\lambda}\left(\cos\sqrt{\lambda} - 1\right) = 0. \end{cases} \tag{15.12}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda} - 1 & \sin\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}\right) \end{vmatrix} \equiv 2\sqrt{\lambda}\left(\cos\sqrt{\lambda} - 1\right) = 0$$

має додатні корені вигляду $\lambda_k = 4\pi^2 k^2$, $k = \overline{1,\infty}$, які й будуть шуканими власними значеннями. Для цих значень обидва рівняння системи (15.12) перетворюються в тотожності, тому відповідні власні функції запишуться у вигляді $y_k(x) = C_5 \cos 2\pi kx + C_6 \sin 2\pi kx$. Це означає, що кожному додатному власному значенню відповідатимуть дві лінійно незалежні власні функції, тобто спектр у випадку крайової задачі (15.10), (15.11) не є дискретним.

Об'єднавши випадки $\lambda = 0$ і $\lambda > 0$, можна записати всю множину власних значень і власних функцій крайової задачі (15.10), (15.11):

$$\lambda_k = 4\pi^2 k^2, \quad y_k(x) = A_k \cos 2\pi kx + B_k \sin 2\pi kx, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Тут A_k, B_k – довільні сталі, причому $A_0 \neq 0$, $A_k^2 + B_k^2 \neq 0$, $k = \overline{1,\infty}$.

Приклад 15.3. Дослідити спектральну задачу:

$$y^{(4)} = -\lambda y''(x), \quad x \in (0,1); \tag{15.13}$$

$$y''(0) = y'''(0) = 0, \quad y(1) = y'(1) = 0. \tag{15.14}$$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, для повного дослідження необхідно розглянути три можливі випадки.

Нехай $\lambda = 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (15.13) має вигляд $y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$. Із крайових умов (15.14) одержимо систему:

$$\begin{cases} 2C_2 = 0; \\ 6C_1 = 0; \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0; \\ 3C_1 + 2C_2 + C_3 = 0, \end{cases}$$

звідки $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, тобто крайова задача має тільки тривіальний розв'язок, а тому $\lambda = 0$ не є власним значенням.

Нехай $\lambda < 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (15.13) має вигляд $y(x) = C_5 + C_6 x + C_7 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_8 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Із крайових умов (15.14) одержимо систему:

$$\begin{cases} -\lambda(C_7 + C_8) = 0; \\ -\lambda\sqrt{-\lambda}(C_7 - C_8) = 0; \\ C_5 + C_6 + C_7 e^{\sqrt{-\lambda}} + C_8 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0; \\ C_6 + \sqrt{-\lambda}\left(C_7 e^{\sqrt{-\lambda}} + C_8 e^{-\sqrt{-\lambda}}\right) = 0, \end{cases}$$

звідки при від'ємних λ $C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = 0$, тобто крайова задача знову має тільки тривіальний розв'язок. Отже, при $\lambda < 0$ власних значень не існує.

Нехай $\lambda > 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (15.13) має вигляд $y(x) = C_9 + C_{10} x + C_{11} \cos\sqrt{\lambda}x + C_{12} \sin\sqrt{\lambda}x$. Із крайових умов (15.14) одержимо систему:

$$\begin{cases} -\lambda C_{11} = 0; \\ -\lambda\sqrt{\lambda}C_{12} = 0; \\ C_9 + C_{10} + C_{11}\cos\sqrt{\lambda} + C_{12}\sin\sqrt{\lambda} = 0; \\ C_{10} - \sqrt{\lambda}\left(C_{11}\sin\sqrt{\lambda} - C_{12}\cos\sqrt{\lambda}\right) = 0, \end{cases}$$

звідки при додатних λ $C_9 = C_{10} = C_{11} = C_{12} = 0$, тобто крайова задача знову має тільки тривіальний розв'язок. Тому при $\lambda > 0$ власних значень також не існує.
Отже, крайова задача (15.13), (15.14) взагалі не має нетривіальних розв'язків.

Означення 15.5. *Задачею Штурма-Ліувілля (ЗШЛ)* називається спектральна задача $Ly = -\lambda\rho(x)y$ вигляду

$$\begin{aligned} &[p(x)y']' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (a,b); \\ &A_0 y(a) + B_0 y'(a) = 0, \quad A_1 y(b) + B_1 y'(b) = 0, \end{aligned} \tag{15.15}$$

де $p(x) \in C^1_{(a,b)}$, $q(x), \rho(x), f(x) \in C_{(a,b)}$, причому $p(x) > p_0 > 0$, $\rho(x) > \rho_0 > 0$.
Наведемо основні властивості власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля (15.15).

1. Усі власні значення ЗШЛ (15.15) є дійсними й утворюють зростаючу послідовність чисел $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, яка прямує до нескінченості при $n \to \infty$.

2. Спектр ЗШЛ (15.15) є дискретним, тобто кожному власному значенню відповідає одна лінійно незалежна власна функція.

3. Якщо λ_1 і λ_2 – два різні власні значення ЗШЛ (15.15), то відповідні власні функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ ортогональні з вагою $\rho(x)$ на проміжку $[a,b]$.

4. Якщо в задачі (15.15) коефіцієнти рівняння $p(x)$ і $q(x)$ замінити на $\tilde{p}(x) \ge p(x)$ і $\tilde{q}(x) \ge q(x)$, то власні значення не зменшаться (тобто $\tilde{\lambda}_n \ge \lambda_n$); якщо ж замінити коефіцієнт $\rho(x)$ на $\tilde{\rho}(x) \ge \rho(x)$, то $\tilde{\lambda}_n \le \lambda_n$ (власні значення не збільшаться). При цьому власні значення λ_n ЗШЛ (15.15) неперервно залежать від коефіцієнтів рівняння.

5. При зменшенні довжини відрізка $[a,b]$ власні значення ЗШЛ (15.15) не зменшуються, а при збільшенні відповідно – не збільшуються.

6. Власна функція $y_n(x)$ ЗШЛ (15.15), яка відповідає власному значенню λ_n (n=0,1,2,…), має рівно n нулів на інтервалі (a,b).

7. Якщо функція $g(x) \in C^1_{[a,b]}$ і справджує крайові умови задачі (15.15), то її можна розкласти в ряд Фур'є за системою власних функцій $\{y_n(x)\}$ ЗШЛ (15.15):

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n y_n(x), \quad \text{де} \quad \alpha_n = \frac{\int_a^b g(x)\rho(x)y_n(x)dx}{\int_a^b \rho(x)y_n^2(x)dx} \; -$$

коефіцієнти Фур'є, причому цей ряд збігається абсолютно й рівномірно до функції $g(x)$ на відрізку $[a,b]$.

8. Для будь-якої функції $g(x) \in C^1_{[a,b]}$, яка справджує крайові умови задачі (15.15), виконується нерівність

$$\lambda_0 < -\frac{1}{\rho_0}\frac{(Lg, g)}{(g, g)},$$

яка має назву *принципу Релея* для задачі Штурма-Ліувілля (15.15).

Задачі типу (15.15) часто виникають при застосуванні методу Фур'є до розв'язування задач математичної фізики. При цьому крайові умови можуть набувати вигляду, відмінного від наведених в означенні, наприклад,

$$y(a)=y(b), \quad p(a)y'(a)=p(b)y'(b). \tag{15.16}$$

Умови (15.16) у випадку $p(a)$=$p(b)$ можна розглядати як умови періодичності. Зауважимо, що для ЗШЛ з крайовими умовами вигляду (15.16) мають силу всі наведені вище властивості, окрім пункту **2.** (тобто спектр задачі не обов'язково буде дискретним).

Приклад 15.4. Знайти закон вільних коливань однорідної струни довжини l із нерухомо закріпленими кінцями $x=0$ та $x=l$, якщо початкове відхилення точок струни описується функцією $\varphi(x)=ql^{-2}x(l-x)$, $q=const\neq 0$, а їх початкова швидкість рівна нулеві.

Розв'язання. Із курсу рівнянь математичної фізики відомо, що вільні коливання однорідної струни описуються рівнянням із частинними похідними дру-гого порядку

$$u_{tt}=a^2u_{xx}, \tag{15.16}$$

де невідома функція $u(t,x)$ визначає відхилення точки струни з абсцисою x у момент часу t, а $a^2=\frac{P}{c}$, де P величина сили натягу, ρ – маса одиниці довжини струни. Згідно з умовою задачі потрібно знайти нетривіальний розв'язок $u=u(t,x)$ рівняння (15.16), який справджує крайові умови на кінцях $x=0$ та $x=l$

$$u(t,0)=0, \quad u(t,l)=0, \tag{15.17}$$

а також початкові умови в момент часу $t=0$

$$u(0,x)=\varphi(x)=ql^{-2}x(l-x), \quad u_t(0,x)=\psi(x)=0. \tag{15.18}$$

Зауважимо, що умови (15.17) та (15.18) є узгодженими, оскільки

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0, \quad \psi(0)=\psi(l)=0,$$

тобто задача поставлена коректно. Розв'язок шукатимемо методом відокремлення змінних (методом Фур'є) у вигляді

$$u(t,x)=X(x)T(t). \tag{15.19}$$

Підставивши (15.19) у ДРЧП (15.16) і відокремивши змінні, отримаємо рівності вигляду

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\lambda, \tag{15.20}$$

де λ стала (це випливає з того, що ліва частина є функцією лише змінної x, а права лише змінної t), яка може набувати довільних дійсних значень. Оскільки з крайових умов (15.17) $X(0)=0,\ X(l)=0$, тому з урахуванням (15.20) дістанемо задачу Штурма-Ліувілля

$$X''(x)=\lambda X(x), \tag{15.21}$$

$$X(0)=0, \quad X(l)=0 \tag{15.22}$$

та рівняння

$$T''(t)-\lambda a^2T(t)=0. \tag{15.23}$$

Досліджуючи ЗШЛ (15.21), (15.22) аналогічно до Прикладу 15.2, переконуємося, що у випадках $\lambda > 0$ та $\lambda = 0$ крайова задача має тільки тривіальний розв'язок, а отже, власних значень не існує.

Якщо $\lambda < 0,$ то загальний розв'язок рівняння (15.21) має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}x,$$

і на підставі крайових умов отримуємо систему

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 = 0, \\ C_2 \sin\sqrt{-\lambda}l = 0. \end{cases}$$

Із першого рівняння системи $C_1 = 0,$ а з другого $\sin\sqrt{-\lambda}l = 0,$ $\sqrt{-\lambda}l = n\pi,$ $n \in N$ ($C_2 \neq 0$, бо в протилежному випадку одержується тривіальний розв'язок). Отже, система власних значень і власних функцій ЗШЛ (15.21), (15.22)

$$\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n \in N. \tag{15.24}$$

За знайдених власних значень для кожного $n \in N$ загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами (15.23) запишеться у вигляді

$$T_n(t) = \bar{c}_1 \cos\left(\tfrac{n\pi}{l}a\right)t + \bar{c}_2 \sin\left(\tfrac{n\pi}{l}a\right)t.$$

Тоді на підставі (15.19) для кожного $n \in N$ можемо виписати відповідний частинний розв'язок ДРЧП (15.16), який справджує крайові умови (15.17):

$$\begin{aligned} u_n(t,x) &= c_n \sin\left(\tfrac{n\pi}{l}x\right)\left[\bar{c}_1 \cos\left(\tfrac{n\pi}{l}a\right)t + \bar{c}_2 \sin\left(\tfrac{n\pi}{l}a\right)t\right] = \\ &= \sin\left(\tfrac{n\pi}{l}x\right)\left[\alpha_n \cos\left(\tfrac{n\pi}{l}a\right)t + \beta_n \sin\left(\tfrac{n\pi}{l}a\right)t\right] \end{aligned} \tag{15.25}$$

Із лінійності й однорідності ДРЧП (15.16) і крайових умов (15.17) випливає, що лінійна комбінація частинних розв'язків (15.25)

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\tfrac{n\pi}{l}x\right)\left[\alpha_n \cos\left(\tfrac{n\pi}{l}a\right)t + \beta_n \sin\left(\tfrac{n\pi}{l}a\right)t\right] \tag{15.26}$$

також буде розв'язком ДРЧП (15.16), який справджує крайові умови (15.17) – за припущення, що ряд у правій частині збігається і його можна почленно диференціювати двічі за *t* і за *x* (це можна показати для достатньо гладких початкових функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$).

Виберемо в (15.26) довільні сталі α_n, β_n таким чином, аби задовольнити початкові умови (15.18):

$$\begin{cases} u(0,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\tfrac{n\pi}{l}x\right) = \varphi(x) = ql^{-2}x(l-x), \\ u_t(0,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\tfrac{n\pi}{l}a\right)\sin\left(\tfrac{n\pi}{l}x\right) = \psi(x) = 0. \end{cases} \tag{15.27}$$

Із теорії рядів Фур'є відомо, що непарну функцію $f(x)$, визначену на інтервалі $(-l,l)$, можна розкласти в синус-ряд Фур'є вигляду

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin\left(\frac{j\pi}{l} x\right), \quad b_j = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\left(\frac{j\pi}{l} x\right) dx .$$

Застосувавши ці розклади в рівностях (15.27), бачимо, що коефіцієнти α_n і β_n можна виразити через коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, продовжених непарним чином на інтервал $(-l,0)$:

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx, \quad \beta_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx.$$

Після обчислення інтегралів одержимо значення коефіцієнтів:

$$\alpha_n = \frac{2q}{l^3}\int_0^l x(l-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{-4q}{n^3\pi^3}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{8q}{n^3\pi^3}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad k \in N;$$

$$\beta_n = 0, \quad n \in N .$$

Підклавши знайдені коефіцієнти в ряд (15.26), одержимо шуканий закон вільних коливань однорідної струни

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8q}{(2k-1)^3\pi^3} \cos\left[\frac{(2k-1)a\pi t}{l}\right] \sin\left[\frac{(2k-1)\pi x}{l}\right].$$

Джерела:

1. *Маринець В. В., Рего В. Л., Маринець К. В.* Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. – Ужгород: «Говерла», 2013. – 196 с
2. *Rontó Miklós, Raisz Péterné.* Differenciálegyenletek műszakiaknak. Elméleti összefoglaló 300 kidolgozott feladattal. – Miskolci egyetemi kiadó, 2004. – C. 219-224.