

Міністерство освіти і науки України
Ужгородський національний університет
Фізичний факультет

Жихарєв В.М., Конопльов О.М., Різак В.М.

МЕХАНІКА

(Фізичний практикум)

Ужгород – 2010

УДК 531(076.5)

ББК В2я73-5

Ж75

МЕХАНІКА. Фізичний практикум: Навчальний посібник / ЖИХАРЄВ В.М., КОНОПЛЬОВ О.М., РІЗАК В.М. – Ужгород, УжНУ, 2010. – 84 с.

ISBN 978-966-2095-46-3

У посібнику приведено рекомендації щодо підготовки, виконання та оформлення лабораторних робіт, основи теорії похибок і методи обробки результатів фізичного експерименту, наведено описи лабораторних робіт до розділу «Фізичні основи механіки» курсу «Загальна фізика».

Посібник призначений для студентів галузі знань «Інформаційна безпека» (1701) за напрямками підготовки «Системи технічного захисту інформації» та «Безпека інформаційних і комунікаційних систем». Може бути корисним студентам інженерних та інших спеціальностей, які вивчають курс загальної фізики з лабораторним практикумом.

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор Пуга П.П.

доктор фізико-математичних наук, професор Кельман В.А.

Рекомендовано до друку редакційно-видавничою радою УжНУ (протокол № 9, від 23 вересня 2010 року).

©2010, ЖИХАРЄВ В.А., КОНОПЛЬОВ О.М., РІЗАК В.М.

Вступ

Бурхливий розвиток інформаційного простору , створення умов для інформаційних стосунків між органами державної влади і суспільства, розробка методів і форм інформаційної політики держави, розробка сучасних інформаційних технологій і технічних засобів тощо, стимулювало розвиток нової галузі знань - «інформаційна безпека».

В межах цієї галузі особливого значення набувають такі напрямки підготовки кваліфікованих спеціалістів як «Системи технічного захисту інформації» та «Безпека інформаційних і комунікаційних систем». Фахівці цих напрямків професійно орієнтовані на розробку нових науково емних технологій, проведення проектно-конструкторських та технологічних робіт в телекомунікаційних системах та мережах, експлуатацію та ремонт спеціалізованої техніки в підрозділах служб безпеки підприємств, установ і організацій з різним формами власності. Також важливими науково - технічними задачами досліджень в цій галузі знань є підвищення ефективності експлуатації в радіоелектронних та телекомунікаційних системах. Вирішення всіх цих задач неможливе без глибокого розуміння найбільш загальних властивостей матерії та форм її руху (механічних, теплових, електромагнітних тощо).

Оскільки курс «Механіка» є експериментальним, він повинен ознайомити студентів з основними методами спостережень, вимірювань і експериментування. Тому курс супроводжується лабораторними заняттями в загальному фізичному практикумі.

Тематика лабораторних занять.

1. Вступ, організаційні питання, правила техніки безпеки, значення фізичного експерименту. Загальна характеристика фізичних вимірювань. Систематичні похибки вимірювань та методи їх виявлення та усунення.

2. Основи теорії випадкових похибок вимірювань:прямі вимірювання. Лабораторна робота №1. Експериментальне визначення функцій розподілу випадкових величин.

3. Об'єднання систематичних і випадкових похибок. Лабораторна робота №2. Вимірювання лінійних розмірів і визначення об'ємів твердих тіл.

4. Лабораторна робота №3. Вивчення законів прямолінійного руху на машині Атвуда.

5. Лабораторна робота №4. Визначення прискорення сили земного тяжіння за допомогою математичного маятника.

6. Лабораторна робота №5. Визначення коливань зв'язаних систем.

7. Лабораторна робота №6. Визначення моментів інерції циліндрів та перевірка теореми Гюйгенса-Штейнера методом крутильних коливань.

8. Лабораторна робота №7. Визначення коефіцієнта сили сухого тертя (тертя кочення).

9. Лабораторна робота №8. Визначення модуля Юнга за розтягом дротини та прогином стержня.

10. Лабораторна робота №9. Рух тіл при наявності аеродинамічних сил опору.

Мета проведення лабораторних занять – ознайомлення з основними методиками вимірювання фізичних величин, приладами і установками, набуття навиків проведення експерименту й обробки експериментальних результатів, поглиблення знань і розуміння суті фізичних понять і законів.

Завдання, що ставляться при проведенні лабораторних занять

В результаті виконання лабораторних робіт студент повинен:

- знати суть фізичних законів і понять, основи експериментальних методик, їх чутливість і точність, основи теорії похибок.

- вміти критично аналізувати і виконувати всі етапи лабораторної роботи, вірно використовувати методи наближених обчислень, найбільш поширені засоби обчислювальної техніки для підрахунку результатів експериментальних вимірювань, робити висновки формул абсолютної і відносної похибок для різних випадків, правильно оформляти одержані експериментальні результати і звіт про виконану роботу, скласти коротке резюме по кожному завданню.

Підготовка до лабораторних робіт, їх виконання, оформлення звітів передбачають велику самостійну роботу як вдома, так і при роботі в лабораторії. Перш ніж приступити до виконання лабораторної роботи, студент повинен підготувати теоретичні питання, що запропоновані у методичному посібнику до даної лабораторної роботи, вивести робочі формули, вміти оцінити похибки вимірювань. Після допуску викладачем до виконання роботи студент зобов'язаний вести чітко записи в робочому зошиті і на протязі заняття не тільки виконати вимірювання по лабораторній роботі, але й провести обчислення вимірюваної величини і оцінити похибку вимірювань. Під час самопідготовки студент оформляє звіт про виконану лабораторну роботу і знайомиться з установками, методичними матеріалами по наступній лабораторній роботі, вивчає теоретичний матеріал, готує таблиці і схеми в робочому зошиті, виводить робочі формули і формули для похибок вимірювань, складає програми розрахунків на ЕОМ.

Основні вимоги до підготовки і оформлення звіту про лабораторну роботу.

1. Підготовка до лабораторної роботи. В робочому зошиті повинні бути записи (в довільній формі) по наступних пунктах:

- назва роботи;
- відповіді на теоретичні питання, знання яких необхідне для виконання роботи;
- опис експериментальної установки;
- робочі формули та їх вивід;
- формули для оцінки похибок вимірювань та їх вивід;
- таблиця для запису результатів вимірювань.

Всі розрахунки виконуються в робочому зошиті протягом лабораторного заняття.

2. Порядок допуску до виконання лабораторної роботи. До виконання роботи студент допускається, якщо він:

- вивчив явища, закони, які досліджуються чи застосовуються в даній лабораторній роботі;
- знає методику експерименту, хід виконання роботи;
- оформив звіт про лабораторну роботу, виконану на попередньому занятті;
- захистив всі виконані попередні роботи (має заборгованість не більше, ніж із двох робіт).

3. Оформлення звіту про виконану роботу. Звіт про лабораторну роботу виконується студентом в окремому зошиті протоколів лабораторних робіт після виконання роботи згідно наступної схеми:

- назва роботи;
- мета роботи;
- використані матеріали і прилади;
- короткі теоретичні відомості про явища, що вивчаються в роботі;
- опис і схема установки;
- хід виконання роботи;
- кінцевий результат вимірювань і оцінка похибок вимірювань;
- аналіз одержаних результатів і висновки.

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

1. Вимірювання фізичних величин, обробка результатів вимірювання.

Основу науково-технічних знань становлять вимірювання. Про значення вимірювань дуже вдало висловився Д.І. Менделєєв: "Наука починається... з того часу, коли починають вимірювати...". Вимірювання мають важливе значення і у практичному житті людини. Завдяки вимірюванням кількісно характеризуються властивості фізичних об'єктів, мірою яких є фізична величина. Згідно державної системи стандартів: "Фізична величина – це властивість, спільна в якісному відношенні для багатьох фізичних об'єктів (фізичних систем, їхніх станів та процесів, що в них відбуваються), але в кількісному відношенні – індивідуальна для кожного об'єкта". "Вимірювання – знаходження значення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів".

Технічні засоби, які використовуються для вимірювань і мають нормовані метрологічні властивості, називаються засобами вимірювання. Їх поділяють на міри (наприклад: міра маси – важок, гиря; міра довжини – лінійка, метр, мікромметр), вимірювальні перетворювачі, прилади (штангенциркуль, амперметр, тощо), вимірювальні установки (місток Уітстона).

Кожному фізичному об'єкту властиве певне значення фізичної величини. Значення, яке ідеально відтворює властивості даного об'єкта в кількісному та в якісному відношенні, називають *істинним значенням* фізичної величини. Істинні значення не залежать від засобів нашого пізнання і є тією абсолютною істиною, до якої ми прагнемо, намагаючись виразити їх у вигляді чисел. Істинне значення величини ми можемо оцінити експериментальним шляхом за допомогою засобів вимірювання. Значення величини, знайдене вимірюваннями, називають результатом вимірювання. Результат вимірювання - це продукт нашого пізнання, наближена оцінка істинного значення величини. Він залежить не лише від самого значення величини, яку оцінюють, але і від засобів вимірювання, методів вимірювання, від навичок і властивостей органів чуття експериментатора.

Величина, яка характеризує відхилення результату вимірювання від істинного значення вимірюваної величини є однією з найважливіших характеристик вимірювання і називається *похибкою вимірювань*.

Якщо x - результат вимірювання, а x_0 - істинне значення вимірюваної величини, то різниця між ними виражає так звану абсолютну похибку:

$$\Delta x = x - x_0. \quad (1)$$

Всі вимірювання поділяються на такі види: *прямі, посередні або непрямі, сукупні та спільні*.

Прямі вимірювання: шукане значення величини знаходять безпосередньо з дослідних даних порівнянням з мірою цієї величини чи безпосередньо за відліковим пристроєм вимірювального приладу.

Посередні (непрямі) вимірювання - це такі вимірювання, результат яких знаходять на основі прямих вимірювань величин, пов'язаних з вимірюваною величиною відомою аналітичною, графічною чи табличною залежністю. Приклад: знаходження густини речовини ρ однорідного тіла за його масою m та геометричними розмірами; для тіла у формі прямокутного паралелепіпеда довжиною a , шириною b , висотою c : $\rho = m/(a \cdot b \cdot c)$.

Сукупні вимірювання - це такі, коли виконуються одночасно вимірювання кількох однойменних величин, за якими шукані значення величин знаходять розв'язуванням системи рівнянь, знайдених при прямих вимірюваннях різних комбінацій цих величин. Приклад: знаходження маси зважуванням. Нехай маємо гирі 1 кг, 2 кг і 5 кг, та деякі невідомі маси m_1 і m_2 . Нехай зважування на терезах дало такий результат (рівновагу терезів):

$$\begin{cases} m_2 = m_1 + 5 + 1 \\ m_1 + 2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 5 - 2 = 3 \text{ кг} \\ m_2 = 3 + 6 = 9 \text{ кг} \end{cases}$$

Спільні вимірювання - це такі, в результаті яких одночасно вимірюють кілька різнойменних величин для визначення залежності між ними. Приклад: залежність опору провідника від температури для знаходження, наприклад, температурних коефіцієнтів опору, струму від напруги для оцінки вольт-амперних характеристик діода. Одночасним вимірюванням сили струму у колі і падіння напруги на змінному опорі цього кола знаходять е.р.с. та внутрішній опір джерела струму: нехай при деяких двох значеннях змінного опору виміряні значення є U_1, I_1 і U_2, I_2 ; тоді

$$\left. \begin{array}{l} E = I_1 r + U_1 \\ E = I_2 r + U_2 \end{array} \right\} \Rightarrow (I_1 - I_2) \cdot r + U_1 - U_2 = 0 \Rightarrow r = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2}; E = \frac{I_1 U_2 - U_1 I_2}{I_1 - I_2}$$

У залежності від умов проведення експерименту вимірювання поділяють на рівноточні (умови при проведенні дослідів залишаються незмінними) і нерівноточні.

2. Види похибок вимірювань.

Мета вимірювання-знаходження результату вимірювання (наближеної оцінки істинного значення фізичної величини) та оцінка його відхилення від істинного значення. Характеризує це відхилення абсолютна похибка, яка визначається формулою (1).

Оскільки x_0 (істинне значення) невідоме, то його замінюють дійсним значенням X , яке знаходять з експерименту і яке найкраще наближається до істинного. Тоді похибку обчислюють за формулою:

$$\Delta x = x - X. \quad (2)$$

Найпростіше ця формула використовується в тих випадках, коли відоме X . Наприклад, при встановленні похибок засобів вимірювання при їх перевірці (перевірка засобів вимірювання). Якщо при повірці гири, на якій нанесено 100 г, виявиться, що маса дорівнює 100,030 г, то $\Delta m = 100 - 100,030 = -0,030$ г. А дійсне значення маси гири $X = x + (-\Delta x) = x - \Delta x$, оскільки поправка дорівнює похибці, взятій з протилежним знаком. Якщо похибку в -0,030 г матиме гиря масою 5 г, то зрозуміло, що гиря в 100 г виготовлена точніше. Для порівняння користуються так званою *відносною похибкою*, яка визначається за формулою

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0} \approx \frac{\Delta x}{X} \approx \frac{\Delta x}{x} \quad (3)$$

і виражається в процентах. Величина обернена до похибки називається точністю вимірювання. Якщо похибка вимірювання становить $10^{-2}\% = 10^{-4}$, то точність дорівнює 10^4 .

Оскільки істинне значення фізичної величини залишається невідомим, то похибку вимірювання точно встановити неможливо. Під час обробки результатів спостережень оцінюється лише проміжок, в якому може знаходитися значення похибки, а отже, й результат вимірювання матиме не одне, конкретне, значення, а множину значень.

Щоб оцінити похибки вимірювання, потрібно розглянути їх характер і причини появи. Щодо останніх похибки поділяються на три класи: випадкові, систематичні й промахи.

Випадкова похибка - складова похибки вимірювання, яка змінюється випадково під час повторних вимірювань однієї й тієї самої величини. Її наявність виявляється в тому, що при повторенні вимірювань тієї самої величини з однаковою ретельністю дістають значення, які відрізняються від попередніх останніми значущими цифрами. Випадкові похибки зумовлюються багатьма причинами, дія яких на результат кожного спостереження різна і не може бути врахована наперед (струси фундаменту будинку, вплив незначних переміщень повітря, тощо).

Систематична похибка - складова похибки вимірювання, яка залишається сталою або закономірно змінюється під час повторних вимірювань тієї самої величини. Вона завжди односторонньо впливає на результати спостережень, тільки збільшуючи, чи тільки зменшуючи їх. Наприклад, похибки мір, що виникають у результаті допусків під час їх виготовлення, похибки показів вимірювальних приладів через неточне їх градування і т.д. До систематичних похибок належить похибка внаслідок не абсолютної рівності плеч терезів.

Промахи - грубі похибки, які спотворюють результати вимірювань. Причинами їх виникнення можуть бути: неправильне визначення ціни поділки шкали (особливо, коли ціна поділки змінюється), помилковий відлік поділок шкали, помилковий запис результату спостереження (описка), пропуски в спостереженнях, помилки під час обчислення чи переписування. Як правило, результати таких вимірювань вилучаються з сукупності даних вимірювань.

3. Похибки прямих вимірювань [2,3]

Нехай у результаті повторюваних рівноточних вимірювань фізичної величини x маємо послідовність значень: $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$. Подамо результати цих n вимірювань у вигляді:

$$\Delta x_1 = x_1 - X; \Delta x_2 = x_2 - X; \Delta x_i = x_i - X; \Delta x_n = x_n - X. \quad (4)$$

Підсумовуючи члени в (4), дістаємо:

$$X = \bar{x} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \quad \text{де} \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

– середнє арифметичне значення вимірюваної величини.

При великій кількості вимірювань, у випадку їх нормального (гаусівського) розподілу, випадкові відхилення Δx_i однакові за модулями, але з різними знаками, зустрічаються однаково часто, тому

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{а} \quad X = \langle x \rangle.$$

Отже, при $n \rightarrow \infty$ істинне значення фізичної величини дорівнює середньому арифметичному (звичайно, якщо при цьому немає систематичних похибок).

У реальній метрологічній практиці число вимірювань n є скінченною величиною. Через це завдання теорії обробки результатів вимірювань зводиться до оцінки ступеня наближення вимірюваного значення до істинного.

Прояв випадкової події визначається імовірністю P . Імовірністю називається число, навколо якого групуються відносні частоти появи випадкової події в різних серіях випробувань.

Відносною частотою події A (P_A) називається відношення числа появи певної події n_A до числа всіх випробувань n ($P_A = \frac{n_A}{n}$).

Повне описання появи випадкових подій здійснюється за допомогою функції розподілу ймовірностей. Аналогічно використовується і функція розподілу випадкових похибок.

Інтегральною функцією розподілу, або просто функцією розподілу випадкової величини x , називається функція $F(x)$, яка дорівнює

ймовірності того, що випадкова величина x набуває значення, яке менше від деякого числа x_i , тобто $F(x) = p(x < x_i)$.

Геометричний зміст функції розподілу полягає в тому, що при кожному значенні x функція $F(x)$ дорівнює ймовірності того, що випадкова величина x набуває на числовій осі значень, які містяться ліворуч від точки x .

У теорії ймовірностей стосовно до фізичних вимірювань розглядаються випадкові величини, можливі значення яких містяться в деякому інтервалі $[\alpha, \beta]$. На основі закону розподілу ймовірностей такої випадкової величини x визначається ймовірність попадання її значення в довільний інтервал $[x_1, x_2]$, який міститься всередині $[\alpha, \beta]$. Цю ймовірність позначатимемо $p(x_1 < x < x_2)$. Обмежимося тільки такими випадковими величинами x , для яких ймовірність попадання в інтервал $[x_i, x_i + \Delta x]$ малої довжини $\Delta x > 0$ можна вважати пропорційною довжині цього інтервалу:

$$p(x_i < x < x_i + \Delta x) \approx f(x) \cdot \Delta x.$$

Точний зміст цього співвідношення дається граничним співвідношенням

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x_i < x < x_i + \Delta x)}{\Delta x} = f(x),$$

де функція $f(x)$ називається густиною розподілу випадкової величини x , а добуток $f(x)dx$ – елементом ймовірності. Користуючись елементом ймовірності, шляхом інтегрування можна знайти ймовірність попадання значення x в довільний інтервал $[x_1, x_2]$:

$$p(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (5)$$

Густина розподілу має такі властивості:

1) $f(x) \geq 0$, як похідна неспадної функції $p(x)$, що пов'язано з невід'ємністю ймовірностей;

2) функція повинна бути нормована:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad (6)$$

яка відображає вірогідність події ($-\infty < x < \infty$). Якщо всі можливі значення випадкової величини x скупчені в скінченному інтервалі $[\alpha, \beta]$ (отже, поза цим інтервалом $f(x) \equiv 0$), то умова (6) набирає вигляду:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 1.$$

З (5) випливає, що ймовірність попадання випадкової величини x в інтервал $[x_1, x_2 = x_1 + \Delta x]$ геометрично можна подати площею криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції розподілу, ординатами

$f(x_1)$ і $f(x_2)$ (на осі ординат відкладається значення $f(x)$) та віссю абсцис.

Підкреслимо, що густина розподілу ймовірностей, знайдена вище, визначає закон розподілу неперервної величини x . Густина розподілу $f(x)$ називають ще диференціальною функцією розподілу.

Досвід обробки результатів вимірювань показує, що розподіл похибок описується різними законами. Проте досить часто для опису розподілу випадкових похибок використовується нормальний закон розподілу (закон Гауса)

$$f(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}\right), \quad \Delta x = x - x_0 \quad (7)$$

де σ^2 – дисперсія генеральної сукупності, а Δx – відхилення від істинного значення. Генеральною сукупністю називається множина всіх можливих значень вимірювань x_i або можливих значень похибок Δx_i .

Закон Гауса знаходить широке застосування в теорії похибок. Це зумовлене такими причинами:

- 1) для великої кількості вимірювань рівні за модулем, але протилежні за знаком, похибки зустрічаються однаково часто;
- 2) малі за модулем похибки зустрічаються частіше, ніж великі, тобто імовірність появи похибки тим менша, чим більше її абсолютне значення;
- 3) похибки вимірювань становлять неперервний ряд значень.

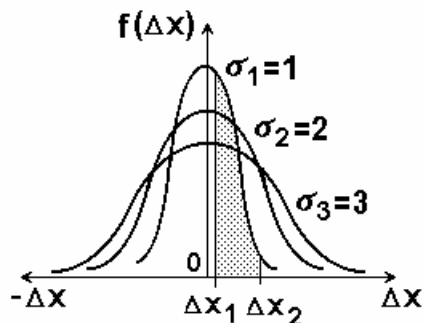


Рис. 1

На рис. 1 наведено форму кривої розподілу Гауса для трьох значень σ . Початок координат розміщено в точці з нульовою похибкою. Для нормального закону розподілу є характерним його симетрія (при великій кількості вимірювань появи випадкових похибок, які рівні за величиною, але різні за знаком - рівноімовірні) і монотонність зменшення густини ймовірності (поява великих

випадкових похибок - малоімовірна). Права і ліва вітки кривої Гауса асимптотично наближаються до осі абсцис.

Закон Гауса – одномодальний. Максимальне значення закону розподілу (густина імовірності) називається модою. Закон розподілу з одним максимальним значенням називається одномодальним, з двома-двомодальним і т.д. Мода нормального розподілу дорівнює $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$. Чим менше σ , тим вище, гостріше крива розподілу і навпаки. Із збільшенням σ зростає розкид відліків, тобто точність вимірювання зменшується. Величина σ – є основним параметром, який визначає вид кривої розподілу випадкових похибок.

Зміст функції Гауса такий. Площа фігури, обмеженої кривою Гауса, віссю Δx і лініями - $f(\Delta x_1)$ і $f(\Delta x_2)$ (заштрихована площа на рис.1), чисельно дорівнює імовірності, з якою довільний відлік попадає в інтервал $[\Delta x_1, \Delta x_2]$.

Безпосереднім інтегруванням (5) можна пересвідчитися, що вся площа під кривою Гауса дорівнює точно одиниці.

Для оцінки величини випадкової похибки є кілька способів. Найбільш поширеною є оцінка за допомогою середньої квадратичної (або стандартної) похибки S_n , згідно з означенням:

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n-1}}. \quad (8)$$

Генеральна сукупність (всі можливі значення вимірювальної величини при $n \rightarrow \infty$) характеризується математичним сподіванням або генеральним середнім – $M(x)$ і дисперсією – $D(x)$.

Центр розкиду значень x_i відповідає математичному сподіванню $M(x)$, яке являє собою істинне значення вимірюваної величини. Дисперсія - це міра відхилення випадкових величин від математичного сподівання: чим більше $D(x)$, тим менш точні вимірювання.

Для нормального розподілу випадкових величин

$$M(x) = X; \quad D(x) = \sigma^2.$$

Мірою розсіяння вимірюваних значень x_i відносно $M(x)$ є також середнє квадратичне (або стандартне) відхилення: $\sigma = +\sqrt{D(x)}$.

В лабораторній практиці вимірювань дістають обмежене число вимірюваних значень величини і тому обчислюють лише наближені значення $M(x)$ і $D(x)$; їх називають оцінками.

Оцінкою математичного сподівання є середнє арифметичне \bar{x} вимірюваних даних фізичної величини

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i \approx M(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} = M(x). \quad (9)$$

Оцінками дисперсії D та стандартного відхилення σ є

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \approx D(x); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^2 = D(x);$$

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \approx \sqrt{D(x)} = \sigma; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sigma.$$

Зауважимо, що результат вимірювання величин \bar{x} , обчислений за (9), є також випадковою величиною (про це ми переконаємося при виконанні лабораторної роботи №1).

Для оцінки точності результату вимірюного значення фізичної величини використовують такі характеристики: *надійний інтервал* та *граничну похибку середнього арифметичного*.

Надійний (або довірчий) інтервал - це інтервал, який містить істинне значення X вимірюної фізичної величини x із заданою імовірністю α , яка називається *надійною (або довірчою) імовірністю* (або коефіцієнтом надійності). При цьому справедливий вираз

$$p(\bar{x} - \Delta x \leq X \leq \bar{x} + \Delta x) = \alpha, \quad (10)$$

де Δx – гранична похибка \bar{x} , яка дорівнює половині надійного інтервалу (10) і оцінюється за формулою

$$\Delta x = t_{\alpha n} \cdot S_{\bar{x}}, \quad (11)$$

де $S_{\bar{x}}$ – оцінка стандартного відхилення \bar{x} від істинного значення X (*середня квадратична похибка середнього арифметичного*), яка обчислюється за формулою

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2};$$

$t_{\alpha n}$ – нормований коефіцієнт Стюдента (табл.1, Додаток); n – число ступенів вільності (для знаходження коефіцієнта Стюдента $t_{\alpha n}$ число ступенів вільності беруть таким, що дорівнює $n-1$ при обробці однієї групи вимірювань, розподілених за нормальним законом для невеликих вибірок з генеральної сукупності (вибірка – скінчене число значень величини x_i). Результати вимірювань записуються у вигляді

$$x = \bar{x} \pm \Delta x = \bar{x} \pm t_{\alpha n} \cdot S_{\bar{x}}.$$

Коефіцієнт Стюдента залежить від імовірності α та кількості вимірювань.

Якщо надійний інтервал збільшується, то зростає імовірність того, що істинне значення величини попаде в розглядуваний інтервал. Високий ступінь надійності необхідний при відповідальних вимірюваннях. Надійну імовірність α прийнято задавати такою, що дорівнює 0,90; 0,95; 0,98; 0,99 (значення 0,99 рекомендується брати для випадків, коли вимірювання не можна повторити; в особливо відповідальних випадках, коли результати вимірювання мають певне значення для здоров'я людей, допускається брати більш високу надійну імовірність).

Отже, для характеристики величини випадкової похибки потрібне знання двох чисел: значення самої похибки (або надійного інтервалу Δx) та значення надійної імовірності α .

Використання середньої квадратичної похибки як основного числового виразу випадкової похибки є зручним на тій підставі, що цій величині відповідає цілком певна надійна імовірність, яка дорівнює 0,68;

подвоєній середній квадратичній похибці (2σ) відповідає надійна імовірність – 0,95, потроєній – (3σ) – 0,999.

Розподіл Стюдента справедливий для малого числа вимірювань ($n \geq 2$), що і характерно як для техніки, так і для наукових досліджень. Із зростанням числа вимірювань розподіл Стюдента прагне до нормального розподілу (фактично при $n > 20$). Математичного виразу розподілу Стюдента ми не наводимо, зважаючи на його складність.

Характерним для розподілу Стюдента є його незалежність від параметрів \bar{x} (або Δx) та σ нормальної генеральної сукупності, а також можливість оцінки при невеликому числі вимірювань ($n < 20$) похибки $\Delta x = \bar{x} - x_i$ за заданою надійною імовірністю α або знаходженням надійності вимірювань за заданим значенням Δx .

Розподіл Стюдента дає також змогу встановити, що при досить великому n середнє арифметичне значення \bar{x} з імовірністю, близькою до вірогідності, дуже мало відрізняється від істинного значення x_0 .

Методика визначення та єдиний підхід до оцінки показників точності вимірювань для основних видів вимірювання знайшли своє відображення в ГОСТ 8000-72 (Державна система забезпечення єдності вимірювань. Основні положення) та в спеціальних метрологічних працях.

Статистична обробка результатів прямих вимірювань з багаторазовими спостереженнями виконується згідно схеми №1.

Схема №1 обробки результатів прямих вимірювань [3].

Необхідно враховувати як випадкові, так і систематичні похибки і починати із виключення відомих систематичних похибок і визначення невиключених систематичних похибок, зокрема інструментальних.

Для знаходження випадкової похибки треба виконати кілька спостережень в такій послідовності:

1. Вимірюють фізичну величину n разів і дані заносять в таблицю.
2. Відкидають промахи.

3. Знаходять середнє значення шуканої величини $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

4. Обчислюють похибки кожного із вимірів $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$.

5. Обчислюють квадрати похибок $(\Delta x_i)^2$.

6. Визначають середню квадратичну похибку середнього арифметичного

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}.$$

7. Задають значення коефіцієнта надійності (надійної імовірності) α (0,95 або 0,9).

8. Знаходять за таблицею №1 (Додаток) для вибраного n і заданого α коефіцієнт Стюдента $t_{\alpha n}$.

9.Визначають межі надійного інтервалу $\Delta x = t_{\alpha n} \cdot S_{\bar{x}}$.

10. Якщо величина Δx (межа надійного інтервалу) виявиться порівняною з величиною систематичної похибки (інструментальної похибки), то за межу надійного інтервалу слід взяти результуючу похибку

$$\Delta x = \sqrt{(t_{\alpha n} \cdot S_{\bar{x}})^2 + (t_{\alpha \infty} \frac{\delta}{3})^2},$$

де δ - величина похибки приладу, а $t_{\alpha \infty}$ – коефіцієнт Стюдента при $n=\infty$. Систематична похибка вимірювання може бути визначена за формулою

$$\Delta x = t_{\alpha \infty} \frac{\delta}{3}, \text{ або ж оцінюється як половина ціни поділки вимірного приладу.}$$

11.Обчислюють відносну похибку результату серії вимірювань $\epsilon = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%$.

12. Кінцевий результат записують у вигляді $x = \bar{x} \pm \Delta x$.

4. Похибки посередніх (непрямих) вимірювань [3].

а) Метод дисперсій.

Нехай вимірювана величина y є функцією кількох величин $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$, значення яких знаходять прямими вимірюваннями. Ці величини є аргументами. Отже можемо записати:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

Значення \bar{y} знаходять за середніми арифметичними значеннями аргументів:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n). \quad (12)$$

Зупинимося на найпростішому випадку, коли $\bar{y} = f(\bar{x})$.

Абсолютна похибка прямого вимірювання величини x дорівнює $\pm dx$ і нею зумовлена похибка функції $\pm dy$. Очевидно, що

$$\bar{y} \pm dy = f(\bar{x} \pm dx). \quad (13)$$

Розкладемо праву частину (13) в ряд Тейлора:

$$\bar{y} \pm dy = f(x) \pm \frac{df(x)}{dx} dx \pm \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} (dx)^2 + \dots$$

Обмежуючись членами, які містять першу степінь, одержимо

$$\bar{y} \pm dy = f(x) \pm \frac{df(x)}{dx} dx,$$

Тоді

$$dy = \pm \frac{df(x)}{dx} dx. \quad (14)$$

Оскільки вимірювана нами величина в загальному задається формулою (12), то при однаковому коефіцієнті надійності α для цих прямих вимірювань надійна межа похибки посереднього вимірювання знаходиться за формулою:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}, \quad (15)$$

де $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots$ - частинні похідні y по x_1, x_2, x_i, \dots ; $\Delta y, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ - надійні межі похибок вимірювання величин y, x_1, x_2, \dots .

Межа відносної похибки дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots)} \cdot 100\%. \quad (16)$$

Значення похідних обчислюють при $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots$.

Застосувавши ці формули для функцій певного виду, відповідно знайдемо похибки за формулами, приведеними в таблиці №3 [2].

б) Метод приведення.

У посередніх вимірюваннях можна значення функції обчислювати для кожного окремого спостереження

$$y_1 = f(x_1, x_2, \dots); y_2 = f(x_1, x_2, \dots); y_3 = f(x_1, x_2, \dots),$$

а надійну межу похибки посереднього вимірювання – в результаті обробки вибірки y_1, y_2, y_3, \dots як це робимо в прямих вимірюваннях, наприклад:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \quad \Delta y = t_{\alpha n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n(n-1)}} \quad \text{і т.д.} \quad (17)$$

Щоб знайти результат посереднього вимірювання, виконують математичні операції, і результати обчислень округлюють. Тому, очевидно, немає потреби виконувати обчислення з результатами прямих вимірювань як з точними числами, а робити їх, знайшовши необхідну кількість значущих цифр у результаті. Це значно полегшить обчислення і звільнить від зайвої роботи, але в таких обчисленнях неминучі похибки. Щоб можна було нехтувати похибкою заокруглення при обчисленнях, вона повинна бути хоча б у 10 раз менша за похибку посередніх вимірювань. Тому всі обчислення слід проводити з такою кількістю значущих цифр, які перевищують на одиницю кількість значущих цифр, знайдених при вимірюваннях (для наступного округлення результату). Похибка однозначного числа не менша від $(1/9) \cdot 100\% \approx 10\%$, двозначного – $(1/99) \cdot 100\% \approx 1\%$, трізначного – $(1/999) \cdot 100\% \approx 0,1\%$. Тому при обчисленнях потрібно додержувати таких правил:

а) якщо відносна похибка результату вимірювань становить 10-100%, обчислення можна виконувати з двома значущими цифрами;

б) якщо відносна похибка 1-10%, обчислення можна виконувати з трьома значущими цифрами (ще можна використовувати логарифмічну лінійку);
 в) якщо відносна похибка 0,1-1%, обчислення можна виконувати з чотирма значущими цифрами (наприклад, за допомогою чотиризначних таблиць) і т.д.

У обчисленнях доводиться користуватися наближеними значеннями чисел, наприклад π . Округлюючи число (тобто замінюючи його наближеним значенням) до різних розрядів, дістанемо різні значення і знаком похибки. Щоб нехтувати похибкою таких чисел під час обчислення результату вимірювань, треба брати їх з такою кількістю значущих цифр, щоб похибка округлення була на порядок менша за похибку результату вимірювання.

Так само слід підходити до табличних і експериментальних даних. Якщо табличні дані наводяться без похибок, вважається, що похибка даного значення є похибкою округлення і межа її дорівнює 0,5 одиниці розряду останньої цифри числа. Похибка округлення підлягає рівномірному розподілу. Тому, коли треба визначити надійну межу похибки даного значення з довірчою імовірністю α , використовують формулу:

$$\Delta x = P \cdot \ell \quad (P = \alpha \int f(x) dx), \quad (18)$$

в якій ℓ дорівнює 0,5 одиниці розряду останньої цифри числа.

Результати сукупних вимірювань і надійні інтервали їх похибок можна знайти методами обробки результатів посередніх вимірювань, згідно схеми №4 [3].

СХЕМА №4

1. Для кожної вибірки величин прямих вимірів, які входять в ролі аргументу в досліджувану функцію, проводиться обробка результатів за схемою №1 для прямих вимірювань при одному і тому ж значенні коефіцієнта надійності α .

2. Вираховують середнє значення шуканої величини

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n)$$

3. Оцінюють межі надійного інтервалу для результату непрямих вимірювань

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}, \quad (19)$$

де похідні $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ і т.д. вираховуються при середніх значеннях аргументів \bar{x}_1, \bar{x}_2 , і т.д.

4. Визначають відносну похибку ϵ :

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\bar{y}} 100\% = \frac{\Delta y}{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n)} \cdot 100\% .$$

5. Кінцевий результат записують у формі:

$$y = \bar{y} \pm \Delta y$$

5. Графічне представлення результатів спільних вимірювань

Результати спільних вимірювань часто зображують графічно. Перевага графічного зображення в тому, що воно дає наочне зображення досліджуваної залежності між фізичними величинами, дає змогу швидко визначити деякі значення (наприклад, максимальне значення функції).

Похибку в експериментальному значенні на графіку можна вказувати рисками інтервалів: \perp \dashv . Оскільки нанесення таких значків вимагає додаткових затрат часу і призводить до ускладнення графіків, їх треба наносити лише тоді, коли потрібні. Доцільність нанесення похибок на графіку можна продемонструвати на такому прикладі. Нехай потрібно провести криву через експериментальні точки, зображені на рис.2. З'єднати точки графіка ламаною лінією (а) не можна, бо це означало б, що при зміні однієї величини друга змінюється стрибками, що мало ймовірно. Як саме з'єднати точки, яку саме криву провести – пряму лінію чи плавну криву – визначають межі похибок вимірювань. Якщо вони такі як на графіку “б”, то через точки графіка треба провести плавну криву; якщо ж похибки такі, як на графіку “в”, то слід провести пряму лінію, бо вона є найпростішою функціональною залежністю. Експериментальні значення задовольняють і рівняння кривої графіка “б”, але при таких великих похибках через експериментальні точки можна провести багато різних кривих, що відповідатимуть великій кількості функціональних залежностей. Тому через експериментальні точки, що на рис.2в, найкраще провести пряму лінію.

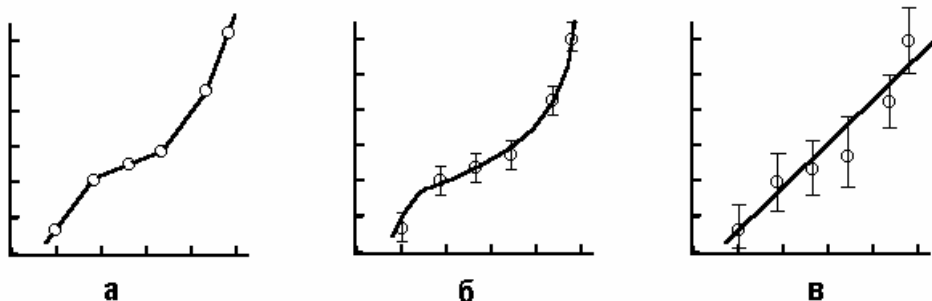


Рис 2

Графіки часто використовують для того, щоб перевірити, чи задовольняє досліджувана залежність ту або іншу функцію. При цьому лінію проводять між експериментальними точками так, щоб вони

розташовувались, по можливості, в однаковій кількості по обидві сторони лінії. Детально про графічну обробку експериментальних даних описано в методичному посібнику [2], стор.103-132, та [3].

6. Похибки заокруглення

Часто табличні значення математичних або фізичних постійних, а також розраховані результати непрямих вимірювань і їх похибок, у записі кінцевого результату необхідно представляти наближеним числом з певною кількістю значущих цифр. *Значущими цифрами* довільного числа називаються всі правильні і перша сумнівна цифри 1, 2, 3, ... 9, що входять у число, а також 0 (нуль, якщо він стоїть всередині або справа). *Тому при заокругленні результату вимірювання узвичай залишають тільки значущі цифри, тобто всі правильні і одну сумнівну цифри.*

Деяка k -та цифра наближеного числа правильна, якщо абсолютна похибка Δx не перевищує половини одиниці k -го розряду. Наприклад, якщо це розряд одиниць – то при $\Delta x \leq 0,5$; якщо це розряд десяткових – то при $\Delta x \leq 0,05$ і т.д., тобто цифра, наприклад, в розряді десяткових є *останньою* правильною цифрою, якщо похибка $\Delta x \leq 0,05$, а наступна цифра в розряді сотих є вже *першою* сумнівною. У протилежному випадку цифру k -го розряду називають першою сумнівною цифрою (тобто при $\Delta x > 0,5 \cdot 10^k$). Таким чином, величина похибки визначає місцеположення (розряд) правильних і сумнівних цифр у наближеному числі, яке отримане в результаті вимірювання, і при його заокругленні залишають всі правильні і тільки одну (першу) сумнівну цифри. У свою чергу це накладає обмеження на вибір кількості цифр при запису значення похибки Δx і яке визначається такими двома правилами. Число вимірювань $3 < n < 10$: при запису значення Δx необхідно зберегти *дві значущі цифри*, якщо перша 1 або 2, і достатньо записати *одну значущу цифру*, якщо перша 3 і більше (відносна похибка заокруглення до числа 3 становить $\approx 17\%$, тоді як така ж похибка оцінки самого СКВ S_n або $S_{\bar{x}}$ становить $\approx 24\%$ [3]). Число вимірювань $n > 10$: при запису значення Δx необхідно зберегти *дві значущі цифри*, якщо перша 1, 2 або 3 і достатньо записати *одну значущу цифру*, якщо перша 4 і більше.

Для задоволення цього способу запису кількості цифр у числі проводять його заокруглення. Нехай після заокруглення в числі повинно залишитись k значущих чисел, тоді користуються такими *правилами*:

- якщо $k+1$ цифра менше 5, то цифра k не змінюється;
- якщо $k+1$ цифра більше 5, то цифра k збільшується на 1;
- якщо $k+1$ цифра дорівнює 5, то можливі два випадки:
 - а) якщо серед цифр, що відкидаються, крім цифри 5 є відмінні від 0, то k -та цифра збільшується на 1,

б) але якщо ці цифри 0, то: k-ту цифру збільшують на 1, якщо вона непарна, і залишають без змін, якщо вона парна (цифра 0 вважається парною).

Якщо з наближеними числами ще будуть проводитись обчислення, то в них необхідно зберігати не більше двох сумнівних цифр.

Виконуючи математичні операції з наближеними числами, необхідно дотримуватися *правила*: після виконання математичних операцій в кінцевому результаті необхідно залишити стільки значущих цифр після коми, скільки їх було в числі з найменшою кількістю таких цифр.

Приклад. При вимірюванні деяких 3-х одноіменних фізичних величин було проведено по 15 дослідів (вимірювань) і зроблені такі записи усереднених результатів і їх похибок: $X_1=3,405$; $X_2=4,9784$; $X_3=1,33175$; $\Delta x_1=0,04159$; $\Delta x_2=0,00553$; $\Delta x_3=0,000359$. Написати правильно результати вимірювань, а також суми і добутки одержаних величин.

Розв'язок. Враховуючи кількість зроблених вимірювань (15), дані похибки необхідно заокруглити, залишивши доцільну кількість значущих цифр:

$\Delta x_1=0,04159$ – потрібно записати: $\Delta x_1=0,04$;

$\Delta x_2=0,00553$ – потрібно записати: $\Delta x_2=0,006$;

$\Delta x_3=0,000359$ – потрібно записати: $\Delta x_3=0,0036$.

Після цього середні величини X_i також необхідно заокруглити, залишивши правильні і одну сумнівну цифри:

$X_1=3,40$ – оскільки цифра 4 правильна ($\Delta x_1=0,04 < 0,05$), тому залишається ще одна сумнівна цифра 0 (яка не збільшується на 1, бо є парною);

$X_2=4,98$ – оскільки $\Delta x_2=0,06 > 0,05$, то цифра сотих в числі X_2 (7) вже є сумнівною, тому вона залишається, збільшуючись на 1, а інші відкидаються;

$X_3=1,3318$ – цифри 1,3,3,1 – правильні ($\Delta x_3=0,00036 < 0,0005$), 8 – сумнівна (7 непарна і при заокругленні збільшується на 1).

$$\sum X_i = 3,40 + 4,98 + 1,3318 = 9,7098 = 9,71;$$

$\prod X_i = 3,40 \cdot 4,98 \cdot 1,3318 = 22,54098136 = 22,54$ – результат математичної дії в даному прикладі заокруглюється до двох значущих цифр після коми (в числі X_1 дві цифри після коми).

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

I. МЕТА РОБОТИ: *ознайомлення з методом визначення функції розподілу густини імовірності випадкових величин, оцінка параметрів розподілу та вивчення впливу випадкових факторів на результат вимірювання в залежності від числа вимірювань.*

II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ: *генератор синусоїдальних коливань, частотомір-хронометр, секундомір.*

III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ, знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

- 1. Випадкові величини. Імовірність появи випадкової величини.*
- 2. Функції розподілу випадкових величин.*
- 3. Середнє арифметичне значення випадкових величин. Дисперсія.*
- 4. Похибки прямих вимірювань.*

IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Імовірність випадкової величини похибки полягає, наприклад, в появі величини “ A ” і може бути визначена так:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta N}{N} = P(A), \quad (1.1)$$

де N - число спостережень, ΔN - число сприятливих спостережень, тобто таких, при яких подія “ A ” відбулась. $P(A)$ - умовне позначення імовірності появи події, яка записана в дужках. $\frac{\Delta N}{N}$ - відносна частота появи події.

З (1.1) випливає, що

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (1.2)$$

Подія вважається практично достовірною, якщо $P(A)$ мало відрізняється від одиниці і практично неможливою, якщо $P(A)$ близьке до нуля. Поява одного будь-якого значення із n - можливих - імовірна подія, тобто:

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1. \quad (1.3)$$

Дискретна випадкова величина може бути описана з допомогою таблиці, яка містить всі можливі значення та їх імовірності.

Випадкова величина неперервна, якщо її можливі значення неперервно займають певний інтервал, тобто мають нескінченну множину значень. Неперервна випадкова величина, певні значення якої будемо

позначати X , а можливі значення через x , описується за допомогою функції, яка дозволяє визначити імовірність того, що величина X буде знаходитися в інтервалі від x до $x + dx$, тобто $P(x \leq X \leq x + dx)$. Ця імовірність пропорційна ширині інтервалу dx , а коефіцієнт пропорційності в загальному випадку залежить від x , тобто

$$P(x \leq X \leq x + dx) = f(x)dx. \quad (1.4)$$

$$f(x) = \frac{P(x \leq X \leq x + dx)}{dx}. \quad (1.5)$$

Функція $f(x)$ називається функцією розподілу густини імовірності.

Очевидно, $f(x)$ повинна задовольняти умові

$$P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \quad (1.6)$$

причому (1.6) має такий зміст, що і (1.3).

Вигляд функції $f(x)$ залежить від характеру випадкової величини, і є законом, який повністю описує неперервну випадкову величину. Аналітичний вигляд функції (1.5) залежить від одного або декількох параметрів, які є числовими характеристиками випадкових величин.

Основними характеристиками випадкових величин є:

1) μ – математичне очікування (яке на практиці оцінюється середнім арифметичним значенням випадкової величини), навколо якого групуються всі можливі її значення;

2) σ^2 – дисперсія, дорівнює середньому значенню квадрата різниці між окремим значенням випадкової величини та її математичним очікуванням μ .

Дисперсія дає представлення про те, як в середньому, розміщені (розсіяні) окремі значення по відношенню до середнього. Корінь квадратний із дисперсії, тобто $\sqrt{\sigma^2}$, називається середнім квадратичним відхиленням або середньою квадратичною похибкою. Величини μ і σ^2 вираховуються за формулами:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx; \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx.$$

Із різних функцій розподілу особливо важливе значення має “нормальний” розподіл (розподіл Гауса), для якого

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (1.7)$$

Графік цієї функції наведено на рис.1.1.

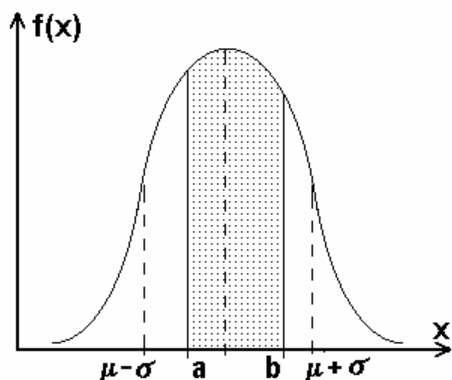


Рис. 1.1

Площа заштрихована на графіку густини імовірності $f(x)$ чисельно рівна імовірності того, що випадкова величина X знаходиться в інтервалі (a, b) . Загальна площа під кривою згідно (1.3) і (1.6) рівна одиниці.

Результат будь-якого виміру завжди є випадкова величина X , яка описується якоюсь функцією розподілу. Якби функція розподілу була відома, то значення вимірюваної величини було б

рівним μ , а дисперсія σ^2 служила б мірою відтворення вимірюваного значення даним методом вимірювання.

У реальних умовах функція розподілу, як правило, невідома. Спеціально поставлені досліди та практика великої кількості вимірювань показали, що при відсутності промахів результати прямих вимірювань описуються нормальним розподілом. Проте параметри функції розподілу залишаються невідомими і повинні визначатись із досліду. Практично число вимірів обмежене, тому, вираховуються не μ і σ^2 , а їх наближені значення за формулами

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \quad (1.8)$$

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}, \quad (1.9)$$

де n – число вимірів, x_i – результати вимірів, $i = 1, 2, \dots, n$.

Досліди і теорія показують, що при малих n в знаменнику формули (1.9) повинно бути саме $n-1$, а не n , так як в останньому випадку S_n^2 буде заниженим.

Вирахувані за (1.8) та (1.9) значення співпадають з μ і σ^2 лише при $n \rightarrow \infty$ і служать лише оцінками останніх. Оскільки \bar{x} і S_n^2 обчислюються не на основі всієї множини можливих значень випадкової величини, а лише по окремих значеннях цієї множини, які випадковим чином вибрані із неї, то їх прийнято називати “вибіркове середнє” і “вибіркова дисперсія”. Вибіркове середнє \bar{x} , як оцінка вимірюваної величини, теж є випадкова величина з середнім квадратичним відхиленням

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (1.10)$$

Питання про те, наскільки \bar{x} відрізняється від істинного значення вимірюваної величини μ , зводиться до обчислення величини α :

$$\alpha = P(\bar{x} - tS_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + tS_{\bar{x}}) = \int_{\bar{x} - t \cdot S_{\bar{x}}}^{\bar{x} + t \cdot S_{\bar{x}}} f(x) dx = \Phi(t),$$

тобто до обчислення імовірності того, що дійсне значення $X = \mu$ лежить в інтервалі $(\bar{x} - tS_{\bar{x}}, \bar{x} + tS_{\bar{x}})$. Цю імовірність позначають символом α і називають коефіцієнтом надійності, або просто надійністю.

Для найбільш поширених функцій розподілу складені таблиці: для нормального розподілу значення функції $\Phi(t)$ при різних t ; для розподілу Стюдента, який використовується при малому числі вимірів $t_{\alpha n} = \Phi(\alpha, n - 1)$. (Додаток, таблиця №1).

V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Для визначення нормального розподілу використовується генератор синусоїдальних коливань електричного струму звукових частот. До генератора під'єднується частотомір-хронометр, який дозволяє відрахувати число імпульсів, що поступають на його вхід.

На передній панелі частотомера є кнопки з написами “СБРОС”, “ПУСК”, “СТОП”. Вмикається частотомір в такому порядку.

1. Після ввімкнення приладу в електричну мережу (вмикається лаборантом) необхідно, не змінюючи положень ручок і кнопок перемикачів, які є на передній панелі приладу, натиснути кнопку “СБРОС”, при цьому покази індикаторів встановлюються на нуль. Прилад готовий до роботи.

2. Якщо натиснути кнопку “ПУСК”, прилад буде відраховувати кількість імпульсів, які поступають на його вхід від генератора. Зупиняється прилад шляхом натискування на кнопку “СТОП”. При цьому на цифровому табло висвічується число підрахованих імпульсів. Натискуванням на кнопку “СБРОС” з цифрового табло “стирається” результат виміру і покази індикаторів встановлюються на нуль, після цього прилад готовий до наступного підрахунку.

VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Ввімкнути генератор і частотомір за 20 хвилин до початку роботи (вмикається лаборантом).

2. За допомогою частотомера і секундоміра зробити $n=50$ відліків числа імпульсів η , які поступили на вхід приладу за 10 секунд (частота генератора в діапазоні 25-100 Гц встановлюється керівником заняття). Результати вимірювань занести в таблицю 1.1.

3. Вираховують з точністю до 0.1 для кожного відліку V_i - число імпульсів за 1 с, а також середнє значення \bar{V} , дисперсію S_n^2 та середню квадратичну похибку середнього арифметичного $S_{\bar{V}}$ за формулами (1.8),

(1.9), (1.10) і межі надійного інтервалу Δv для коефіцієнта надійності $\alpha=0.95$, користуючись таблицею 1 (Додаток). Обчислення повторити за програмою №1 (Додаток).

4. Для визначення вигляду розподілу розбивають весь діапазон із значень v на інтервали Δv_0 (в даній роботі $\Delta v_0=0,5 \text{ c}^{-1}$) і підраховують, яка кількість Δn значень попадає в кожен інтервал. Обчислюють відносну частоту, яка приходить на одиничний інтервал. Для цього складають таблицю 1.2.

5. Побудувати на міліметровому папері діаграму розподілу p_i в залежності від v , відклавши по осі абсцис значення (початки інтервалів), а по осі ординат h (див. табл.1.2). Діаграма буде представляти собою систему прямокутників, висоти яких h_i , а основа - Δv_0 .

6. На тому ж графіку в тому ж самому масштабі побудувати криву густини імовірності за формулою (1.7), замінивши μ та σ^2 їх наближеними значеннями \bar{v} та S_n^2 . Для обчислень використовують програмовані калькулятори.

7. Вирахувати середні значення, середні квадратичні похибки і межі надійних (довірчих) інтервалів Δv для $\alpha=0,95$ кожних п'яти значень. Скористатися програмованими калькуляторами.

8. Нанести на графік для порівняння всі середні значення і надійні інтервали для п'яти значень, зберігаючи масштаб, який був вибраний при побудові гістограми.

9. Оформлені результати повинні бути представлені у вигляді, даному на рис.1.2.

10. Зробити висновки.

Таблиця 1.1.

№ п/п	η_i	$v_i,$ c^{-1}	$\Delta v_i,$ c^{-1}	$(\Delta v_i)^2$	№ п/п	η_i	$v_i,$ c^{-1}	$\Delta v_i,$ c^{-1}	$(\Delta v_i)^2$	$\bar{v},$ c^{-1}	S_n^2	$S_{\bar{v}}$	Δv	α	t_α
1					26										
2					27										
3					28										
4					29										
5					30										
:					:										
:					:										
22					47										
23					48										
24					49										
25					50										

Взірець таблиці 1.2.

Частота від- до, Гц	Кількість значень в інтервалі (риски)	Δn_i	$p_i = \frac{\Delta n_i}{n}$	$h = \frac{\Delta n_i}{n * \Delta v_0}$
47-47,5	///	3	$p_1 = \frac{3}{50}$	$h_1 = \frac{3}{50 * 0.5}$
47,51-48	////	5	$p_2 = \frac{5}{50}$	$h_2 = \frac{5}{50 * 0.5}$
48,01-48,5	///////	6	$p_3 = \frac{6}{50}$	$h_3 = \frac{6}{50 * 0.5}$

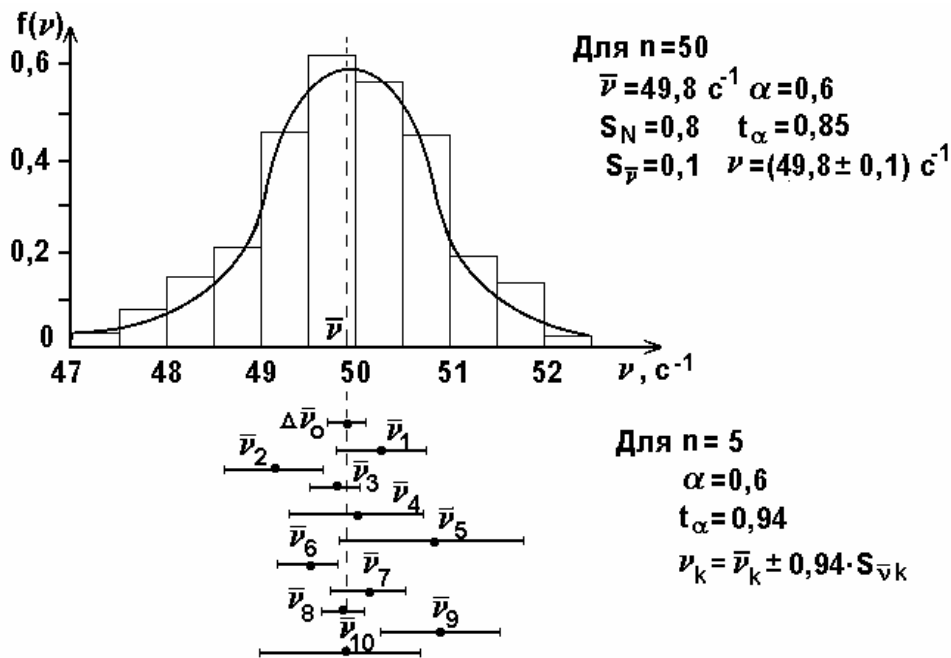


Рис. 1.2

Примітка: На основі результатів нижньої частини рис.1.2 викладач акцентує увагу студентів, що для окремих вибірок одержані значення вимірюваних величин з відповідними довірчими інтервалами можуть не перекриватись. А це означає, що середнє значення вимірюваної величини окремої вибірки є також випадкова величина, яка може значно відрізнятись від середнього значення для великої вибірки.

VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке імовірність появи випадкової величини? Чим вона відрізняється від відносної частоти появи події ?
2. Записати формулу, дати визначення і розкрити зміст функції розподілу густини імовірності випадкової величини.
3. Чим функція розподілу густини імовірності $f(x)$ відрізняється від інтегральної функції розподілу імовірності $F(x)$?
4. Дати означення дискретної і неперервної випадкової фізичної величини.
5. Записати умови нормування імовірності для дискретної і для неперервної фізичної величини.
6. Що є чисельними характеристиками функції Гауса ?
7. Який зміст має площа під кривою Гауса, обмежена значеннями аргументу x_1 і x_2 ?
8. Що таке генеральна сукупність випадкових величин ?; вибірка ?
9. Що є оцінкою дисперсії випадкових величин джля вибірки ?
10. Що називають коефіцієнтом надійності (надійною імовірністю або просто “надійністю”) ? Що таке надійний інтервал ?
11. Що розуміють, коли говорять, що фізична величина визначена з надійністю α ?

ВИМІРЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ РОЗМІРІВ І ВИЗНАЧЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТВЕРДИХ ТІЛ

I. МЕТА РОБОТИ: навчити студентів користуватися штангенциркулем і мікрометром.

II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ: штангенциркуль, мікрометр, тіла правильної геометричної форми (циліндри або паралелепіпеди).

III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ, знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

1. Лінійні та кутові ноніуси, їх точність.
2. Похибка, яка виникає при вимірюванні за допомогою ноніуса.
3. Систематична похибка. Об'єднання систематичної та випадкової похибок.
4. Непрямі вимірювання. Обчислення похибки при непрямих вимірюваннях.

IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

При вимірюванні лінійних розмірів тіл використовують міліметрові лінійки (ціна найменшої поділки яких складає 1 мм). Точність, з якою можна виміряти лінійні розміри тіл з допомогою такої лінійки, буде становити половину ціни поділки. Для підвищення точності вимірювання лінійних розмірів тіл використовують ноніуси.

Ноніусом називається допоміжна шкала, яка доповнює звичайну міліметрову лінійку і дозволяє підвищити точність вимірювань в 10-20 разів. Ноніуси бувають лінійними або кутовими. Використовуються вони в штангенциркулях, мікрометрах, теодолітах і т.д.

Лінійний ноніус - це коротка лінійка, яка переміщується плавно вздовж основної шкали. Ноніуси виготовляють таким чином, щоб при ціні поділки верхньої основної шкали l_m , а нижньої l_n існувало таке ціле число k , при якому

$$kl_m = (k \pm 1)l_n, \quad (2.1) \quad \text{або} \quad (2k - 1)l_m = kl_n. \quad (2.1')$$

Ноніуси, для яких в формулі буде знак “плюс”, характеризуються тим, що $l_m > l_n$ (тобто довжина поділки верхньої шкали більша поділки нижньої шкали). Для $l_m < l_n$ знак в формулі (2.1) буде “мінус”.

Нехай маємо справу з ноніусом, для якого $l_m > l_n$. Величину, яка визначається за формулою

$$\delta = l_m - l_n = \frac{l_m}{k+1} = \frac{l_n}{k}, \quad (2.2)$$

називають ціною поділки ноніуса, причому $k+1 = N$ відповідає кількості поділок на нижній шкалі (шкалі ноніуса).

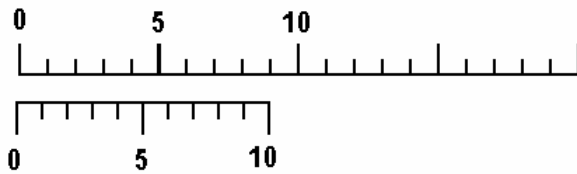


Рис. 2.1

Якщо нульові поділки верхньої та нижньої шкал співпадають, то співпадають, крім того, k -ва поділка верхньої шкали з поділкою нижньої шкали, що видно з рис.2.1.

V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Штангенциркуль (рис.2.2) складається з розділеної на міліметри масштабної лінійки **М**, вздовж якої може переміщуватися перпендикулярно до неї ніжка **FB** з гвинтом **С**, який служить для її закріплення; у ніжці **FB** зроблено виріз, на скошеному краї якого, що прилягає до масштабу, нанесено ноніус. Нерухома ніжка **LA**, що також перпендикулярна до масштабної лінійки, служить стопором для вимірюваного тіла. Якщо ніжки притиснуті тісно одна до одної, то нуль ноніуса співпадає з нулем масштабної лінійки.

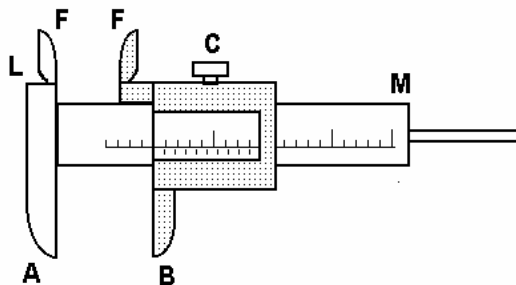


Рис. 2.2

Вимірювання лінійних розмірів виконують в такий спосіб. Розвівши достатньо ніжки штангенциркуля, розміщують між ними вимірюване тіло, ніжку **FB** підводять так, щоб тіло було злегка затиснуте, і після цього роблять відлік. Відраховують на масштабі ціле число міліметрів m до нуля ноніуса і дивляться, яка поділка ноніуса співпадає з якоюсь

поділкою масштабу. Довжина відрізків, виміряна за допомогою штангенциркуля, рівна числу цілих поділок масштабу m плюс ціна поділки ноніуса, помножена на номер його поділки n , яка співпадає з певною поділкою масштабу:

$$L = ml_m + n\delta. \quad (2.3)$$

Для вимірювання внутрішнього діаметра трубок використовуються частини **FF** ніжок штангенциркуля, які вставляються в трубку і розводяться так, щоб щільно приставали до внутрішніх стінок трубки. Відлік вимірюваної величини проводиться точно так, як і в попередньому випадку.

Для точного вимірювання діаметра дротинок, товщин пластинок і т.д. використовується мікрометр (рис.2.3). Він має вигляд тисків, в яких вимірювана деталь затискується за допомогою гвинта. Крок гвинта, як правило, вибирається рівним 1 або 0.5 мм. На стержні гвинта **A** закріплений барабан **C** з шкалою, яка має 50 поділок. Коли стержень **A** притиснутий до підп'ятника **F**, нуль барабана встановлюється напроти нуля лінійної шкали **D**. Вимірювана деталь розміщується між гвинтом **A** і протилежним йому підп'ятником **F**. Обертаючи гвинт за головку **B**, доводять його до дотику з деталлю. По лінійній шкалі відраховують міліметри, а по шкалі барабана його соті долі. Ціна поділки лінійної шкали 0,5 мм, тобто повний оберт барабана зміщує стержень **A** на 0,5 мм. Для зручності відліку штрихи півміліметрових поділок нанесені нижче осьової розмітки лінійної шкали. Ціна поділки на барабані 0,01 мм.

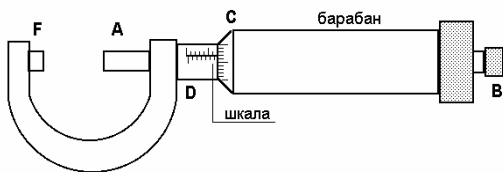


Рис. 2.3

Головним джерелом похибок при вимірюванні штангенциркулем і мікрометром є нерівномірний натиск ніжок або гвинта на вимірювану деталь. Це у першу чергу відноситься до мікрометра. По-перше, гвинт з малим кроком перетворює незначні

зусилля руки, що обертає барабан мікрометра, у великі сили, що діють на предмет; по-друге, точність мікрометра, як правило, на порядок вища за точність штангенциркуля і навіть невеликі деформації вимірюваного предмета стають помітними. Щоб зменшити похибки, пов'язані з деформаціями вимірюваних предметів, барабан мікрометра має спеціальну головку **B**, яка дозволяє створювати невеликі, постійні в різних дослідах зусилля на вимірювану деталь, що фіксується за допомогою тріскачки. Після того, як почувся слабкий тріск, обертання головки **B** припинити.

УВАГА. Барабан мікрометра при вимірюваннях обертати лише за головку **B** (рис.2.3).

VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Ознайомитися з будовою штангенциркуля та мікрометра. Визначити ціну поділки ноніуса штангенциркуля та ціну поділки ноніуса мікрометра.

2. Навчитись вимірювати штангенциркулем та мікрометром, для чого провести декілька попередніх вимірювань якого-небудь тіла.

3. Виміряти лінійні розміри тіла, визначеного керівником заняття (висоту h і діаметр d циліндра; довжину a , ширину b і висоту c паралелепіпеда). Вимірювання кожного параметру провести на 10 різних ділянках тіла.

VII. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ

1. Результати кожного виміру всіх лінійних розмірів записують в таблицю і обробляють згідно схеми №1:

а) обчислюють середнє значення із 10 вимірювань кожної величини

(для h і d або a, b, c):
$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i;$$

б) знаходять похибки окремих вимірювань $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$;

в) визначають квадрати похибок окремих вимірювань Δx_i^2 ;

г) якщо один або кілька вимірів значно відрізняються по своєму значенню від решти, то слід перевірити, чи вони не належать до промахів;

д) визначають середню квадратичну похибку середньоарифметичного серії вимірювань ($n=10$):

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (\Delta x_i)^2}{9 \cdot 10}};$$

е) задають значення коефіцієнта надійності $\alpha=0,95$;

є) знаходять коефіцієнт Стьюдента $t_{\alpha n}$ для заданої надійності і числа зроблених вимірів (додаток, табл.1);

ж) знаходять похибку результату вимірювань (межі надійного інтервалу)

$$\Delta x = 2,26 \cdot S_{\bar{x}};$$

з) якщо величина похибки результату вимірювань Δx приблизно співпадає з величиною похибки приладу δ , то за межу надійного інтервалу приймають величину

$$\Delta x = \sqrt{(2,26)^2 (S_{\bar{x}})^2 + (t_{\alpha \infty} / 3)^2 \delta^2},$$

для $\alpha=0,95$ $t_{\alpha \infty} = 1,96$;

к) обчислюють відносну похибку результату серії вимірювань

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

2. За знайденими середніми значеннями лінійних розмірів обчислюють середнє значення об'єму тіла за формулою

$$\bar{V} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}, \quad (\bar{V} = [\pi \bar{d}^2 / 4] \cdot \bar{h}).$$

3. Знаходять значення абсолютної та відносної похибок об'єму

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial c} \Delta c\right)^2} ; \left(\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial d} \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h} \Delta h\right)^2}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta V}{\bar{V}} \text{ (або } \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{\bar{c}}\right)^2} ; \varepsilon = \sqrt{4\left(\frac{\Delta d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\bar{h}}\right)^2} \text{)}$$

Звідси:

$$\Delta V = \varepsilon \bar{V} .$$

4. Кінцевий результат записують у вигляді $V = \bar{V} \pm \Delta V$.

5. Роблять короткі висновки.

VIII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке ноніуси, які є види ноніусів ?
2. Як визначити точність ноніуса ?
3. Дати означення випадковим та систематичним похибкам.
4. Що є оцінкою істинного значенні випадкової величини?
5. Що називають абсолютною, відносною, середнє арифметичною похибкою?
6. У чому відмінність між середньою квадратичною абсолютною похибкою та середньою квадратичною похибкою середнього арифметичного (записати формули і пояснити) ?
7. Дати означення прямих вимірювань і непрямих вимірювань.
8. Записати у загальному вигляді формули для обчислення похибок при непрямих вимірюваннях.
9. Як зменшити похибку, пов'язану з деформацією предмету, при вимірюваннях мікрометром ?

ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ ПРЯМОЛІНІЙНОГО РУХУ НА МАШИНІ АТВУДА

I. МЕТА РОБОТИ: експериментальна перевірка законів рівномірного, рівноприскореного рухів, визначення прискорення вільного падіння та перевірка 2-го закону Ньютона.

II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ ТА МАТЕРІАЛИ: прилад Атвуда РМ-02, тягарці різної маси, секундомір.

III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ, знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

1. Матеріальна точка як макроскопічний об'єкт. Елементарне переміщення.
2. Рівняння руху матеріальної точки. Записати і пояснити на прикладі прямолінійного руху матеріальної точки.
3. Швидкість і прискорення при криволінійному русі. Напрямок вектора швидкості. Годограф швидкостей.
4. Принцип відносності Галілея. Різні формулювання і доведення їх еквівалентності.
5. Інерціальні системи відліку. Система відліку Коперніка. Земля як інерціальна система відліку.
6. Що ми називаємо силою? Дати визначення та пояснити принцип незалежної дії сил.
7. Фізичний зміст другого закону Ньютона. Рівняння руху.

IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Механіка вивчає рух матеріальних тіл, тобто визначення положення тіл в просторі в будь-який момент часу, та причини, які приводять до цього положення тіл. *Поступальний рух* твердих тіл повністю описується рухом однієї матеріальної точки, якою може бути центр мас. Положення центра мас описується радіусом-вектором [4]:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad (3.1)$$

де m – маса всієї системи.

Зміна положення центра мас з часом при поступальному русі описується рівнянням руху:

$$\vec{r}_c(t) = \vec{r}_c(0) + \vec{v} \cdot t \quad (3.2)$$

Прямолінійний поступальний рух може бути рівномірним, коли швидкість стала, і прискореним. Для прямолінійного прискореного руху швидкість змінюється за формулою

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad (3.3)$$

де миттєве прискорення

$$\vec{a}_m = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (3.4)$$

При рівноприскореному прямолінійному русі

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}. \quad (3.5)$$

Шлях, пройдений тілом в цьому випадку

$$s = v_0t + \frac{at^2}{2}. \quad (3.6)$$

Динаміка матеріальної точки описується трьома законами Ньютона. Основні закони кінематики та динаміки поступального руху дослідним шляхом можна перевірити на машині Атвуда.

V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

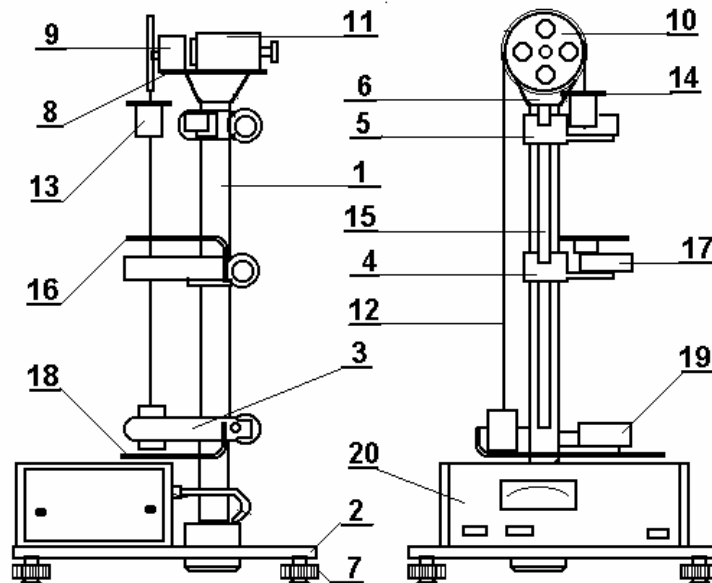


Рис. 3.1.

Загальний вигляд машини Атвуда показаний на рис.3.1. На вертикальній колонці (1), закріпленій на основі (2), розміщені три кронштейни: нерухомий нижній кронштейн (3) і два рухомих - середній (4) і верхній (5), а також верхня втулка (6). Основа встановлена на ніжках (7), регулюючи які проводять вирівнювання положення приладу. На верхній втулці за допомогою верхнього диска (8) закріплені вузол підшипника ролика (9), шків (10) і електромагніт (11). Через шків проходить нитка (12) з прив'язаними на її кінцях тягарцями (13) та (14). Електромагніт після

підведення до нього напруги живлення, при допомозі фрикційної муфти, утримує систему шківів з тягарцями в стані спокою.

Верхній і середній кронштейни можна переміщувати вздовж колонки і фіксувати в будь-якому положенні, встановлюючи таким чином довжину шляху рівноприскореного і рівномірного руху. Для вимірювання величини шляху на колонці є міліметрова шкала (15), всі кронштейни мають показники положення, а верхній кронштейн додаткову риску, яка дає точне узгодження нижньої межі верхнього великого тягарця з визначеним початком шляху.

На середньому кронштейні закріплений кронштейн з кільцем (16) і фотоелектричний датчик №1 (17). Цей кронштейн знімає з падаючого вниз великого тягарця додатковий тягарець (13), а фотоелектричний датчик в цей час створює електричний імпульс, який сигналізує початок рівномірного руху великих тягарців. Оптична вісь фотоелектричного датчика (риска на його корпусі) знаходиться на рівні покажчика положення середнього кронштейна. Нижній кронштейн обладнаний двома кронштейнами (18) з гумовими амортизаторами, на які опускаються тягарці з фотоелектричним датчиком №2 (19) з оптичною віссю на рівні покажчика положення кронштейна, після перетину якої нижньою гранню падаючого тягарця, створюється електричний сигнал що сигналізує проходження тягарцями вибраного значення. На основі приладу знаходиться жорстко з ним зв'язаний мілісекундомір РМ-15 (20), до гнізд якого підведені відповідні фотоелектричні датчики №1 і №2.

Принцип роботи приладу розглянемо, виходячи з рис. 3.1. Через шків, який змонтований на підшипнику для зменшення сил тертя, проходить нитка з двома однаковими тягарцями масою M . Система в цьому випадку знаходиться в рівновазі.

Якщо на одну сторону блока додамо невеликий тягарець масою m , то система одержить прискорення, з яким вона буде рухатися на шляху s . На кільці 16 додатковий тягарець буде знятий, і тягарці пройдуть шлях S рівномірно.

Конструкція приладу дозволяє перевірити закон швидкості

$$v = a \cdot t \quad (3.7)$$

для рівноприскореного руху без початкової швидкості. Для цього треба переконатися, що

$$\frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2} = a, \quad (3.8)$$

а це можливо зробити, якщо знайти метод визначення кінцевих швидкостей v_1 і v_2 рівноприскореного руху за час t_1 і t_2 .

Поділивши шлях S , пройдений тягарцем при рівномірному русі, на час цього руху t та вимірявши шлях рівноприскореного руху s , який тягарець проходить за час t_1 , можемо записати

$$a = \frac{v}{t_1}, \quad (3.9)$$

де $v = \frac{S}{t}$ швидкість на ділянці S рівномірного руху, яка дорівнює кінцевій швидкості рівноприскореного руху. Враховуючи, що у випадку рівноприскореного руху $v^2 = 2as$, одержимо кінцеву робочу формулу у вигляді

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{S^2}{2st^2}. \quad (3.10)$$

Змінюючи S , ми, тим самим, змінюємо t . Закон швидкості виконується, якщо з урахуванням похибки виконується рівність:

$$a = \frac{S_1^2}{2st_1^2} = \frac{S_2^2}{2st_2^2}. \quad (3.11)$$

Використовуючи прилад, можна також перевірити другий закон Ньютона: $F = ma$. При цьому необхідно, щоб забезпечувалась постійність всієї рухомої маси

$$m = m_1 + m_2 + 2M \quad (3.12)$$

де m_1, m_2 – додаткові тягарці, M – маса кожного з двох великих підвішених тягарців. Зміна величини діючої сили досягається перекладанням додаткових тягарців m_1 та m_2 з одного великого тягарця на інший. Сила, яка приводить систему в рух, дорівнює різниці ваг правого та лівого тягарців.

У випадку, коли обидва додаткові тягарці знаходяться на правому великому тягарці, сила, яка приводить у рух систему, дорівнює

$$F_1 = (m_1 + m_2) g. \quad (3.13)$$

Переклавши менший додатковий тягарець m_2 на лівий великий тягарець, знайдемо, що тоді

$$F_2 = (m_1 - m_2) g. \quad (3.14)$$

За другим законом Ньютона

$$\begin{aligned} F_1 &= (2M + m_1 + m_2) \cdot a_1 = (m_1 + m_2) g \\ F_2 &= (2M + m_1 + m_2) \cdot a_2 = (m_1 - m_2) g \end{aligned} \quad (3.15)$$

Отже

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{(m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)}. \quad (3.16)$$

Оскільки $a = \frac{2s}{t^2}$, то при $s_1 = s_2 = s$ одержують:

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} = \frac{t_2^2}{t_1^2} \quad (3.17)$$

Ця формула є другою робочою формулою для перевірки другого закону Ньютона.

Якщо масою блока і силами тертя в ньому знехтувати, а нитку вважати невагомою і нерозтяжною, то на основі другого закону Ньютона можна записати рівняння руху:

$$\begin{cases} (M + m)a = (M + m)g - F_{\text{н}} \\ Ma = F_{\text{н}} - Mg \end{cases}, \quad (3.18)$$

де a – прискорення, з яким рухаються тягарці, g – прискорення сили тяжіння, $F_{\text{н}}$ – сила натягу нитки, m – маса одного із додаткових тягарців m_1 або m_2 .

Розв'язуючи рівняння (3.18), одержимо формулу для a :

$$a = g \frac{m}{2M + m}. \quad (3.19)$$

Звідси

$$g = \frac{2M + m}{m} \cdot \frac{S^2}{2st^2}, \quad (3.20)$$

де S – шлях рівномірного руху, s – шлях рівноприскореного руху, t – час, протягом якого тягарці пройдуть шлях S . У рівнянні (3.20) використано співвідношення (3.10). Формула (3.20) є третьою робочою формулою.

VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

ПЕРЕД ВИКОНАННЯМ РОБОТИ ПЕРЕВІРИТИ ЗАЗЕМЛЕННЯ ПРИЛАДУ. Покласти на ролик нитку з великими тягарцями і перевірити, чи знаходиться система в стані рівноваги. За допомогою регулюючих ніжок основи привести в разі необхідності колонку до вертикального положення. Пересунути середній кронштейн на вибрану висоту над нижнім кронштейном і встановити їх так, щоб великий правий тягарець, падаючи проходив через середину робочого віконця фотоелектричних датчиків (завдяки чому буде визначений шлях S). Пересунути верхній кронштейн на задану висоту над середнім кронштейном і встановити його в одній площині з іншими кронштейнами (таким чином буде визначений шлях s). Натиснути кнопку “СЕТЬ” і пересвідчитися, що всі індикатори вимірювачів показують нуль, лампочки обох фотоелектричних датчиків

світяться. Перемістити правий тягарець в верхнє положення, покласти на нього додатковий тягарець і перевірити, чи знаходиться система в стані спокою. Натиснути кнопку “ПУСК” і перевірити: чи рухається система, чи кронштейн (16) затримав додатковий тягарець, чи виміряв мілісекундомір час проходження шляху S правим тягарцем і чи була система загальмованою. Натиснути кнопку “СБРОС” і перевірити, чи зняте електромагнітом блокування ролика. Після цього можна приступати до вимірювань.

Завдання 1. Вимірювання прискорення сили земного тяжіння та перевірка закону швидкості.

1. На правий великий тягарець (його маса M) покласти один із додаткових тягарців (маса m_1 або m_2). Нижню грань правого тягарця встановити на рівні риски, нанесеної на верхньому кронштейні. За допомогою шкали на колонці виміряти значення встановлених шляхів рівноприскореного s та рівномірного S рухів тягарця.

2. Натиснути кнопку “ПУСК” . Прочитати виміряне значення часу t_1 руху великого тягарця на шляху S_1 . Виміри повторити не менше 5 разів. Провести 5 таких вимірів для значення шляху S_2 , яке встановлюється переміщенням кронштейна в інше положення.

3. За цими даними перевіряють виконання формули (3.11).

4. Зняти тягарці разом з ниткою, що їх з'єднує і зважити на шалькових терезах для визначення їх маси ($2M$). Зважування достатньо провести один раз. Маса m малих тягарців вказана на них.

5. За формулою (3.20) визначити прискорення сили земного тяжіння g .

6. Результати вимірів занести в раціонально вибрану таблицю. Обробити результати прямих вимірювань за схемою №1, непрямих - за схемою №4.

Завдання 2. Перевірка другого закону Ньютона.

1. Встановлюють певне значення шляху s і вимірюють його значення за допомогою шкали на колонці.

2. Обидва додаткові тягарці масами m_1 та m_2 встановлюють на правому великому тягарці. Натискають клавішу “ПУСК” і визначають час падіння t_1 . Виміри проводять не менше 5 разів.

3. Менший тягарець m_2 перекладають на лівий великий тягарець і вимірюють час падіння t_2 аналогічно п.2.

4. Дані заносять в таблицю. Перевіряють співвідношення (3.17).

4. Обробку результатів прямих вимірів проводять за схемою №1, непрямих - за схемою № 4.

5. Аналізують одержані результати та роблять короткі висновки.

VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

- Сформулюйте та запишіть другий закон Ньютона:
 - для випадку малих швидкостей;
 - для випадку великих швидкостей.
- Дайте визначення лінійного та кутового прискорення.
- Виведіть зв'язок між лінійним та кутовим прискоренням.
- Тіло рухається в полі тяжіння під кутом до горизонту. Чи змінюється при цьому вектор швидкості, модуль швидкості, проекції швидкості на координатні осі?
- Як зв'язані між собою повне \vec{a}_n , нормальне \vec{a}_n та тангенціальне \vec{a}_τ прискорення:
 - $\vec{a}_n = [\vec{a}_i \cdot \vec{a}_\tau]$;
 - $\vec{a}_n = \vec{a}_i - \vec{a}_\tau$;
 - $|\vec{a}_n| = \sqrt{a_i^2 + a_\tau^2}$;
 - $\vec{a}_n = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_\tau$
- Як зміниться прискорення системи, якщо збільшити масу $2M$ великих тягарців (залишивши без зміни масу додаткового важка і при незмінній силі тертя)?
- Що може внести найбільшу похибку при визначенні значення g .
- При рівноприскореному русі тягарців прискорення вираховується по формулі $a = \frac{2s}{t^2}$. По якій формулі вираховується абсолютна похибка Δa ?
 - $\Delta a = \frac{2\Delta s}{t^2} + \frac{4s}{t^2} \cdot \frac{\Delta t}{t}$;
 - $\Delta a = \frac{s \cdot 2t \cdot \Delta t + t^2 \cdot \Delta s}{t^4}$;
 - $\Delta a = \frac{\Delta s}{t^2} + \frac{s \cdot \Delta t}{t^3}$;
 - $\Delta a = \frac{8s\Delta t + t^2 \Delta s}{t^4}$
- Вкажіть на машині Атвуда ділянку рівномірного S та рівноприскореного руху s .
- Прокоментуйте систему рівнянь 3.18 та розв'яжіть її для знаходження формули 3.19 і 3.20.

ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ СИЛИ ЗЕМНОГО ТЯЖІННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА.

I. МЕТА РОБОТИ: вивчення коливного руху тіл в полі сил тяжіння; визначення прискорення сили земного тяжіння; вивчення законів затухаючих коливань.

II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ ТА МАТЕРІАЛИ: математичний маятник, секундомір, лінійка.

III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ, знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

1. Закон тяжіння Ньютона. Прискорення сили тяжіння.
2. Гармонічні коливання. Рівняння руху коливань осцилятора та математичного маятника. Частота і період коливань.
3. Повна енергія гармонічних коливань.
4. Рівняння руху затухаючих коливань. Формула для частоти коливань. Логарифмічний декремент затухання.
5. Рух в полі тяжіння. Основні закони руху планет і комет.

IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Гармонічними називаються коливання, які відбуваються за законом синуса або косинуса. Найпростішою моделлю, що здійснює гармонічні коливання, є гармонічний осцилятор. Це є закріплена на пружині кулька, яка рухається без тертя, причому вважається, що вся маса осцилятора зосереджена в кульці, а вся пружність (деформаційна здатність) зосереджена в пружині. Гармонічні коливання осцилятора відбуваються під впливом пружної сили, яка лінійно залежить від зміщення

$$F = -kx. \quad (4.1)$$

Тоді, згідно другого закону Ньютона ($ma = F$), рівняння руху гармонічного осцилятора вздовж напрямку x записується у вигляді:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (4.2) \quad \text{або} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (4.2a)$$

Це є диференціальне рівняння (другого порядку), розв'язок якого знаходиться у вигляді рівняння синусоїдальних або косинусоїдальних коливань, наприклад $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$, де ω_0 – частота цих коливань. Після підстановки цього рівняння і його другої похідної в рівняння (4.2a)

знайдемо, що $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – це є так звана циклічна частота власних коливань

гармонічного осцилятора (або пружинного маятника – невагомої пружини жорсткості k з кулькою, маса якої m), тобто коефіцієнт перед x у (4.2а) дорівнює ω_0^2 . Частота коливань ν (кількість коливань за секунду) зв'язана з циклічною частотою ω_0 співвідношенням: $\omega_0 = 2\pi\nu$.

Математичний маятник також здійснює гармонічні коливання у випадку малих кутів відхилення. Під математичним маятником розуміють невелике тіло (матеріальну точку), підвішене на довгій нерозтяжній і невагомій нитці (такій, що розмірами тіла можна знехтувати порівняно з довжиною нитки ℓ). У фізичному експерименті, для зменшення сили опору повітря при русі тіла, на нитці (або дротині) підвішують металеву кульку (рис.4.1). Покажемо, що рівняння руху математичного маятника має вигляд, аналогічний (4.2а).

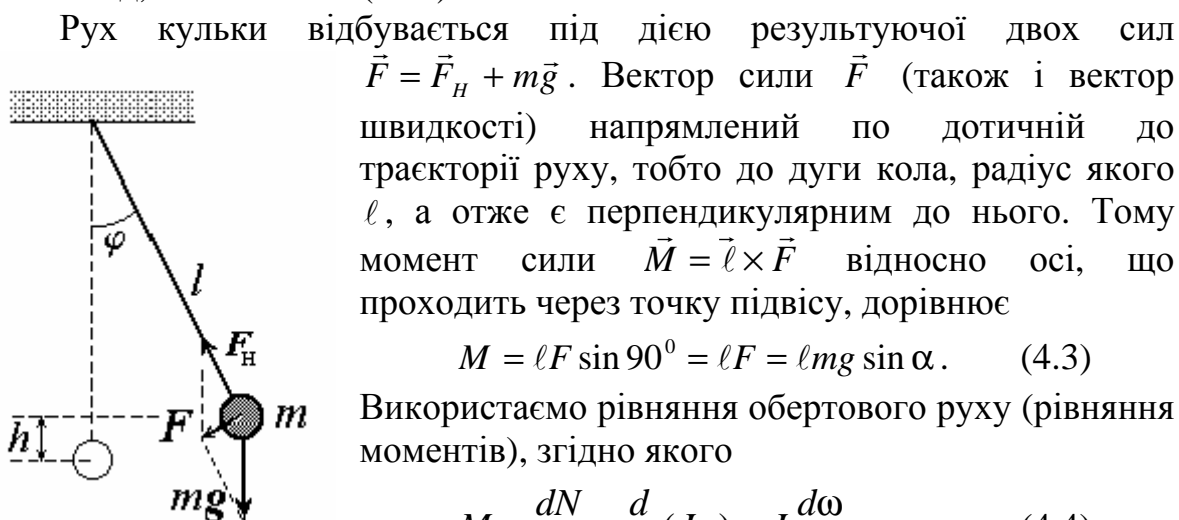


Рис. 4.1

Рух кульки відбувається під дією результуючої двох сил $\vec{F} = \vec{F}_H + m\vec{g}$. Вектор сили \vec{F} (також і вектор швидкості) напрямлений по дотичній до траєкторії руху, тобто до дуги кола, радіус якого ℓ , а отже є перпендикулярним до нього. Тому момент сили $\vec{M} = \vec{\ell} \times \vec{F}$ відносно осі, що проходить через точку підвісу, дорівнює

$$M = \ell F \sin 90^\circ = \ell F = \ell mg \sin \alpha. \quad (4.3)$$

Використаємо рівняння обертового руху (рівняння моментів), згідно якого

$$M = \frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt}(J\omega) = J \frac{d\omega}{dt}, \quad (4.4)$$

де N – момент імпульсу, J – момент інерції маятника відносно осі обертання, який для

точкового тіла дорівнює $J = m\ell^2$. Кутова швидкість $\omega = \frac{d\phi}{dt}$, прирівнюючи

вирази (4.4) і (4.3) одержуємо рівняння

$$m\ell^2 \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\ell mg \sin \phi, \quad (4.5)$$

яке при малих кутах відхилення маятника, коли $\sin \phi \approx \phi$, набуває вигляду

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \phi \quad \text{або} \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \phi = 0, \quad (4.6)$$

тобто аналогічно рівнянням (4.2). Знак “мінус” взятий через те, що момент сили тяжіння надає маятнику кутового прискорення, зворотного кутовому відхиленню. Це рівняння показує, що ϕ (або x) повинні бути такою функцією часу t , щоб друга похідна від цієї функції в будь-який момент дорівнювала самій функції, помноженій на величину g/ℓ (або k/m), тобто на ω_0^2 . Отже, якщо зміна якоїсь фізичної величини описується рівнянням, аналогічним (4.2), значить вона здійснює гармонічні коливання з

циклічною частотою ω_0 . В даному випадку зміна кута з часом описується рівнянням $\varphi = \varphi_0 \cos(2\pi\nu t)$, де частота коливань

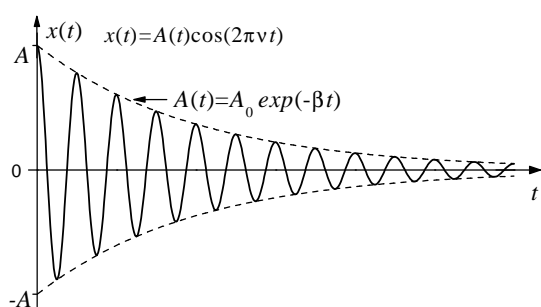
$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad \text{а період коливань} \quad T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (4.7)$$

Наявність сили тертя опору повітря при русі кульки приводить до зменшення амплітуди коливання: енергія маятника витрачається на роботу сили тертя і в кінцевому випадку розсіюється як теплова енергія в навколишнє середовище, тобто зростає енергія теплового руху навколишніх молекул повітря. Коливання стають *затухаючими*.

Приймається, що сила тертя пропорційна швидкості кульки $F_T = -\alpha v$, (α – коефіцієнт опору), тому диференціальне рівняння коливного руху вздовж напрямку x приймає вигляд (у рівнянні (4.2) з'являється сила тертя, а у рівнянні (4.5) – момент сили тертя $M_T = \ell \cdot \alpha v = \ell^2 \alpha \omega$):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{\ell} \varphi = 0 \right). \quad (4.8)$$

Розв'язком цього рівняння є функція (дивись рис. 4.2)



$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin \omega t; \quad (4.9)$$

$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ – амплітуда коливань, яка зменшується з часом за експоненціальним законом з показником затухання $\beta = \frac{\alpha}{2m}$,

A_0 – початкова амплітуда.

Рис. 4.2

Циклічна частота затухаючих коливань ω менша за циклічну частоту власних коливань ω_0 (не затухаючих) і визначається за формулою:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}; \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx T_0 \left(1 + \frac{\beta^2}{2} \frac{T_0^2}{4\pi^2} \right). \quad (4.10)$$

Логарифмічним декрементом затухання θ називається натуральний логарифм відношення двох амплітуд, взятих через період T . Він зв'язаний з величинами β і α співвідношенням:

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{\alpha}{2m} T. \quad (4.11)$$

Якщо зробити заміну $\beta = 1/\tau$, то формула для амплітуди затухаючих коливань запишеться у вигляді $A(t) = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, де τ – так званий “характеристичний час” або *час релаксації* – час за який амплітуда

коливань зменшиться в $e \approx 2,718$ раз (це видно, якщо прирівняти $t = \tau$). Отже добуток $\beta\tau = 1$, і тоді $\theta = T/\tau = 1/N_e$, де N_e – кількість коливань, через які амплітуда зменшиться в e раз.

V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Лабораторна робота виконується на установці, яка устаткована автоматичним фіксуванням часу коливань і числа повних коливань за допомогою універсального секундоміра РМ-14 та фотоелектричного датчика. На передній панелі установки розташовані три кнопки “СЕТЬ”, “СТОП”, “СБРОС”: “СЕТЬ” – вмикач мережі. Натиснувши на цю кнопку, вмикаємо джерело струму. Візуально це супроводжується свіченням цифрових індикаторів і лампочки фотоелектричного датчика. “СБРОС” – встановлення нуля вимірювача. Натиск цієї кнопки викликає скид показів секундоміра і генерацію сигналу дозволу на вимірювання. “СТОП” – закінчення вимірювання.

При допомозі двох кронштейнів, нижній із яких містить фотодатчик, регулюється довжина нитки маятника. При малій амплітуді коливань маятника його період визначається за формулою (6.7), де ℓ - довжина маятника, яка вираховується за формулою $\ell = L + d/2$ (L – довжина нитки, d – діаметр кульки) або вимірюється безпосередньо лінійкою від точки підвісу до центру кульки. Робоча формула для обчислення прискорення сили земного тяжіння є такою:

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2}. \quad (4.12)$$

VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Визначення прискорення сили земного тяжіння

Завдання 1.

1. Відрегулювати за допомогою ніжок строго вертикальне положення приладу при знаходженні маятника у стані спокою.

2. Встановити певну довжину маятника, виміряти довжину нитки L та діаметр кульки d . Вимірювання цих величин досить зробити один раз, а похибку результату оцінити як інструментальну (систематичну) похибку.

3. Підготувати прилад для вимірювання, для цього ввімкнути його у мережу, натиснути кнопку “СЕТЬ”, перевіряючи, чи всі індикатори показують нуль і чи горить лампа фотоелектричного датчика.

4. Відхилити маятник на $4-5^0$ від положення рівноваги і відпустити.

5. Натиснути кнопку “СБРОС”.

6. Після підрахунку часу t 50-ти повних коливань натиснути кнопку “СТОП”. Дослід повторюють не менше 5 разів.

7. Обчислити, користуючись схемою №1, середнє значення часу п’ятдесяти повних коливань \bar{t} і довірчий (надійний) інтервал Δt для коефіцієнта надійності (для ймовірності) $\alpha=0,95$.

8. Обчислити середній період коливань $\bar{T} = \bar{t}/50$ та довірчий інтервал $\Delta T = \Delta t/50$ для вибраного значення коефіцієнта надійності α . Знайти і записати значення відносної похибки $\varepsilon = \frac{\Delta T}{\bar{T}}$.

9. Обчислити довжину маятника ℓ та її абсолютну похибку:

$$\Delta \ell = \sqrt{(\Delta L)^2 + (\frac{1}{2}\Delta d)^2},$$

де ΔL і Δd – довірчі інтервали, в які входять випадкові і систематичні похибки (у випадку однократних вимірювань – тільки систематичні).

10. За формулою (4.12) знайти прискорення сили земного тяжіння g .

11. Оскільки вимірювання вважаються рівноточними, відносну похибку визначення g обчислити за формулою:

$$\frac{\Delta g}{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \ell}{\bar{\ell}}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{\bar{T}}\right)^2}.$$

12. Кінцевий результат записати у вигляді: $g = \bar{g} \pm \Delta g$.

Завдання 2.

1. Встановити іншу довжину нитки L_1 . Виміряти довжину маятника $\ell_1 = L_1 + d/2$ і час t_1 50-ти повних коливань маятника.

2. Повторити аналогічні виміри ще для чотирьох або п’яти довжин маятника ℓ , змінюючи її від максимально можливої довжини до мінімальної. Результати вимірювань занести у відповідну таблицю.

3. За формулою $\bar{T} = \bar{t}/50$ знайти значення періоду коливань, яке відповідає вибраній довжині маятника. Похибку визначення цих всіх періодів обчислити, використовуючи значення ε із попереднього завдання, оскільки похибка визначення часу в цих дослідах не змінилася: $\Delta T = \varepsilon \cdot \bar{T}$.

4. Побудувати графік залежності періоду T від довжини маятника ℓ : $T = f(\ell)$. На графіку для кожної точки T_i графічно, у вигляді відрізка вертикальної прямої (“вусів”), зобразити похибку визначення кожного значення періоду: відкласти в одну та іншу сторону від точки T_i значення ΔT у масштабі графіка. Як видно з формули (4.7), залежність T від ℓ має відповідати кореневому закону:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\ell} = B\sqrt{\ell}. \quad (4.13)$$

5. На тому ж графіку паралельно осі ℓ (наприклад зразу під нею або у верхній частині поля рисунка) накреслити вісь $\sqrt{\ell}$ і відповідно з нею

відкласти точки $(T_i, \sqrt{\ell_i})$ і їх “вуси”. Як видно із залежності (4.13), в такому представленні ці точки повинні “лягти” на пряму лінію, тобто створити лінійну залежність з коефіцієнтом нахилу прямої до осі абсцис (з тангенсом кута нахилу) рівним B (дивись рис. 4.3).

6. Проаналізувати, з врахуванням похибки, відповідність накладання експериментальних точок на цю теоретичну пряму, прийнявши до уваги те, що формула (4.7) або (4.13) справджується при умові $d \ll L$ (при малих довжинах нитки можливе відхилення експериментальних точок періоду від теоретичної прямої).

7. Провести через експериментальні точки (для “правильних” точок – див. рис.4.3) пряму лінію так, щоб вона приблизно порівну поділила собою сумарну довжину їх “вусів”.

8. За нахилом прямої знайти коефіцієнт B : вибрати дві довільні точки на прямій і знайти відношення

$$B = \frac{T_2 - T_1}{\sqrt{\ell_2} - \sqrt{\ell_1}}. \quad (4.14)$$

9. Як видно з формули (4.13), $B = 2\pi/\sqrt{g}$, тому можна обчислити прискорення сили земного тяжіння:

$$g = \left(\frac{2\pi}{B}\right)^2. \quad (4.15)$$

Знайдені за графіком значення B і g записати на полі рисунка.

10. За попередньо вимірними даними значення прискорення знайти також за формулою

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{t^2} (50)^2, \quad (4.16)$$

підставляючи значення ℓ і t всіх “правильних” дослідів окремо.

11. Вважаючи, що одержані значення прискорення g_1, g_2, g_3 і т.д. підлягають нормальному закону розподілу випадкових величин, вирахувати середнє значення прискорення \bar{g} і результуючу похибку (довірчий інтервал) Δg згідно схеми №1 обробки результатів прямих вимірювань.

12. Порівняти знайдені за різними методиками значення прискорення сили земного тяжіння та їх Δg між собою і з відомим значенням g для даної широти (табличним), зробити висновки.

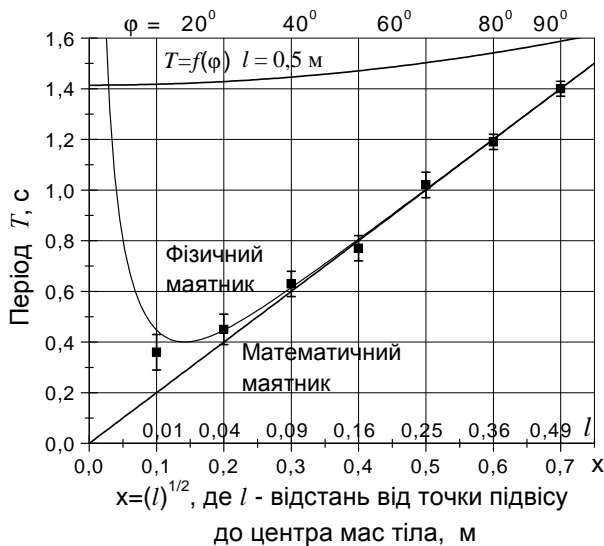


Рис. 4.3.

Типові залежності періоду коливань T математичного маятника від його довжини та деякого макроскопічного тіла від відстані між точкою підвісу тіла та його центром мас; розмір тіла – декілька сантиметрів. Верхня крива – залежність T від кута відхилення нитки маятника довжиною $\ell = 0,5$ м від вертикалі згідно формули (4.20).

Дослідження затухаючих коливань.

Визначення логарифмічного декременту затухання

Завдання 3.

1. Відхилити маятник на кут значно більший за 4^0 - 5^0 (наприклад, на 50^0 - 70^0), заміряти значення початкової висоти h_0 піднімання кульки і початкової амплітуди A_0 , відпустити маятник, одночасно увімкнувши секундомір.

2. Відзначати час та значення амплітуди через кожні 10-15 повних коливань, заповнюючи відповідну таблицю даних.

3. Після відліку 100 повних коливань вимкнути секундомір, зафіксувати час і амплітуду.

4. Для більшої точності результатів бажано повторити пункти 1-3 ще хоча б 1-2 рази, записуючи значення часу та амплітуди через ту саму кількість коливань, а дані цих повторів усереднити.

5. Результати вимірювань обробити наступним чином:

5.1. За першими 10-20 великими коливаннями знайти частоти ω і ν та значення періоду T . Порівняти їх із власною експериментальною частотою ω_0 (ν_0) і періодом T_0 математичного маятника, одержаних у випадку малих коливань.

5.2. Накреслити графік затухаючих коливань, подібний до рис.4.2, відкладаючи на ньому час перших 30-50 коливань.

5.3. Накреслити графік залежності амплітуди коливань від часу для всіх 100 коливань. Переконайтеся, що залежність $A(t)$ має експоненціальний характер: для цього накреслити цей графік у напівлогарифмічних координатах, тобто вісь A (вісь ординат y) відкладати як $\ln A$, залишаючи

вісь t (вісь абсцис x) без змін. У таких координатах графік повинен бути лінійним.

5.4. За тангенсом кута нахилу прямої $\ln A = \ln A_0 - \beta t$ знайти значення β – показник затухання: для двох довільних точок на цій прямій обчислити відношення

$$\frac{\ln A_1 - \ln A_2}{t_2 - t_1} = \beta. \quad (4.17)$$

5.5. Знайти час релаксації $\tau = 1/\beta$ і, при відомій масі кульки маятника, коефіцієнт опору $\alpha = 2m\beta$.

5.6. Перевірити співвідношення між експериментальними значеннями ω і ω_0 (T і T_0) згідно формул (4.10). Зробити висновки.

5.7. Вважаючи, що втрата повної енергії маятника на подолання опору повітря за першу чверть періоду ($t=T/4$) дуже мала, знайти швидкість кульки при проходженні нею вперше положення рівноваги (використовуючи закон збереження і перетворення механічної енергії):

$$v = \sqrt{2gh_0}. \quad (4.18)$$

Знайти також цю швидкість за “точною” формулою:

$$v = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=\frac{T}{4}} = -A_0\omega e^{-\beta t} \sin \omega t - A_0\beta e^{-\beta t} \cos \omega t = -A_0 \frac{2\pi}{T} e^{-\beta \frac{T}{4}}. \quad (4.19)$$

Результати порівняти і зробити висновки.

5.8. Знайти максимальну силу опору повітря $F_{\text{оп}} = \alpha v$, та середнє значення сили опору в процесі коливного руху кульки $F_{\text{сеп}} = \alpha v_{\text{сеп}}$.

5.8.1. Вважаючи, що сила опору обумовлена силою в'язкого тертя і описується формулою Стокса $F_{\text{оп}} = 6\pi\eta r v$, перевірити правильність оцінок вище знайдених фізичних величин (β , α , v), обчисливши в'язкість повітря $\eta = \alpha / (6\pi r)$ та порівнявши її з табличним значенням ($\eta = 18,1 \cdot 10^{-6}$ Па·с).

5.8.2. Вважаючи, що сила опору обумовлена лобовим опором $F_{\text{оп}} = 0,06S\rho v^2$ (S – площа перерізу кульки), перевірити правильність оцінок вище знайдених фізичних величин (β , α , v), обчисливши густину повітря $\rho = \alpha / (0,06Sv_{\text{сеп}})$ та порівняти її з табличним значенням ($\rho = 1,29$ кг/м³).

5.9. Знайти логарифмічний декремент затухання θ :

а) за формулою $\theta = \beta T$ або $\theta = T/\tau$;

б) за формулою $\theta = 1/N_e$.

6. Зробити висновки за результатами роботи.

VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Дати визначення математичного маятника.
2. Що таке період, частота, амплітуда і фаза коливань?
3. Поясніть від яких факторів залежить значення прискорення сили земного тяжіння.
4. Рівняння гармонічних коливань матеріальної точки дано у вигляді $x=A\cos(\omega t+\phi)$. Поясніть зміст кожної фізичної величини.
5. Запишіть диференціальне рівняння гармонічного осцилятора і виведіть формули для частоти і періоду коливань осцилятора.
5. Які фактори впливають на період коливань маятника? Як він залежить від маси маятника?
6. Що зміниться в коливному процесі маятника, якщо нитка не буде “нерозтяжною” (наприклад, гумовою)?
7. Період коливань математичного маятника для великих кутів відхилення ϕ з достатньою точністю дається виразом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi}{2}\right). \quad (4.20)$$

Оцініть відносну похибку $\Delta T/T_0$, яка виникає коли період обраховується за формулою

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

8. Металева кулька висить на тонкій сталій дротині довжиною один метр. Чи залежить період коливань такого математичного маятника від температури?
9. Поясніть, як залежить період коливань математичного маятника від його висоти над поверхнею Землі.
10. Сформулюйте і поясніть закони Кеплера для руху планет.
11. Вкажіть рівняння для визначення другої космічної швидкості:
 - 1) $\frac{mv^2}{2} = mg$; 2) $\frac{mv^2}{2} = mgh$; 3) $\frac{mv^2}{R_3} = mgh$; 4) $\frac{mv^2}{2} = G \frac{mM_3}{R_3}$;
 - 5) $\frac{mv^2}{2} = G \frac{mM_3}{R_3^2}$, де G – гравітаційна стала; M_3 і R_3 – маса і радіус Землі; m – маса тіла; h – висота над Землею.
12. Що таке логарифмічний декремент затухання? час релаксації?
13. Чому і за яким законом змінюється амплітуда коливань з часом.
14. Як зв’язані між собою частоти (періоди) власних коливань і затухаючих?
15. Чому формула для періоду коливань математичного маятника справедлива тільки при малих амплітудах коливань?
16. Пружинний маятник із горизонтального положення перевели у вертикальне. Чи зміниться при цьому частота коливань? Як залежить період коливань пружинного маятника від висоти над поверхнею Землі?

ВИВЧЕННЯ КОЛИВАНЬ ЗВ'ЯЗАНИХ СИСТЕМ

I. МЕТА РОБОТИ: ознайомлення студентів із зв'язаними системами, нормальними коливаннями, явищем резонансу у зв'язаних системах.

II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ: установка РМ-10, важки, штатив з масштабною лінійкою.

III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ, знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

1. Гармонічні коливання. Рівняння руху для гармонічних коливань пружинного маятника та математичного маятника. Формули для частот цих коливань.
2. Складання гармонічних коливань однакової частоти. Метод векторних діаграм. Биття.
3. Поняття про ступені вільності. Коливання систем з багатьма ступенями вільності. Нормальні коливання.
4. Загасаючі коливання.
5. Вимушені коливання. Резонанс.

IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Найпростіші коливання – це гармонічні коливання. Гармонічними коливаннями називають коливання, що відбуваються за законом синуса або косинуса. Рівняння руху для таких коливань записується:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \text{ або } y = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (5.1)$$

де A – амплітуда коливань, ω – частота, φ – фаза. Гармонічні коливання здійснюють пружинний маятник і математичний маятник. Але це відбувається лише при невеликих амплітудах відхилення, при яких можна вважати, що повертаючі сили пропорційні величині відхилення x коливної точки від положення рівноваги. Тіло, яке здійснює гармонічні коливання, називають лінійним або гармонічним осцилятором.

Рівняння руху (II закон Ньютона) записується для пружинного маятника так:

$$m\ddot{x} = -kx \text{ або } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0; \quad (5.2)$$

для математичного маятника:

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{\ell}x \text{ або } \ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = 0. \quad (5.3)$$

Власні частоти гармонічних коливань відповідно мають вигляд :

$$\omega_{\text{пм}} = \sqrt{k/m}, \quad (5.4)$$

$$\omega_{\text{мм}} = \sqrt{g/\ell}. \quad (5.5)$$

Якщо система має декілька ступенів вільності, то при малих відхиленнях від положення рівноваги можливі одночасні коливання по усіх ступенях вільності.

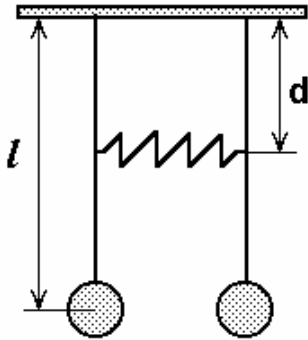


Рис. 5.1

Якщо коливання, що відповідають кожному ступеню вільності, незалежні один від одного, тобто не можуть обмінюватися один з одним енергією, то розгляд руху системи з декількома ступенями вільності є чисто кінематична задача: знаючи рух по кожному ступеню вільності, треба провести кінематичне складання рухів. В результаті цього тіло описує траєкторію, яка називається фігурою Ліссажу.

Зв'язаною системою називається система з багатьма ступенями вільності, між якими є зв'язки, що забезпечують можливість обміну енергією між різними ступенями вільності. Прикладом такої системи є два ідентичні маятники, зв'язані пружиною (рис. 5.1). Для цих маятників можлива перекачка енергії від одного маятника до другого і досить складний рух. Якщо маятники закріплені так, що вони можуть коливатися лише у площині маятників, то ця система має два ступені вільності. Незважаючи на складність руху двох зв'язаних маятників, він завжди може бути поданий як суперпозиція двох гармонічних коливань, частоти яких називаються нормальними частотами зв'язаної системи. Число нормальних частот рівне числу ступенів вільності. Нормальними коливаннями для розглядуваної системи є однофазні і протифазні коливання. Однофазними коливаннями називають такі коливання зв'язаної системи, коли маятники у початковий момент відхилені в одну сторону і на однаковий кут. При протифазних коливаннях маятники відхилені в протилежні сторони, але на однаковий кут.

V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Лабораторна установка (рис.5.2) складається з двох зв'язаних пружинами 10, 11 маятників 8, 9, кожен з яких коливається у своїй вертикальній площині. Для підтримки незгасаючих коливань використовується важіль зовнішньої сили 7, зв'язаний з електричним двигуном. Установка має індикатор часу 17 та індикатор кількості коливань 18. На передній панелі є кнопка вимикача струму "ПУСК" і кнопка стирання показів шкали 19, кнопка "СТОП", вмикач двигуна 15, регулятор числа обертів двигуна 16, індикатор роботи двигуна.

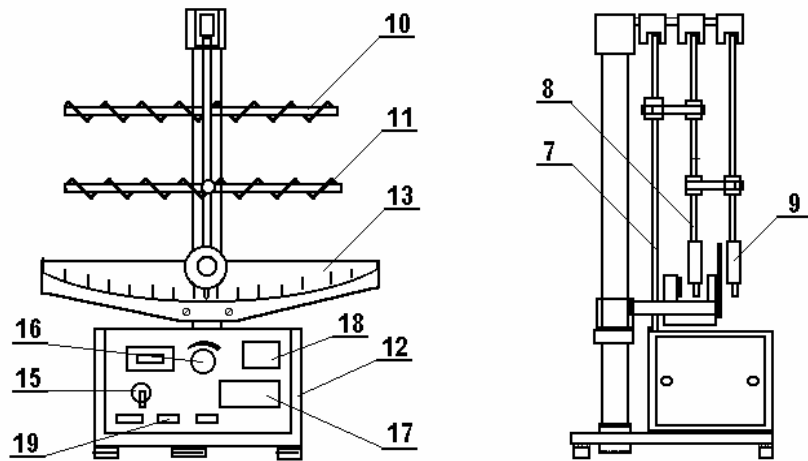


Рис. 5.2

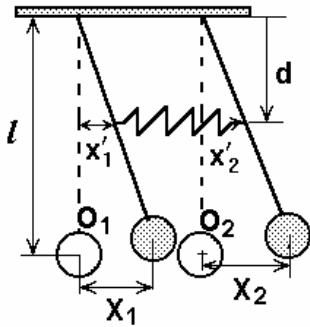


Рис. 5.3

Система маятників установки має два ступені вільності. При малих коливаннях можна знехтувати вертикальними зміщеннями точок маятників і розглядати їх рух вздовж однієї горизонтальної прямої. Положення точок, що коливаються (центри мас маятників) характеризуються зміщеннями x_1 та x_2 від своїх положень рівноваги, позначених буквами O_1 та O_2 на рис.5.3. Коли точки знаходяться одночасно в положенні рівноваги, пружина, що їх з'єднує, не деформується і тому не діє на точки з якимись силами.

Рівняння руху маятників, без врахування їх зв'язку через пружину або у випадку, коли пружина не деформується, мають вигляд:

$$\ddot{x}_1 + \frac{g}{l}x_1 = 0; \quad \ddot{x}_2 + \frac{g}{l}x_2 = 0. \quad (5.6)$$

При деформації пружини виникають сили F , пропорційні її видовженню або стиску (закон Гука), і тому рівняння (5.6) вже не дорівнюють 0, а прирівнюються до цієї зовнішньої пружної сили. У випадку, якщо б пружина була прикріплена до центра мас маятників, то видовження пружини було б $\Delta x = x_2 - x_1$ (див. рис.5.3) і тому сили, що діють на маятники, рівні:

$$F_1 = -F_2 = k(x_1 - x_2), \quad (5.7)$$

де k - коефіцієнт жорсткості пружини. Тому рівняння руху з врахуванням сил зв'язку через деформацію пружини мають вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{g}{\ell} x_1 + \frac{k}{m} (x_1 - x_2) = 0, \\ \ddot{x}_2 + \frac{g}{\ell} x_2 - \frac{k}{m} (x_1 - x_2) = 0, \end{cases} \quad (5.8)$$

де m однакова маса маятників, зосереджена в центрі мас. Складаючи і віднімаючи рівняння системи (5.8), одержуємо два нових рівняння, що описують нормальні гармонічні коливання:

$$\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} (x_1 + x_2) = 0; \quad (5.9)$$

$$\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} (x_1 - x_2) + \frac{2k}{m} (x_1 - x_2) = 0.$$

Як видно із системи рівнянь (5.9), частоти однофазних ω_1 і протифазних ω_2 нормальних коливань задаються відповідно виразами:

$$\omega_1 = \sqrt{g/\ell}, \quad (5.10) \quad \omega_2 = \sqrt{g/\ell + 2k/m}. \quad (5.11)$$

У виводі, приведені вище, допускалося, що пружина з'єднує центри мас маятників. Якщо вона розмішена на віддалі $d < \ell$ від точки підвісу (тобто так, як і зображено на рис. 5.3), то частота протифазних коливань ω_2 задається виразом:

$$\omega_2 = \left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k d}{m \ell} \right)^{1/2} \quad (5.12)$$

Це зумовлено тим, що видовження пружини стає іншим, а саме $\Delta x' = (x'_1 - x'_2)$ (рис.5.3). Рівняння нормальних коливань (5.9) тоді переписуться так:

$$\begin{cases} \frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} (x_1 + x_2) = 0; \\ \frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} (x_1 - x_2) + \frac{2k}{m} (x'_1 - x'_2) = 0; \end{cases} \quad (5.13)$$

Через те, що $x'_1/x_1 = d/\ell$, $x'_2/x_2 = d/\ell$ (із подібності трикутників, див. рис.5.3), то

$$x'_1 - x'_2 = \frac{d}{\ell} (x_1 - x_2). \quad (5.14)$$

Підставляючи (5.14) у друге рівняння системи (5.13) і порівнюючи одержане рівняння з диференціальним рівнянням для гармонічних коливань, одержуємо рівність (5.12). Формули (5.10) і (5.12) є кінцеві робочі формули. За цими формулами можуть бути розраховані однофазні і протифазні коливання, які, у свою чергу, можуть бути одержані експериментально.

VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Завдання 1. Визначення коефіцієнта пружності пружини k

1. Підвісити зняту пружину на штативі. Зафіксувати на шкалі нижній кінець пружини. Підвісити за нього заданий вантаж і виміряти видовження пружини Δx .

2. На лабораторних терезах зважити вантаж і знайти його масу.

3. Пункт 1 і 2 повторити ще для двох вантажів.

4. Для кожного досліду обчислити k за формулою $k = \frac{mg}{\Delta x}$.

5. Методом приведення до прямих вимірювань знайти k і довірчий інтервал Δk за схемою № 1 обробки результатів вимірювань.

Можна користуватись і одним вантажем, повторюючи дослід 3-5 разів. Так як вимірювання у цьому випадку рівноточні, то середнє значення коефіцієнта пружності і довірчий інтервал знаходиться за схемою № 4 обробки непрямих вимірювань.

6. Результати вимірювань і обчислень занести у таблицю.

Завдання 2. Визначення частоти однофазних коливань.

1. Зняти пружини 10, 11, які з'єднують тягу зовнішньої сили з маятниками, маятники з'єднати пружиною, з відомою жорсткістю k .

2. Обидва маятники відхилити на кут $\alpha=15^\circ$ і відпустити. Коливання при цьому відбуваються без деформації пружини. Зафіксувати час t десяти коливань ($n=10$). Дослід повторити не менше 5 разів.

3. За експериментальною формулою $\bar{\omega}'_1 = \frac{2\pi n}{\bar{t}}$

знайти середнє значення частоти однофазних коливань. Довірчий інтервал $\Delta\omega'_1$ оцінити за схемою № 4 для непрямих вимірювань, оскільки ці вимірювання є рівноточними.

4. Виміряти довжину маятника ℓ , при цьому врахувати, що віддаль між нарізами на спицях становить 5 мм з похибкою 0,1 мм.

5. Результати вимірювань і обчислень занести в таблицю.

6. За формулою (5.10) обчислити “теоретичне” значення частоти ω_1 , оцінити похибку $\Delta\omega_1$ за схемою № 4. Порівняти значення частот однофазних коливань, обчислених за формулами (5.10) і експериментальною.

7. Зробити висновки про гармонічність цих коливань.

Завдання 3. Визначення частоти протифазних коливань.

1. Пункт 1 завдання 2 залишити без змін.
2. Відхилити маятники (спиці з вантажами) у протилежні сторони так, щоб кут між ними дорівнював $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \approx 15^\circ + 15^\circ$, де α_1 і α_2 – кути між спицями і вертикаллю. Відпустити їх і зафіксувати час $n=10$ коливань.
3. Дослід повторити 5 разів.
4. За формулою $\bar{\omega}'_2 = \frac{2\pi n}{t_2}$ знайти середню частоту $\bar{\omega}'_2$ протифазних коливань. Довірчий інтервал оцінити за схемою № 4 для непрямих вимірювань. Результати вимірювань і обчислень занести в таблицю.
5. Виміряти довжину d , при цьому врахувати, що віддаль між нарізами на спицях становить 5 мм з похибкою 0,1 мм.
6. За формулою (5.12) обчислити ω_2 . Довірчий інтервал оцінити за схемою № 4. Порівняти одержані значення частот протифазних коливань, одержаних за формулою (5.12) і експериментально.
7. Зробити висновки про гармонічність цих коливань.

Завдання 4. Визначення частоти биття.

1. Визначити частоту биття за формулою
$$\omega = \omega_1 - \omega_2. \quad (5.15)$$
2. Для того, щоб спостерігати биття, потрібно один з маятників вивести з положення рівноваги, а другий придержати у положенні рівноваги. Далі надати маятникам можливість вільно коливатись.
3. Безпосередньо виміряти період биття, зафіксувавши секундоміром час між двома послідовними максимальними відхиленнями одного із маятників або тривалість декількох таких періодів, обчислити циклічну частоту ω_e та порівняти її з попередньо одержаним значенням ω за формулою (5.15).

Завдання 5. Спостереження резонансу.

1. Приєднати до маятників пружини 10, 11.
2. Ввімкнути вмикач двигуна 15.
3. Регулятором 16 збільшувати частоту зовнішньої сили. При різкому зростанні амплітуди в системі спостерігайте резонанс.
4. Записати кінцевий результат і зробити висновки.

VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Як зв'язані між собою частота, період і циклічна частота коливання?
2. Запишіть формули для обчислення періодів коливань пружинного, математичного і фізичного маятників.
3. Що називають зв'язаними коливними системами?
4. Що таке нормальні частоти коливань?
5. Що розуміють під терміном „биття”?
6. Нарисуйте схематично залежність від часу відхилення коливної точки при наявності биття.
7. Як експериментально і теоретично знаходиться період коливання маятника, частота однофазних і протифазних коливань та биття?
8. Дайте визначення резонансу. Поясніть амплітудно-частотну залежність. Як на неї впливає наявність тертя в коливній системі?
9. Що розуміють під добротністю коливної системи?

ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ ЦИЛІНДРІВ ТА ПЕРЕВІРКА ТЕОРЕМИ ГЮЙГЕНСА-ШТЕЙНЕРА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ

I. МЕТА РОБОТИ: *ознайомлення з методом експериментального визначення моментів інерції твердих тіл за допомогою трифілярного підвісу, перевірка теореми Гюйгенса-Штейнера.*

II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ ТА МАТЕРІАЛИ: *платформа на трифілярному підвісі, секундомір, штангенциркуль, досліджувані тверді тіла (циліндри).*

III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ, знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

- 1. Момент імпульсу, момент сили. Зв'язок між ними.*
- 2. Основний закон динаміки твердого тіла.*
- 3. Рівняння руху твердого тіла навколо закріпленої осі. Момент інерції.*
- 4. Кінетична енергія твердого тіла, яке обертається навколо осі.*
- 5. Сформулювати і довести теорему Гюйгенса-Штейнера.*
- 6. Гармонічні коливання. Рівняння руху коливань осцилятора. Вивести формулу для частоти коливань.*

IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Момент інерції твердих тіл відносно деякої осі в загальному випадку визначається за формулою:

$$J = \int r^2 dm, \quad (6.1)$$

де dm – елемент маси досліджуваного тіла, r – відстань цього елемента маси від осі обертання.

Для тіл правильної геометричної форми величину моменту інерції можна розрахувати теоретично. В складних випадках момент інерції знаходять експериментально. Одним з можливих методів є метод крутильних коливань з допомогою трифілярного підвісу.

V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Гармонічним крутильним коливанням тіла називається періодичний рух навколо осі, що проходить через центр тяжіння цього тіла, коли кут відхилення від положення рівноваги змінюється за законом синуса або косинуса:

$$\alpha = \alpha_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad \text{або} \quad \alpha = \alpha_0 \sin(\omega t), \quad (6.2)$$

де α_0 – амплітуда коливань.

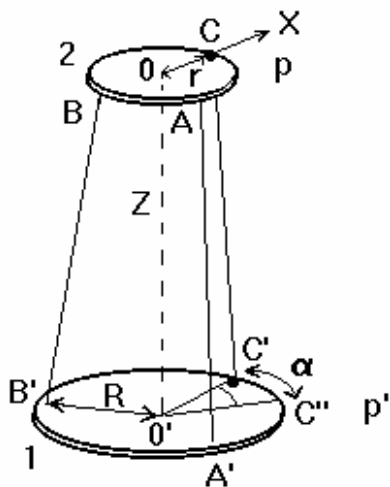


Рис. 6.1

Трифілярний підвіс, будова якого показана на рис.6.1, складається із тонкого диска (платформи) масою m радіусом R , підвішеного на трьох симетрично розташованих нитках. Вгорі ці нитки симетрично закріплені до країв диска меншого радіуса r , який в свою чергу закріплений на кронштейні. З ним зв'язана ручка, за допомогою якої системі надаються крутильні коливання. При цьому нижня платформа повертається навколо вертикальної осі на деякий кут α відносно верхньої і виникає момент

сил, який прагне повернути платформу в попереднє положення рівноваги. Так виникають крутильні коливання, період яких залежить від моменту інерції платформи. При її навантаженні відбудеться зміна моменту інерції, а отже і періоду коливань.

При обертовому коливанні самої платформи або разом з досліджуванним тілом всі три нитки будуть знаходитись в нахиленому положенні, а центр тяжіння системи дещо піднімається вздовж осі обертання. Закон збереження енергії при нехтуванні тертям для загального випадку можна записати в такому вигляді:

$$\frac{1}{2}J\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + Mg(z_0 - z) = E, \quad (6.3)$$

де J – момент інерції, M – маса платформи з досліджуванним тілом, E – повна енергія системи, z_0 – початкова координата точки O' (при $\alpha=0$), z – координата т. O' після повороту платформи на кут α . З рис.7.1 видно, що точка C має координати $(r,0,0)$, а точка C' – $(R\cos\alpha, R\sin\alpha, z)$. Відстань $CC'=l$ (довжині нитки), тому $l^2 = (R\cos\alpha - r)^2 + R^2\sin^2\alpha + z^2$. При малих

кутах, $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, тоді

$$z^2 = l^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\alpha = z_0^2 - 2Rr(1 - \cos\alpha) \approx z_0^2 - Rr\alpha^2.$$

Звідси

$$z = \sqrt{z_0^2 - Rr\alpha^2} = z_0\sqrt{1 - \frac{Rr\alpha^2}{z_0^2}} \approx z_0 - \frac{Rr\alpha^2}{2z_0}. \quad (6.4)$$

Підставивши (6.4) в (6.3), одержимо:

$$\frac{1}{2} J \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + Mg \frac{Rr}{2z_o} \alpha^2 = E. \quad (6.5)$$

Після диференціювання цього виразу по часу одержимо рівняння руху системи:

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + Mg \frac{Rr}{z_o} \alpha = 0, \quad (6.6)$$

розв'язком якого є вираз

$$\alpha = \alpha_o \sin \sqrt{\frac{MgRr}{Jz_o}} t. \quad (6.7)$$

Отже, така система має період коливань

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Jz_o}{MgRr}}. \quad (6.8)$$

Звідси момент інерції системи

$$J = \frac{MgRr}{4\pi^2 z_o} \cdot T^2, \quad \text{або} \quad J = kMT^2, \quad (6.9)$$

де

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_o} \quad (6.10)$$

і для даного приладу є стала величина.

Для пустої платформи момент інерції позначимо через J_0 , а період коливання через T_0 .

Навантаження платформи проводять двома способами: перший – два циліндри розміщують в центрі платформи, кладучи їх один на другий, і другий спосіб – два циліндри розміщують на лінії діаметру платформи, симетрично відносно її центра і на певній відстані d від центра.

Для першого способу навантаження момент інерції позначимо J_1 , період коливання T_1 , для другого способу відповідно – J_2 та T_2 . В обох випадках $M = m + 2M_{ц.}$, $M_{ц.}$ – маса циліндра. Отже, згідно (6.9):

$$J_1 = k(m + 2M_{ц.})T_1^2, \quad (6.11)$$

$$J_2 = k(m + 2M_{ц.})T_2^2. \quad (6.12)$$

Тоді момент інерції одного циліндра відносно осі, що проходить через його центр мас, визначається за формулою:

$$J_{ц.о.} = \frac{1}{2}(J_1 - J_0). \quad (6.13)$$

Момент інерції циліндра відносно осі, яка знаходиться на відстані d від осі, що проходить через центр мас циліндра і паралельна їй, визначається за формулою:

$$J_{ц.} = \frac{1}{2}(J_2 - J_0). \quad (6.14)$$

Формули (6.13) і (6.14) є кінцевими робочими формулами.

Зв'язок між моментами інерції $J_{ц.о.т.}$ і $J_{ц.}$ задається формулою Гюйгенса-Штейнера.

Значення величин моментів інерції циліндрів для обох цих випадків можна розрахувати теоретично за відповідними формулами:

$$J_{ц.о.т.} = \frac{1}{2}M_{ц.}R_{ц.}^2, \quad (6.15)$$

$$J_{ц.т.} = \frac{1}{2}M_{ц.}R_{ц.}^2 + M_{ц.}d^2. \quad (6.16)$$

Формула (6.9) справедлива при відсутності втрат енергії на тертя. Поправки на тертя виявляються незначними у випадку, коли сумарна енергія коливань системи значно перевищує енергію одного коливання, що відповідає умові:

$$\tau \gg T \quad (6.17)$$

де τ - час, протягом якого амплітуда коливань платформи зменшується в 2-3 рази (час релаксації), T - період коливань.

VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Ознайомитися з установкою, вимірювальними приладами. За допомогою ручки, зв'язаної з малим диском, надають платформі коливного обертового руху. Перевіряють, чи виконується умова (6.17).

2. Перевіряють умову малості кутової амплітуди ($\alpha \approx 5^0 - 6^0$) по незалежності періоду коливань від α_0 . Для цього вимірюють час (t_1) 20 повних коливань, визначають період $T_1 = t_1/20$ для деякого α_1 . Далі амплітуду зменшують приблизно в 2 рази (α_2) і знаходять період T_2 . Якщо $T_1 = T_2$, можна проводити вимірювання при кутах $\alpha \leq \alpha_1$. У випадку $T_1 \neq T_2$, амплітуду необхідно знову зменшити вдвоє і повторити вимірювання до тих пір, доки значення попереднього і наступного періодів не співпадатимуть в межах точності експерименту.

3. Вимірюють висоту z_0 , радіуси R і r . Розраховують за формулою (6.9) константу k .

4. Вимірюють час 50 повних коливань пустої платформи 5 разів. Визначають період $T_0 = t/50$

5. В центрі платформи один на другий кладуть два однакові циліндри, маси яких знаходять з допомогою терезів на початку експерименту. Знаходять час 50 повних коливань навантаженої платформи, повторивши виміри 5 разів. Визначають період T_1 .

6. Симетрично по відношенню до центра платформи розміщують циліндри на певній відстані. Відстань між центрами циліндрів вимірюють штангенциркулем. Визначають період T_2 аналогічно п.4 і п.5. Результати вимірювань заносять в таблицю.

7. Результати прямих вимірів часів t_0, t_1, t_2 обробити за схемою №1. Оцінити похибку вимірювань маси циліндрів.

8. За формулами (6.13) та (6.14) визначити моменти інерції циліндрів.

9. Обчислити похибки величин T_0, T_1, T_2 та $J_{ц.о.}, J_{ц.}$ за схемами №1 і №4 відповідно; оцінити малість втрат коливної енергії, перевіривши виконання умови (6.17).

10. Перевірити справедливість теореми Гюйгенса-Штейнера.

11. Одержані з експерименту значення $J_{ц.о.}$ та $J_{ц.}$ зіставити з розрахованими за формулами (6.15) та (6.16) значеннями.

12. Результати вимірювань і обчислень звести в таблицю. Кінцевий результат представити у вигляді:

$$J_{ц.} = \bar{J}_{ц.} \pm \Delta J_{ц.};$$
$$J_{ц.т.} = \bar{J}_{ц.т.} \pm \Delta J_{ц.т.}.$$

13. Провести аналіз одержаних результатів, зробити висновки про узгодженість експериментальних даних з теоретичними розрахунками, про виконання теореми Гюйгенса-Штейнера.

VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Дати означення моменту імпульсу та моменту сили. Який фізичний зміст цих величин?
2. Показати зв'язок моменту імпульсу з моментом сили.
3. Чому при проведенні експерименту коливання підвісу повинні відбуватися з малими кутами відхилення від рівноваги?
4. Які сили виникають, як вони змінюються і як направлені в процесі коливання трифілярного підвісу?
5. Дати означення моменту інерції твердого тіла відносно деякої осі. Чи зміниться момент інерції того самого тіла, якщо змінити положення осі обертання у просторі?
6. Чи зміниться період коливань, якщо два важки перемістити з центру на краї платформи по діаметру? Якщо покласти їх один на одній на краю платформи?
7. При якій умові можна знехтувати втратами на тертя у коливній системі?
8. Як експериментально визначити (оцінити) повну енергію коливної системи?; трифілярного підвісу?
9. Вивести формулу для обчислення похибки вимірювання моментів інерції за схемою №4 (для непрямих вимірювань).

ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА СИЛИ СУХОГО ТЕРТЯ (ТЕРТЯ КОЧЕННЯ)

I. МЕТА РОБОТИ: експериментальне вивчення руху тіла при наявності сил опору (тертя) та визначення коефіцієнтів тертя спокою, кочення і коефіцієнта моменту сил тертя кочення.

II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ: експериментальна установка, міліметровий папір.

III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ, знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

1. Сухе і рідке тертя.
2. Тертя спокою та ковзання. Тертя кочення. Рівняння руху при наявності тертя.
3. Кочення тіл. Момент сили. Рівняння обертового руху при наявності сил тертя.

IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

При коченні колеса по похилій площині виникають сили тертя. Якщо колесо котиться без ковзання, то виникає сила тертя спокою. Величина цієї сили F визначається законом Кулона

$$F = kN, \quad (7.1)$$

де k - коефіцієнт тертя спокою, N - сила нормального тиску. Сила тертя F завжди паралельна площині стикання взаємодіючих тіл. Якщо при коченні колеса виникає ковзання, то з'являється сила тертя ковзання, величина якої визначається рівністю

$$F_1 = k_1 N. \quad (7.2)$$

Коефіцієнт тертя k_1 залежить не лише від властивостей поверхонь, між якими виникає тертя, але і від їх відносної швидкості. Якщо швидкості малі, то його можна вважати постійним і рівним коефіцієнту k ($k_1 = k$).

При коченні циліндра по площині слід враховувати деформацію площини і циліндра. Сила реакції опори не проходить через центр сили тяжіння циліндра, а дещо зміщена вперед в напрямку руху. Це веде до появи моменту сили реакції опори відносно осі обертання циліндра, який перешкоджає його обертанню. Цей момент носить назву *моменту сил тертя кочення* і може бути записаний у вигляді:

$$M = k_2 N, \quad (7.3)$$

де k_2 - коефіцієнт моменту сил тертя кочення. Він суттєво відрізняється від коефіцієнтів k і k_1 , оскільки є розмірною величиною і, власне кажучи, характеризує плече сили тиску опори відносно осі циліндра.

а) КОЧЕННЯ КУЛЬКИ ПО ЖОЛОБУ

V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Коефіцієнт тертя k , k_1 , k_2 можна визначити із вимірювання руху кульки по жолобу.

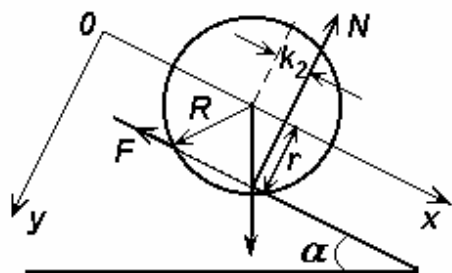


Рис. 7.1а

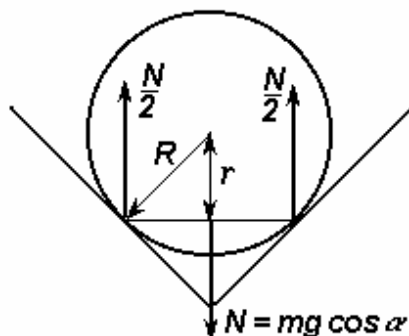


Рис.7. 1б

При незначних кутах нахилу жолоба до горизонту кулька, що знаходиться в жолобі, буде в стані спокою. Найбільший кут, при якому кулька ще не починає котитися, одержимо з умови рівноваги (рис. 7.1а).

$$\begin{cases} mg \sin \alpha_1 - F = 0 \\ Fr - k_2 mg \cos \alpha_1 = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

де m – маса кульки, F – паралельна площині скочування сила тертя спокою, g – прискорення сили тяжіння, r – плече сили F відносно осі обертання. Ці рівності дають одну із робочих формул

$$k_2 = r \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 \quad (7.5)$$

Якщо значення кута α_1 відоме (див. нижче), то із (7.5) можна вирахувати коефіцієнт k_2 .

При збільшенні кута нахилу жолоба, починаючи з кута $\alpha = \alpha_1$, кулька котиться без ковзання. Для жолоба прямокутного перерізу рівняння руху кульки (рис. 7.1б) запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F \\ mg \cos \alpha - N = 0 \\ J\ddot{\varphi} = Fr - k_2 N \\ \ddot{x} = r\ddot{\varphi} \end{cases} \quad (7.6)$$

де J - момент інерції кульки, $J = \frac{2}{5}mR^2$ (R - радіус кульки), $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ - прискорення руху центра мас кульки, $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $\ddot{\phi}$ - кутове прискорення кульки. Із цих рівнянь одержуємо:

$$F = \frac{1}{9}mg \left(4 \sin \alpha + 5 \frac{k_2}{r} \cos \alpha \right), \quad (7.7)$$

$$\ddot{x} = \frac{5}{9}g \left(\sin \alpha - \frac{k_2}{r} \cos \alpha \right). \quad (7.8)$$

Так як згідно закону Кулона $F \leq kmg \cos \alpha$, то рівняння

$$kmg \cos \alpha_2 = \frac{1}{9}mg \left(4 \sin \alpha_2 + 5 \frac{k_2}{r} \cos \alpha_2 \right) \quad (7.9)$$

визначає найбільше значення кута $\alpha = \alpha_2$, при якому кулька ще рухається без ковзання. З рівності (7.9) одержуємо

$$k = \frac{4}{9} \operatorname{tg} \alpha_2 + \frac{5}{9} \frac{k_2}{r}. \quad (7.10)$$

Якщо α_2 і k_2 відомі (див. нижче), рівність (7.10) дозволяє вирахувати коефіцієнт k .

З рівняння (7.6) видно, що центр мас кульки рухається рівноприскорено. Якщо її початкова швидкість була рівна нулю, то для віддалі x , яку вона проходить за час t , маємо

$$x = \frac{1}{2} \ddot{x} t^2 \quad (7.11), \quad \text{звідси} \quad \ddot{x} = \frac{2x}{t^2}. \quad (7.12)$$

Рівності (7.9) і (7.11) дають другу робочу формулу:

$$k_2 = \frac{9r}{5g} \left(\frac{5}{9} g \sin \alpha - \frac{2x}{t^2} \right) \frac{1}{\cos \alpha}, \quad (7.13)$$

де $\frac{5}{9}g \sin \alpha = a$ - прискорення руху центра мас кульки без врахування тертя кочення. В граничному випадку, коли $x=0$, а кут $\alpha = \alpha_1$, рівняння (7.13) приводить до (7.5). Рівність (7.13) дозволяє визначити k_2 , вимірюючи час руху кульки по жолобу при різних кутах нахилу жолоба.

При кутах нахилу жолоба $\alpha > \alpha_2$ можна (наближено) вважати, що кулька при своєму русі не обертається, а лише ковзає по жолобу.

Рівняння руху центра мас кульки тоді може бути записане у вигляді

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - k_1 mg \cos \alpha, \quad (7.14)$$

де k_1 – коефіцієнт тертя ковзання.

Враховуючи (5.11) з рівняння (5.14) одержуємо третю робочу формулу

$$k_1 = \left(g \sin \alpha - \frac{2x}{t^2} \right). \quad (7.15)$$

Рівність (7.15) дозволяє визначити k_1 для різних кутів нахилу жолоба.

Опис установки.

Основна частина установки - металевий жолоб прямокутного перерізу. Внутрішня поверхня жолоба покрита тканиною, яка легко деформується при русі сталевий кульки. Один кінець жолоба закріплений шарнірно, а другий - переміщається по направляючих.

На верхньому краю жолоба розміщений електромагніт, який утримує кульку. Внизу - приймальний столик. Коли кулька вдаряється об нього, розмикається електричний контакт і електричний секундомір зупиняється.

VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Для всіх, вказаних на установці, кутів нахилу жолоба вимірюють час t руху кульки. Для кожного положення жолоба час руху кульки потрібно виміряти 5 разів і взяти із них середнє арифметичне. За формулою (7.12) вираховують для всіх кутів нахилу величину прискорення кульки $a \equiv \ddot{x}$ і швидкість $\dot{x} = \ddot{x}t$ ($v=at$).

2. Одержані результати представляють у вигляді графіка, відкладаючи по осі абсцис кути нахилу, а по осі ординат величину прискорення кульки. Вибрати масштаб: 1 см - 2^0 і 1 см - 20 см/с^2 . На цьому ж листку наносять графік функції $a = \frac{5}{9} g \sin \alpha$, тобто прискорення руху центра мас кульки без врахування тертя кочення. Точка перетину графіків $\ddot{x} = f(\alpha)$ і $a = \frac{5}{9} g \sin \alpha$ визначає кут α'_2 , близький до кута α_2 , при якому виникає ковзання. На графіку вказати надійні інтервали.

3. З рівняння (7.10), припустивши що $k_2=0$, одержимо формулу, $k = \frac{4}{9} \text{tg} \alpha_2$, з якої вирахуємо коефіцієнт тертя спокою.

4. Екстраполяцією графіка $\ddot{x} = f(\alpha)$ до перетину з віссю абсцис визначають величину кута α_1 .

5. Вираховують k_2 : для кутів, більших α_1 , але менших α_2 , за формулою (7.13), для кута α_1 - за формулою (7.5).

6. Коефіцієнт k_1 вираховують за формулою (7.15) для кутів більших α_2 . Визначають залежність k_1 від швидкості.

7. Результати вимірювань і обчислень заносять у раціонально вибрану таблицю.

8. Будують графік залежності k_1 від швидкості.

9. Порівнюють між собою одержані результати коефіцієнтів тертя.

10. Оцінюють похибки.

ПРИМІТКА: Оскільки для одного і того ж кута виконується 5 вимірювань часу і шляху, і ці вимірювання рівноточні, то для знаходження середнього значення прискорення \ddot{x} , швидкості \dot{x} та їх надійних інтервалів $\Delta\ddot{x}$ та $\Delta\dot{x}$ використовується схема №4 обробки непрямих вимірювань. Надійний інтервал $\Delta\ddot{x}$ знаходиться, використовуючи формулу

$$\left(\frac{\Delta\ddot{x}}{\ddot{x}}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x}{\bar{x}}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta t}{\bar{t}}\right)^2, \quad (7.17)$$

де Δx , Δt – надійні інтервали шляху і часу, \bar{x} і \bar{t} – середні значення цих величин, знайдені за схемою №1 обробки результатів прямих вимірювань.

Надійні інтервали Δx і Δt включають в себе не лише випадкові похибки, але і систематичні і знаходиться за формулами:

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{сист}})^2 + (t_{n\alpha} S_{\bar{x}})^2}, \quad \Delta t = \sqrt{(\Delta t_{\text{сист}})^2 + (t_{n\alpha} S_{\bar{t}})^2}. \quad (7.18)$$

Для знаходження похибки для величин k , k_1 і k_2 , які є результатами непрямих вимірювань, використовують схему №4 (формулу 19). Змінними величинами тут будуть кут α , шлях x і час t , а функціями k , k_1 , k_2 . Похибка кута α оцінюється як систематична похибка $\Delta\alpha_{\text{сист}}$.

11. Записати кінцеві результати і зробити висновки.

б). КОЧЕННЯ КУЛЬКИ ПО ПЛАСТИНЦІ

V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

На рис.7.2 приведено схематичне зображення експериментальної установки. Тут зображена площина кочення – пластинка, вздовж якої котиться кулька, підвішена за нитку в точці підвісу O (подібно математичному маятнику). Точка A визначає положення рівноваги кульки, точка B відповідає положенню кульки при відхиленні її на кут α від точки A , OO' – вертикаль, β – кут нахилу площини по відношенню до вертикалі.

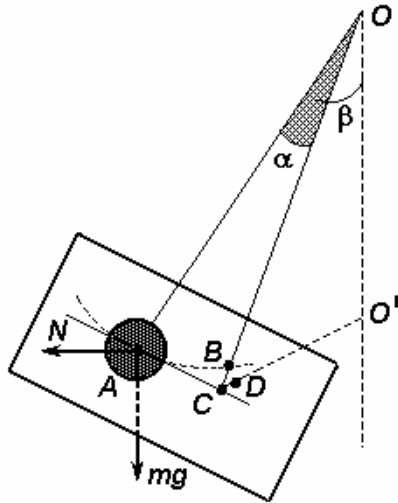


Рис.7.2

При коливальному русі кульки по площині σ , нахиленої під кутом β до вертикалі, під час її кочення виникає момент сили тертя кочення, який визначається за формулою

$$M = FR = k_2 N, \quad (7.20)$$

де M – момент сили тертя кочення, F – сила тертя кочення, R – радіус кулі, N – реакція площини σ , k_2 – коефіцієнт моменту сили тертя кочення.

Дія тертя кочення приводить до зменшення механічної енергії коливального процесу W і, відповідно, до зменшення амплітуди коливань. Знаючи цю зміну енергії,

можна знайти коефіцієнт моменту сили тертя кочення.

Розглянемо рис. 7.2. Точки C і D вибрано таким чином, щоб виконувалися умови: $AC \perp OA$; $BC \perp OA$; $BD \perp OO'$; CD - горизонталь. У трикутнику AOB сторони AO та BO є довжинами l маятника, отже $\triangle AOB$ - рівнобедрений: $\angle OAB = \pi/2 - \alpha/2$, а $\angle BAC = \alpha/2$. В трикутнику CBD за побудовою $\angle CBD = \beta$. Розглянемо потенціальну енергію кульки в точці B , відносно рівня, заданого прямою CD . Положення точки B визначається кутом α , тому

$$BD = h \cdot \cos \beta = \left(AB \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cos \beta \approx l \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta$$

(при малих кутах α хорда AB прямує до дуги $l \cdot \alpha$). Потенціальна енергія в цьому випадку

$$W_\alpha = mgh = mgl \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta. \quad (7.21)$$

З рис.7.2 видно, що сила нормальної реакції з боку пластини в точці A

$$N = mg \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = mg \sin \beta. \quad (7.22)$$

Тому

$$F = \frac{k_2}{R} N = \frac{k_2}{R} mg \sin \beta. \quad (7.23)$$

При затуханні коливачь протягом n періодів амплітуда x_0 зменшиться до x_n і роботу сили тертя можна визначити за формулою

$$A = F \cdot 4x_{\text{cep}} n = 4nF \frac{x_0 + x_n}{2} = 4nFl \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2} = 4nl \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2} \frac{k_2}{R} mg \sin \beta, \quad (7.24)$$

де початкова амплітуда $x_0 = l\alpha_0$; а кінцева – $x_n = l\alpha_n$. Прирівнявши зміну енергії до роботи сил тертя, одержимо (див. 7.21):

$$W_{\alpha_0} - W_{\alpha_n} \approx mgl \cos \beta \left(\alpha_0 \sin \frac{\alpha_0}{2} - \alpha_n \sin \frac{\alpha_n}{2} \right), \quad (7.25)$$

що при малих кутах α ($\sin \alpha \approx \alpha$) перепишеться в такому вигляді:

$$mgl \frac{\alpha_0^2 - \alpha_n^2}{2} \cos \beta = A = 4nl \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2} \cdot \frac{k_2}{R} mg \sin \beta. \quad (7.26)$$

З цієї рівності одержуємо кінцеву робочу формулу

$$k_2 = R \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{4n} \cdot \text{ctg} \beta. \quad (7.27)$$

Опис установки.

Установка складається з маятника, нахил площини коливачь якого змінюється від 0 до $\pi/2$ і електричної схеми, яка дозволяє вимірювати час і відраховувати кількість коливачь. На передній панелі установки знаходяться два цифрових табло і кнопки “ВКЛ”, “СТОП”, “СБРОС”. Натисканням кнопки “ВКЛ” установка приводиться в робочий стан, не потребуючи часу на розігрів. Кнопка “СБРОС” дозволяє “обнулити” покази на обох табло і приводить установку в робочу готовність. Для одержання показів часу, за який здійснюється n коливачь, одразу ж після $(n-1)$ -го коливачь слід натиснути на кнопку “СТОП”.

VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Встановити пластинку та підвісити кульку з однакового матеріалу. Зо допомогою штангенциркуля виміряти діаметр кульки не менше 5-ти разів.

2. За допомогою ручки регулювання кута нахилу площини коливачь встановити певне значення кута β . (Зміну кута β провести в межах від 0 до $\pi/2$).

3. При $\beta=0$ провести визначення періодів коливань для кульок з усіх заданих матеріалів.

4. Відхилити маятник на малий кут α ($\alpha \approx 3-6^\circ$) і переконатися, що відсутнє проковзування. Натиснути на кнопку “СБРОС” і відпустити кульку. Кількість періодів n доцільно вибрати так, щоб α_0 і α_n приймали значення, зручні для спостереження.

5. На $(n-1)$ -му періоді натиснути кнопку “СТОП”. Результати вимірів α_0 , α_n , t , n , β занести в раціонально вибрану таблицю. Виміри провести не менше 5-ти разів при однакових умовах.

6. За формулою (7.27) обчислити коефіцієнт моменту сили тертя кочення, а також період коливань ($T = t/n$). Для кожної серії вимірів при $\beta=\text{const}$ обробку результатів провести за схемою №1.

7. За результатами дослідів складають таблиці залежностей k_2 та T від матеріалу та кута β і представляють їх у вигляді графіків. З'ясовують аналітичні залежності $k_2(\beta)$; $k_2(\text{матеріалу})$; $T(\beta)$ та $T(\text{матеріалу})$. Залежності від кута β будують, виконавши 6-10 вимірювань. Для кожного значення (точки) на графіку наносять довірчий інтервал похибки (“вуси”).

8. Роблять аналіз та висновки.

VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка розмірність коефіцієнту тертя кочення? (тертя ковзання?).
2. Намалуйте схематично залежність сили тертя спокою від прикладеної до тіла сили.
3. Чи залежить сила тертя ковзання від швидкості тіла?
4. Як обчислюється найбільше значення кута нахилу площини до горизонту, при якому тіло ще не буде рухатися (ковзати, котитися)?
5. Що таке момент сили, момент імпульсу, момент інерції тіла?
6. Запишіть формулу для обчислення моменту інерції кульки.
7. Що є причиною виникнення моменту сили тертя кочення?
8. Від чого залежать коефіцієнти тертя спокою, ковзання, кочення?
9. Який фізичний зміст коефіцієнта моменту сил тертя кочення?
- 10.3 яким прискоренням буде рухатися кулька по жолобу, якщо коефіцієнт тертя ковзання рівний нулеві:

$$\text{а) } a=g; \quad \text{б) } a=g\sin\alpha; \quad \text{в) } a=g\cos\alpha; \quad \text{г) } a = \frac{5}{9} g \sin\alpha$$

11. Чому з часом амплітуда коливань кульки зменшується і чи залежить період коливань від амплітуди?
12. Як визначити похибки проведених вимірювань і результату вимірювання?

ВИЗНАЧЕННЯ МОДУЛЯ ЮНГА ЗА РОЗТЯГОМ ДРОТИНИ ТА ПРОГИНОМ СТЕРЖНЯ.

I. МЕТА РОБОТИ: експериментальна перевірка закону Гука та ознайомлення з методами визначення модуля Юнга.

II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ ТА МАТЕРІАЛИ: прилад Лермантова, прилад для визначення модуля Юнга за прогином стержня, мікрометр, масштабна лінійка, досліджувана дротина, стержні з різних матеріалів.

III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ, знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

1. *Різні види деформацій, їх характеристики.*
2. *Закон Гука. Модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона, модуль зсуву.*
3. *Пружність, крихкість і пластичність. Межа міцності, межа пружності.*
4. *Енергія пружно деформованого тіла.*

IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Всі реальні тверді тіла під дією зовнішніх сил змінюють свої лінійні розміри і об'єм. Такі зміни називають деформацією твердого тіла. Пружними називають деформації, що зникають в тілі після припинення дії зовнішніх сил, а пластичними - деформації, що зберігаються після припинення дії зовнішніх сил. Сили взаємодії між частинками твердого тіла, що виникають в результаті зміщення атомів з їх рівноважних положень і перешкоджають деформації тіла, називаються силами пружності.

Пружні деформації характеризуються напругою $\vec{\sigma}$. Якщо на деяку поверхню s діє зовнішня сила, перпендикулярна до площини поверхні s , то механічна напруга $\vec{\sigma}$ визначається формулою

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{F}_{\perp}}{s}, \quad (8.1)$$

де \vec{F}_{\perp} - сила пружності, перпендикулярна до цієї поверхні.

Для однозначного визначення напруги $\vec{\sigma}$ в твердому тілі на довільно орієнтованій поверхні s , в довільній точці O , необхідно задати напруги $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$ вздовж трьох взаємно перпендикулярних напрямках, що проходять через точку O , і є перпендикулярні до відповідних координатних площин:

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_x n_x + \vec{\sigma}_y n_y + \vec{\sigma}_z n_z, \quad (8.2)$$

де n_x, n_y, n_z – проекції нормалі \vec{n} (до поверхні s) на осі декартової системи координат з центром в точці 0. Сукупність дев'яти величин, що є проєкціями векторів $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$ на три координатні осі x, y, z , називають тензором напруг

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

Компоненти тензора σ_{ii} обумовлюють деформації розтягуу, σ_{ij} ($i \neq j$) – деформації зсуву.

Деформації називаються малими або *пружними*, якщо для них справедливий закон Гука: *механічна напруга $\vec{\sigma}$, яка виникає в тілі при пружній деформації тіла, пропорційна відносній деформації тіла $\vec{\epsilon}$:*

$$\vec{\sigma} = E\vec{\epsilon}; \quad \text{для одновісної деформації} \quad - \quad \epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (8.4)$$

де E – модуль пружності, котрий у випадку лінійного видовження називається *модулем Юнга*.

Якщо цей закон не виконується, то деформація не є пружною, вона називається *пластичною* – після припинення дії сили форма тіла не відновлюється.

В загальному випадку залежність механічної напруги σ від деформації ϵ зображується графіком, приведеним на рисунку 8.1.

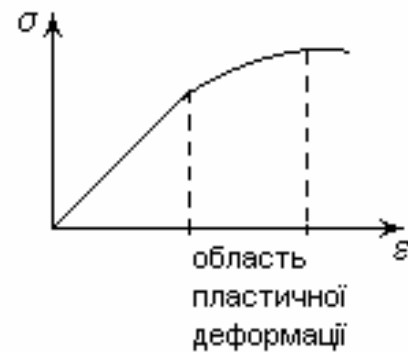


Рис. 8.1

V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Для визначення модуля Юнга із розтягу дротини використовується прилад Лермантова (рис. 8.2). Він складається з кронштейна 1, на якому закріплена досліджувана дротина 2. В одній площині з дротиною до кронштейна 1 причеплені ще дві вертикальні дротини 3, що закінчуються знизу перекладною 4 з гачком. Коли дослід не проводиться, гачок тримає важки, якими користуються для навантаження досліджуваної дротини. Відразу ж після розвантаження дротини важки перекладають на гачок. Цим досягають сталого навантаження кронштейна 1, а отже і його сталого прогину і уникають похибки при вимірюванні видовження навантаженої дротини. Така похибка могла б виникнути внаслідок того, що до видовження дротини додавалася би деформація кронштейна.

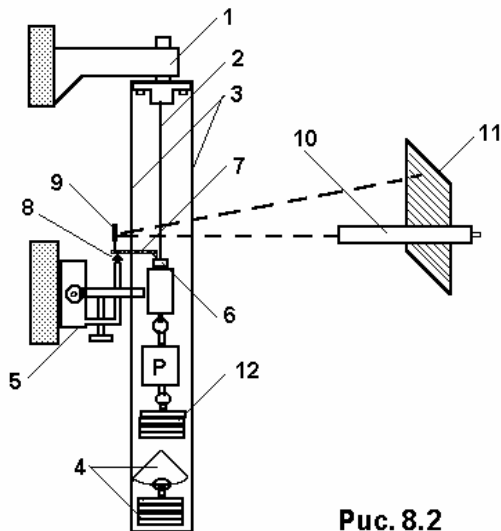


Рис. 8.2

Нехай дротина завдовжки ℓ і площею поперечного перерізу S під дією сили ваги P видовжилася на $\Delta\ell$, тоді із закону Гука (8.4) з врахуванням (8.1) можна одержати:

$$E = \frac{P \cdot \ell}{S \cdot \Delta\ell}. \quad (8.5)$$

Коли видовження $\Delta\ell$ дорівнює початковій довжині ℓ , то $E = \frac{P}{S}$, тобто модуль Юнга визначає собою силу, розраховану на одиницю площі, яка змінює довжину тіла вдвоє.

Тільки гуму можна розтягти у два рази, для інших же тіл, перш ніж їх довжина збільшиться вдвоє, буде перейдена межа міцності і тіло розірветься.

Для визначення видовження дротини $\Delta\ell$ служить нижній кронштейн 5 з пристроями. На циліндр 6 спирається колінчатий важіль 7, що може вільно повертатися навколо своєї осі 8. Над цією віссю важеля перпендикулярно до нього закріплене дзеркальце 9, яке освітлюється спеціальним освітлювачем 10. Відбиті від дзеркальця промені попадають на міліметрову шкалу 11.

При видовженні дротини на $\Delta\ell$ циліндр 6 опускається і дзеркальце повертається на кут α , при цьому має місце співвідношення

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta\ell}{b}, \quad (8.6)$$

де b - довжина важеля 7. Зміна положення дзеркальця приводить до переміщення світлового зайчика вздовж шкали. Якщо зайчик перемістився з поділки n_1 на поділку n_2 шкали при повороті дзеркальця на кут α , а D - відстань від дзеркальця до шкали, то можна написати

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{n_2 - n_1}{D} = \frac{\Delta n}{D}. \quad (8.7)$$

Оскільки величина $\Delta\ell$ мала, то кут α теж малий, тому можна замінити тангенси кутів значеннями самих кутів. Зіставлення формул (8.6) і (8.7) дає

$$\Delta\ell = \frac{\Delta n}{2D} b. \quad (8.8)$$

На нижньому кронштейні 5 є аретир, користуючись яким, шляхом повертання гвинта 13, можна здійснити розтягування дротини без ривків, або звільнити дротину від дії навантаження. Якщо дротина, діаметр якої d ,

будучи навантажена тягарем маси m , видовжилась на $\Delta\ell$, тоді, згідно (8.5) з врахуванням (8.8), модуль Юнга

$$E = \frac{8mg\ell D}{\pi d^2 b \Delta\ell}. \quad (8.9)$$

Ця формула є робочою.

Визначити модуль Юнга за розтягом (стиском) не завжди можливо і зручно, наприклад, коли досліджуємо товстий стержень. В цьому разі модуль Юнга можна визначити за деформацією прогину стержня.

В теорії про опір матеріалів [5] докладно розглядається деформація прогину і виводиться така формула для визначення модуля Юнга

$$h = \frac{kP\ell^3}{Eac^3}, \quad (8.10)$$

h – стріла прогину (див. рис. 8.3), k – коефіцієнт, що залежить від способу закріплення стержня, P – прикладена сила (навантаження), ℓ – довжина, a – ширина, c – товщина стержня. Коефіцієнт k має різне значення залежно від способу закріплення стержня. У випадку, коли один кінець стержня закріплено нерухомо, $k = 4$.

Прилад для визначення модуля Юнга за прогином стержня (рис.8.3) складається з масивної станини, на якій одним кінцем закріплений нерухомо прямокутний стержень. Важки поміщаються на шальку, скріплену з обоймою, яка вільно пересувається вздовж стержня. Зверху на обойму спирається вимірний стержень мікрометра. Мікрометром визначають стрілу прогину h досліджуваного стержня. Якщо обойма знаходиться на відстані ℓ від точки закріплення стержня, то модуль Юнга визначається за формулою:

$$E = \frac{4mg\ell^3}{hac^3}, \quad (8.11)$$

де m – маса важка, поставленого на шальку. Це – робоча формула.

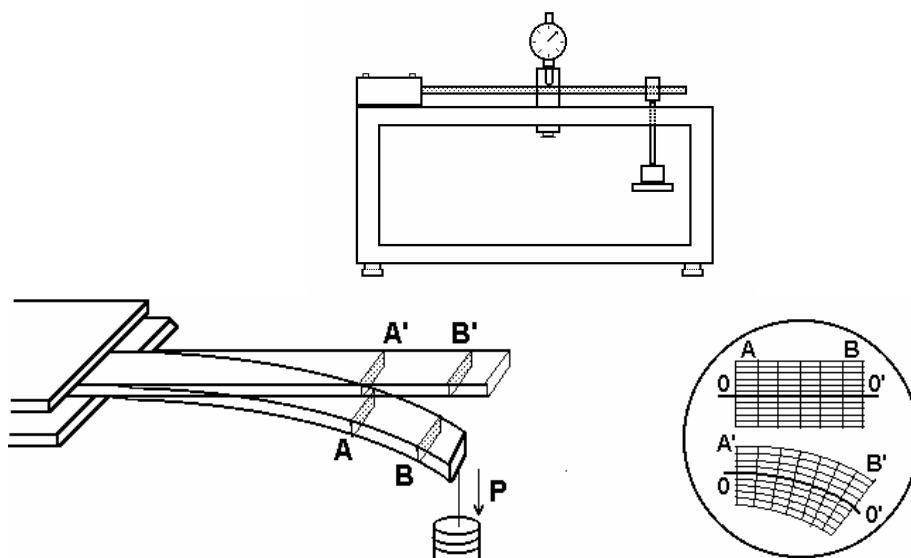


Рис. 8.3

VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Завдання 1. Визначення модуля Юнга із розтягу дротини.

1. Промінь світла від освітлювача направляють на дзеркальце так, щоб відбитий від нього промінь дав на шкалі різкий зайчик.

2. Знявши всі важки (крім так званих постійних, які завжди повинні діяти на дріт, щоб він був випрямлений) з платформи 12 (рис.8.2) і переклавши їх на платформу 4, вимірюють міліметровою лінійкою довжину дроту ℓ з точністю до 0,5 см. Визначають відстань D від шкали до дзеркальця (з точністю до 0,5 см. Довжина важеля b дається як постійна прилада). Записують нульову поділку шкали n_1 , на якій зупинився світловий зайчик.

3. Вимірюють діаметр дротини d мікрометром. Вимірювання проводять у різних місцях дротини. Всього необхідно зробити 5 вимірювань.

4. Послідовно навантажуючи дротину важками один за другим (на кожному з них вказана його маса) роблять відлік поділок шкали. Так роблять для всіх важків, знімаючи їх з платформи 4.

5. Результати вимірювань за пунктами 2-4 заносять в таблицю.

4. Будують графік залежності видовження дротини від величини навантаження і переконуються, що має місце лінійна залежність (виконується закон Гука). Для цього по осі ординат відкладають у відповідному масштабі різницю поділок Δn , по осі абсцис - величину маси тягаря m , яка викликала переміщення зайчика з поділки n_1 на поділку n_2 .

7. Обчислюють результати вимірювань:

а) знаходять середнє значення діаметра дротини d і похибки Δd ;

б) за формулою (8.10) для всіх навантажень вираховують модуль Юнга (E виражається в Н/м²);

УВАГА. Різниця Δn у формулі (8.10) повинна бути виражена у метрах.

в) вважаючи, що значення модуля Юнга E_i одержані для різних навантажень, підлягають нормальному розподілу випадкових величин, вираховують середнє значення E та границю надійного інтервалу (похибку результату вимірювання) ΔE для коефіцієнта надійності $\alpha = 0,95$ за схемою № 1 (методом приведення).

Завдання 2. Визначення модуля Юнга за прогином стержня.

1. Пересувають обойму з шалькою (без важків) на вільний кінець стержня. Встановлюють мікрометр так, щоб його вимірний стержень торкався середини обойми. Опускаючи, або піднімаючи мікрометр добиваються, щоб стрілка малої шкали, яка відраховує одиниці міліметра, встановилась на нуль основної шкали мікрометра напроти великої стрілки.

2. Масштабною лінійкою вимірюють віддаль ℓ від місця закріплення стержня до середини обойми.

3. Мікрометром вимірюють в п'яти місцях стержня його ширину a і висоту c .

4. Послідовно навантажуючи шальку важками (на кожному з них вказана його маса), роблять відлік по шкалі мікрометра (спочатку одиниць міліметра, потім десятих і сотих долей міліметра). Різниця між попередніми показами мікрометра і одержаними дає стрілу прогину стержня h . Так роблять для всіх важків.

5. Пересувають обойму з шалькою на середину стержня. Встановлюють мікрометр згідно п.1 даного завдання. Повторюють виміри h і ℓ згідно п.2 і 4.

6. Будують графік залежності стріли прогину стержня від величини навантаження.

7. Результати вимірювань обробляють за схемою № 1, як це вказано в завданні № 1.

8. Кінцевий результат представляють у вигляді $E = \bar{E} \pm \Delta E$.

9. Роблять короткі висновки.

VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулювати закон Гука. Що таке відносна деформація?
2. Пояснити фізичний зміст модуля Юнга та модуля зсуву.
3. Намалювати схематично графік залежності механічної напруги в твердоту тілі від деформації тіла.
4. Які види деформацій ви знаєте?
5. Яка деформація твердого тіла не приводить до зміни об'єму?
6. Який фізичний зміст коефіцієнта Пуассона? Чи може пружна деформація розтягу приводити до збільшення (зменшення) об'єму твердого тіла?
7. Як можна представити деформацію прогину?
8. Від чого залежить міцність твердих тіл?
9. Чому теоретична міцність кристалів на порядки більша за реальну?
10. Які точкові дефекти можливі в кристалах.
11. Запишіть робочу формулу для визначення похибки модуля Юнга при непрямих вимірюваннях.

РУХ ТІЛ ПРИ НАЯВНОСТІ АЕРОДИНАМІЧНИХ СИЛ ОПОРУ

I. МЕТА РОБОТИ: вивчення руху тіл при наявності лобового опору; експериментальне визначення коефіцієнта моменту сили лобового опору пластинки та максимального значення моменту цієї сили.

II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ: установка, секундомір, міліметровий папір.

III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ, знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

1. Шість рівнянь руху твердого тіла (для поступального і обертового руху).
2. Плоский рух. Два рівняння плоского руху твердого тіла: рівняння руху центру мас і рівняння моментів.
3. Зв'язок між кутковими і лінійними характеристиками обертового руху. Таблиця аналогій.
4. Лобовий опір тіл у потоці газу або рідини.
5. Число Рейнольдса. Принцип подібності.
6. Обтікання тіл. Підіймальна сила. Ефект Магнуса.

IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

При русі тіл у повітрі і у рідині на них діє сила опору. Складова сили опору вздовж напрямку потоку називається лобовим опором і задається формулою

$$F_{\text{опор}} = \Psi \frac{\rho v^2}{2} S \quad (9.1)$$

де Ψ – безрозмірний коефіцієнт лобового опору, S - площа перерізу тіла, v – швидкість потоку, ρ – густина. При великих швидкостях $F_{\text{опору}} \sim v^2$ і Ψ від швидкості не залежить. При малих швидкостях сила опору, як і сила “рідкого” тертя, пропорційна швидкості ($F_{\text{опору}} \sim v$), тоді $\Psi = b/v$ (тут коефіцієнт пропорційності b має розмірність швидкості). При малих швидкостях потоку має місце ламінарна течія. При ламінарній течії вектор швидкості у довільній точці трубки не має складових у напрямку, перпендикулярному до осі трубки. Трубною течією називається циліндрична поверхня, утворена лініями течії як твірними. Лінії течії - це траєкторії рухомих частинок рідини чи газу. Відомо, що для ламінарної течії коефіцієнт опору Ψ зв'язаний з числом Рейнольдса R_e співвідношенням:

$$\Psi = \frac{16}{R_e}, \quad \text{де} \quad R_e = \frac{\rho r v}{\eta}, \quad (9.2)$$

ρ – густина рідини або газу, r – радіус трубки, по якій тече рідина або газ, або певний розмір тіла, що оминається потоком, v – швидкість потоку, η – коефіцієнт в'язкості рідини чи газу. З формули (6.2) видно, що $\Psi \sim 1/v$.

При обертвовому русі, як відомо, лінійним характеристикам руху (переміщенню, швидкості, прискоренню) зіставляють кутові характеристики, масі зіставляється момент інерції, силі – момент сили. Продовжуючи аналогії, можна вважати, що так як сила лобового опору при малих швидкостях пропорційна швидкості, то момент цієї сили пропорційний кутовій швидкості:

$$M_{\text{лоб.опору}} = C\omega. \quad (9.3)$$

V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Схема установки для дослідження лобового опору приведена на рис.9.1. На горизонтальній осі може обертатися стержень 1 з закріпленими на ньому пластинкою 2 і регулюючими циліндриками 3.

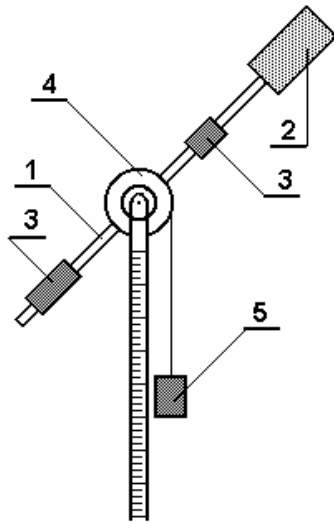


Рис.9. 1

За допомогою циліндриків 3 стержень врівноважується на осі. На тій же осі закріплено шків (диск) 4, на який намотана нитка, до вільного кінця якої підвішений важок 5. Падаючи, важок обертає шків і стержень з пластинкою. Крім диска 4, на осі закріплений також другий диск (на малюнку не показаний), радіус якого менший за радіус першого. Це дозволяє міняти швидкість обертання пластинки, користуючись лише одним важком.

Повертаючи стержень 1 навколо його повздовжньої осі, пластинка 2 може бути встановлена і закріплена так, що вектор лінійної швидкості її точок при русі пластинки під дією важка 5 буде нормальний або паралельний до площини пластини. В першому випадку лобовий опір буде великий, а в другому положенні він значно менший. Нехтуючи силами тертя у підшипниках, силами тертя важка і стержня об повітря, рівняння руху системи можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} ma &= mg - F_{\text{н}}, \\ J \frac{d\omega}{dt} &= F_{\text{н}} r - C\omega \\ a &= \frac{d\omega}{dt} r \end{aligned} \quad (9.4)$$

де m – маса важка, J – момент інерції стержня з закріпленими на ньому циліндриками і пластинкою, F_n – сила натягу нитки, r – радіус диска 4, a – прискорення, з яким падає важок 5, g – прискорення сили тяжіння, $\frac{d\omega}{dt}$ – кутове прискорення, ω – кутова швидкість, C – коефіцієнт моменту сили лобового опору пластинки.

З рівняння (9.4) для кутового прискорення одержуємо:

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon_0 - B\omega, \quad (9.5)$$

де

$$\varepsilon_0 = \frac{mgr}{mr^2 + J}, \quad B = \frac{C}{mr^2 + J}. \quad (9.6)$$

З рівняння (9.5) слідує, що прискорення (як кутове, так і важка 5) залежить від швидкості. Якщо поверхня пластинки паралельна площині обертання, то припускаючи $C=0$, із рівнянь (9.6) і (9.5) слідує, що обертання пластинки відбувається з постійним кутовим прискоренням

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon_0 = \text{const.} \quad (9.7)$$

Знаючи віддаль h_0 , яку проходить важок 5 за час t_0 , можна вирахувати кутове прискорення

$$\varepsilon_0 = \frac{2h_0}{rt_0^2}. \quad (9.8)$$

У загальному випадку (тобто коли $C \neq 0$) кутова швидкість системи з часом збільшується, наближаючись до деякої найбільшої, постійної в часі величини ω_{max} . Величина цієї швидкості може бути одержана із умови, що при досягненні цієї швидкості кутове прискорення стане рівне нулю. Тоді з рівняння (6.5) маємо:

$$\omega_{\text{max}} = \frac{\varepsilon_0}{B}. \quad (9.9)$$

Максимальна швидкість, з якою опускається важок 5, буде рівна

$$v_{\text{max}} = \omega \cdot r = \frac{\varepsilon_0}{B} r \quad (9.10)$$

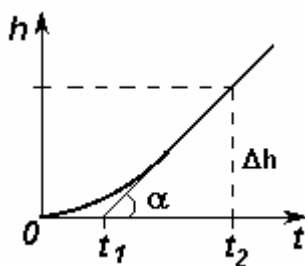


Рис. 9.2

Припустимо, що експериментально одержана залежність віддалі h , яку проходить важок, від часу t має вигляд, представлений на рис. 9.2. Тангенс кута нахилу $h(t)$ лінійної ділянки кривої дає приблизне значення максимальної швидкості опускання важка

$$v_{\max} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta h}{t_2 - t_1}. \quad (9.11)$$

Згідно графіка $h_2 - h_1 = \Delta h = h$. Із рівняння (9.11) та (9.10) визначимо

$$B = r \frac{\varepsilon_0}{v_{\max}} = r \frac{\varepsilon_0}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{r \varepsilon_0 (t_2 - t_1)}{h}. \quad (9.12)$$

Коефіцієнт опору C тоді записується (див. 9.6)

$$C = B(mr^2 + J) = r \frac{\varepsilon_0}{v_{\max}} (mr^2 + J). \quad (9.13)$$

Використовуючи формулу (9.6) для ε_0 , формулу (9.13) перепишемо так:

$$C = \frac{mgr^2}{v_{\max}}. \quad (9.14)$$

Формула (9.14) – кінцева робоча формула. Крім коефіцієнта моменту лобового опору C , в роботі обчислюється кутове прискорення ε_0 для початкового руху пластини за формулою (9.8), максимальний момент сили лобового опору $M_{\max} = C\omega_{\max}$ та момент інерції J за формулою:

$$J = \frac{mgr - \varepsilon_0 mr^2}{\varepsilon_0}. \quad (9.15)$$

VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Встановлюють пластинку 2 (див. рис.9.1) так, щоб її лобовий опір був максимальним. Перевіряють, чи зрівноважений стержень на осі обертання. Старанно, виток до витка, намотують нитку на диск малого радіуса r_1 . Нижня частина важка 5 повинна бути на одному рівні з нульовою поділкою шкали на штативі.

2. За допомогою секундоміра визначають час t опускання важка з висоти h . Для кожної висоти h вимірювання проводяться 5 разів.

3. Пластинку встановлюють так, щоб її лобовий опір був мінімальним. Аналогічно, як в п.2 вимірюють час t_0 , протягом якого важок проходить задані відстані h_0 (для кожної висоти вимірювання повторюються 5 разів).

4. Всі вказані в п.2 і п.3 виміри повторюють, намотуючи нитку на диск великого радіуса r_2 .

5. Результати вимірювань за п.2-4 заносять у таблицю.

6. На міліметровому папері, в одному масштабі будують графіки кривих $h=f(t)$, відкладаючи по осі абсцис час t , а по осі ординат - віддаль h (t – середній час проходження даної висоти). Графіки будують для випадку максимального лобового опору як при розкручуванні диска великого

радіуса так і при опусканні важка з малого диска. На графіках проставляють довірчі інтервали Δt (схема №1).

7. Обчислюють параметри рівнянь (9.4):

а) перевіряють наскільки мінімальний лобовий опір близький до нуля (тобто умову виконання формул (9.7) і (9.8)). Для цього будують графік залежності h_0 від t_0 – це має бути квадратична залежність, а також за тими ж даними будують графік в координатах $\sqrt{h_0}$ від t_0 – це має бути лінійна залежність. Графіки будують для обох дисків з відповідними похибками Δh і Δt визначення висоти і часу (“вусами”). Роблять висновки про можливість використання всіх або лише частини даних в подальших обчисленнях.

б) використовуючи значення h_0 і середнє t_0 (п’яти або більше вимірювань), за формулою (6.8) обчислюють для кожної висоти h_{0i} величину ϵ_0 (кутове прискорення). Набір $\epsilon_{01}, \epsilon_{02}, \dots$, одержаних для різних висот h_{01}, h_{02}, \dots , використовують, як прямі вимірювання для знаходження кінцевого значення ϵ_0 і його довірчого інтервалу $\Delta\epsilon_0$ за схемою №1 обробки результатів прямих вимірювань;

в) із графіка $h = f(t)$ визначають $v_{\max} = \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 9.2 і формула 9.11); знаходять значення B .

8. За формулами (9.14) і (9.15) обчислюють C та J .

9. Знаходять максимальну кутову швидкість ω_{\max} (для обох радіусів шківів) та обчислюють момент сили лобового опору.

УВАГА. Величини $\bar{\epsilon}_0, v_{\max}, C, J, M_{\max}$ вираховують для обох випадків, а саме: при опусканні важка з диска малого радіуса r_1 і при опусканні важка з диска радіуса r_2 . Одержані моменти інерції J_1 та J_2 повинні бути (у межах похибки) рівними.

10. Результати обчислень заносять у раціонально вибрану таблицю.

11. Оцінюють похибки.

12. Записати кінцеві результати і зробити висновки.

VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке лобовий опір? Чи залежить він від швидкості тіла? Запишіть формулу і поясніть її.
2. Які сили та моменти сил діють при роботі дослідної установки?
3. Як зв’язані між собою лінійні і кутові характеристики руху?
4. Який фізичний зміст має величина ϵ_0 в рівнянні (9.6) ?
5. Запишіть формулу, за якою в даній роботі визначається кутове прискорення. Чи залежить воно від радіуса диска? Чому?
6. Яка розмірність коефіцієнта C в рівнянні (9.5)?

7. Поясніть ефект Магнуса.
8. Чи залежить значення лобового опору від форми тіла?
9. Вказати формулу для обчислення лобового опору:
 а) $F = J\varepsilon C_x$; б) $F = C_x \rho v S$; в) $F = C_x m v^2 S$; г) $F = C_x \rho v^2 S$.
 Яка із величин в цій формулі характеризує форму тіла?
10. Яке із тіл – площина, циліндр, куля, тіло у формі краплі – має найменший лобовий опір при однаковому поперечному перерізі? Чому?
10. Яку силу називають підіймальною? Поясніть як вона виникає.
11. Число Рейнольдса рівне:
 а) $R_e = \frac{vl\rho}{\eta}$; б) $R_e = \frac{vS\rho}{\eta}$; в) $R_e = \frac{vl\eta}{\rho}$; г) $R_e = \frac{vS\eta}{\rho}$;
 ρ і η - відповідно густина і в'язкість газу або рідини, l – характерний розмір тіла. Який фізичний зміст числа R_e .
12. Поясніть суть закону механічної подібності при обтіканні тіл.
13. Що називають ламінарною (турбулентною) течією?

ОСНОВНА НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. – М., 1989. – 576 с.
2. Берча Д.М., Ковач Є.Т., Хархалис М.Р. Фізичний практикум із механіки. Методичні вказівки. – Ужгород, 1993. – 206 с.
3. Попик Ю.В., Туряница И.Д., Бенца В.М. Обработка результатов измерений с применением программируемых калькуляторов. - Ужгород, 1986. – 165 с.
Жихарев В.М., Попик Ю.В. Методичні вказівки до розв'язку задач з курсу “Основи метрології”. – Ужгород, 1998. – 76 с.
4. Физический практикум. Механика и молекулярная физика. Под ред. В.И.Ивероновой. – М.: “Наука”, 1967. – 352 с.
5. Фізичний практикум. Ч.1. Під ред.В.П.Дущенко. – Київ: “Вища школа”, 1981. – 248 с.
6. Матвеев О.М. Механіка і теорія відносності. – Київ: “Вища школа”, 1993. – 288 с.
7. Стрелков С.П. Механика. – М.: “Наука”, 1975. – 560 с.
8. Різак В.М., Жихарев В.М., Ковач Є.Т., Семак Д.Г., Горват А.А. Механіка, молекулярна фізика і термодинаміка. Фізичний практикум: Навчальний посібник. – Ужгогод, УжНУ, 2002. – 136 с.
9. Дущенко В.П., Кучерук І.М. Загальна фізика. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка. – Київ: “Вища школа”, 1987. – 432 с.
10. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – Київ: Техніка, 2006. – 532 с.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

2. Фейман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Феймановские лекции по физике, т.1,2. – М.: Мир, 1976.
3. Бабаджан Е.И. и др. Сборник вопросов и качественных задач по общей физике. – М.: Наука, 1990. – 400 с.
4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1969. – 464 с.
5. Методика решения задач механики. Под ред. А.Н.Матвеева. – М.: Изд. МГУ, 1980.
6. Загусша Г.А. и др. Сборник задач по курсу общей физики / Под ред. М.С. Цедрика – М.: Просвещение, 1989. – 271 с.
7. Бурсиан Є.В. Задачи по физике для компьютера. – М.: Просвещение, 1991. – 256 с.
8. Холидей Д., Резник Р. Вопросы и задачи по физике. Пер. с англ. – М.: Просвещение, 1969. – 239 с.
10. Алексеев В.Ф. и др. Лабораторный практикум по физике / Под ред. Бередкова К.А. и Уханова Ю.И. – М.: Высшая школа, 1988. – 351 с.

ДОДАТКИ

Таблиця 1.

Коефіцієнти Стюдента $t_{n\alpha}$
(n – число вимірювань, P – довірча імовірність)

n	P=0,90	P=0,95	P=0,98	P=0,99	n	P=0,90	P=0,95	P=0,98	P=0,99
3	2,920	4,303	6,965	9,920	19	1,734	2,101	2,552	2,878
4	2,353	3,182	4,541	5,841	21	1,725	2,086	2,528	2,845
5	2,132	2,776	3,747	4,604	23	1,717	2,074	2,508	2,819
6	2,015	2,571	3,365	4,032	25	1,711	2,064	2,492	2,797
7	1,943	2,447	3,143	3,707	27	1,706	2,056	2,479	2,779
8	1,895	2,365	2,998	3,499	29	1,701	2,048	2,467	2,763
9	1,860	2,306	2,896	3,355	31	1,697	2,043	2,457	2,750
10	1,833	2,262	2,821	3,250	40	1,680	2,020		2,700
11	1,812	2,228	2,764	3,169	60	1,670	2,000		2,660
13	1,782	2,179	2,681	3,055	80	1,665	1,990		2,640
15	1,761	2,145	2,624	2,977	120	1,660	1,980		2,620
17	1,746	2,120	2,583	2,921	∞	1,645	1,960	2,326	2,576

Таблиця 2.

Густина імовірності нормованого розподілу $f(z) = (1 / \sqrt{2\pi}) e^{-z^2/2}$

z	f (z)	z	f (z)	z	f (z)	z	f (z)
0,0	0,3989	1,0	0,2420	2,0	0,0540	3,0	0,0044
0,1	0,3970	1,1	0,2179	2,1	0,0440	3,1	0,0033
0,2	0,3910	1,2	0,1942	2,2	0,0355	3,2	0,0024
0,3	0,3814	1,3	0,1714	2,3	0,0283	3,3	0,0017
0,4	0,3683	1,4	0,1497	2,4	0,0224	3,4	0,0012
0,5	0,3521	1,5	0,1295	2,5	0,0175	3,5	0,0009
0,6	0,3332	1,6	0,1109	2,6	0,0136	3,6	0,0006
0,7	0,3123	1,7	0,0940	2,7	0,0104	3,7	0,0004
0,8	0,2897	1,8	0,0790	2,8	0,0079	3,8	0,0003
0,9	0,2661	1,9	0,0656	2,9	0,0060	3,9	0,0002

Таблиця 3.

Значення коефіцієнта K в залежності від довірчої імовірності P і відношення $\theta/S(X)$ - середньоквадратичних відхилень систематичної θ і випадкової $S(X)$ складових сумарної похибки $\Delta(X) = K(\Delta_{\text{сист}} + \Delta_{\text{вип.}})$

$\theta/S(X)$	0,75	0,80	1	2	3	4	5	6	7	8
$P=0,95$	0,77	0,76	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,85
$P=0,99$	0,85	0,84	0,82	0,80	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84	0,85

Таблиця 4.

Значення нормованої функції Лапласа

$$F(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^Z e^{-z^2/2} dz ; \quad P = p(x_0 < x \leq x_0 + Z\sigma) = 2F(Z) = \alpha$$

Z	F(Z)	Z	F(Z)	Z	F(Z)	Z	F(Z)	Z	F(Z)
0,0	0,00000	0,9	0,31594	1,8	0,46407	2,7	0,49653	3,6	0,49984
0,1	0,03983	1,0	0,34134	1,9	0,47128	2,8	0,49744	3,7	0,49989
0,2	0,07926	1,1	0,36433	2,0	0,47725	2,9	0,49813	3,8	0,49993
0,3	0,11791	1,2	0,38493	2,1	0,48214	3,0	0,49865	3,9	0,49995
0,4	0,15542	1,3	0,40320	2,2	0,48610	3,1	0,49903	4,0	0,49997
0,5	0,19146	1,4	0,41924	2,3	0,48928	3,2	0,49931	4,5	0,49999
0,6	0,22575	1,5	0,43319	2,4	0,49180	3,3	0,49952		
0,7	0,25804	1,6	0,44520	2,5	0,49379	3,4	0,49966		
0,8	0,28814	1,7	0,45543	2,6	0,49534	3,5	0,49977		

Таблиця 5.

Пружні константи. Межа міцності.

Матеріал	Модуль Юнга E, ГПа	Модуль зсуву G, ГПа	Коефіцієнт Пуассона μ	Межа міцності на розрив σ_{μ}	Стисненність β , ГПа ⁻¹
Алюміній	70	26	0,34	0,10	0,014
Мідь	130	40	0,34	0,30	0,007
Свинець	16	5,6	0,44	0,015	0,022
Сталь	200	81	0,29	0,60	0,006
Скло	60	30	0,25	0,05	0,025
Вода	-	-	-	-	0,49

Примітка. Стисненність $\beta = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial p}$

З М І С Т

стор

Вступ.....	1
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК.....	4
Лабораторна робота №1. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН	19
Лабораторна робота №2. ВИМІРЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ РОЗМІРІВ І ВИЗНАЧЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТВЕРДИХ ТІЛ	26
Лабораторна робота №3. ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ ПРЯМОЛІНІЙНОГО РУХУ НА МАШИНІ АТВУДА.....	31
Лабораторна робота №4. ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ СИЛИ ЗЕМНОГО ТЯЖІННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА.	38
Лабораторна робота №5. ВИВЧЕННЯ КОЛИВАНЬ ЗВ'ЯЗАНИХ СИСТЕМ	47
Лабораторна робота №6. ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ ЦИЛІНДРІВ ТА ПЕРЕВІРКА ТЕОРЕМИ ГЮЙГЕНСА-ШТЕЙНЕРА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ.....	54
Лабораторна робота №7. ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА СИЛИ СУХОГО ТЕРТЯ (ТЕРТЯ КОЧЕННЯ).....	59
Лабораторна робота №8. ВИЗНАЧЕННЯ МОДУЛЯ ЮНГА ЗА РОЗТЯГОМ ДРОТИНИ ТА ПРОГИНОМ СТЕРЖНЯ.....	67
Лабораторна робота №9. РУХ ТІЛ ПРИ НАЯВНОСТІ АЕРОДИНАМІЧНИХ СИЛ ОПОРУ	73
ОСНОВНА НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА.....	79
ДОДАТКИ.....	81