

**ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра теорії ймовірностей і математичного аналізу**



**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ**

Рівень вищої освіти	перший (бакалаврський)
Галузь знань	11 Математика та статистика
Спеціальність	111 Математика
Освітня програма	Комп'ютерна та бізнес математика
Статус дисципліни	обов'язкова
Мова навчання	українська

Робоча програма навчальної дисципліни «**Функціональний аналіз**» для студентів галузі знань **11 Математика та статистика** спеціальності **111 Математика** освітньої програми «**Комп'ютерна та бізнес математика**».

Розробник: Олександр ПОГОРІЛЯК, к. ф.-м. н., доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу

Робочу програму розглянуто та затверджено на засіданні кафедри **теорії ймовірностей і математичного аналізу**

Протокол № 10 від 3 червня 2025 року

Завідувач кафедри  Ганна СЛИВКА-ТИЛИЦАК

Схвалено науково-методичною комісією **факультету математики та цифрових технологій**
протокол № 10 від 26 червня 2025 р.

Голова науково-методичної комісії  Наталя ЮРЧЕНКО

1. ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Найменування показників	Розподіл годин за навчальним планом
Кількість кредитів ЄКТС – 3	Рік підготовки:
Загальна кількість годин – 90	2-й
Кількість модулів – 2	Семестр:
Тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 4 самостійної роботи студента – 4	3-й
	Лекції:
	34
	Практичні (семінарські):
	26
Вид підсумкового контролю: екзамен.	Лабораторні:
	Не передбачено
Форма підсумкового контролю: усна	Самостійна робота:
	60

2. МЕТА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Метою викладання курсу є вивчення множин на рівні алгебраїчних і топологічних структур. Переосмислення і узагальнення понять математичного аналізу, алгебри, геометрії як складових (базових) понять нової більш узагальненої математичної дисципліни.

Завданням викладання курсу є навчити застосовувати методи функціонального аналізу в задачах, що виникають в різних розділах прикладної математики, зокрема в теорії випадкових процесів, теорії ймовірностей і математичній статистиці, прикладній фізиці, економіці тощо.

Відповідно до освітньої програми, вивчення дисципліни для здобувачів вищої освіти галузі знань **11 Математика та статистика** спеціальності **111 Математика** освітньої програми «Комп'ютерна та бізнес математика» сприяє формуванню у здобувачів вищої освіти таких компетентностей:

Загальні компетентності:

- ЗК-1. Здатність до абстрактного мислення, аналізу і синтезу;
 ЗК-2. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.
 ЗК-3. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

Спеціальні компетентності:

СК-1. Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання;

СК-2. Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі;

СК-3. Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок;

СК-4. Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих;

СК-5. Здатність до кількісного мислення.

3. ПЕРЕДУМОВИ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Передумовами вивчення навчальної дисципліни «Функціональний аналіз» є опанування таких навчальних дисциплін освітньої програми:

1. математичний аналіз;
2. алгебра.

4. ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

Відповідно до освітньої програми «Комп'ютерна та бізнес математика», вивчення навчальної дисципліни повинно забезпечити досягнення здобувачами вищої освіти таких програмних результатів навчання:

Програмні результати навчання	Шифр ПРН
Знати принципи <i>modus ponens</i> (правило виведення логічних висловлювань) та <i>modus tollens</i> (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень;	РН 3
Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми;	РН 4
Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем;	РН 16
Розв'язувати типові задачі математичного аналізу, алгебри, диференціальних та інтегральних рівнянь, оптимізації за допомогою чисельних методів;	РН 21

Очікувані результати навчання, які повинні бути досягнуті після опанування навчальної дисципліни «Функціональний аналіз»:

Очікувані результати навчання з дисципліни	Шифр ПРН
Знати принципи <i>modus ponens</i> (правило виведення логічних висловлювань) та <i>modus tollens</i> (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень;	РН 3
Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми;	РН 4
Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем;	РН 16
Розв'язувати типові задачі математичного аналізу, алгебри, диференціальних	РН 21

5. ЗАСОБИ ДІАГНОСТИКИ ТА КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

Засоби оцінювання та методи демонстрування результатів навчання

Засобами оцінювання та методами демонстрування результатів навчання з навчальної дисципліни «Математичний аналіз» є:

- розв’язування задач під час практичних занять;
- виконання індивідуальних завдань;
- модульні контрольні роботи;
- підсумковий семестровий екзамен.

Форми (методи) контролю та критерії оцінювання результатів навчання

Форми поточного контролю: написання студентами індивідуальних домашніх завдань.

Форма модульного контролю: письмова.

Форма підсумкового семестрового контролю: екзамен.

Семестр III

Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти (змістовий модуль 1)

Поточне оцінювання та самостійна робота									Модульна контрольна робота	Сума
T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	50	100
5	5	5	5	5	5	6	6	8		

T1, T2 ... – теми

Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти (змістовий модуль 2)

Поточне оцінювання та самостійна робота								Модульна контрольна робота	Сума
T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	50	100
6	6	6	6	6	6	7	7		

T1, T2 ... – теми

Критерії оцінювання модульної контрольної роботи

Методика оцінювання. Матеріал кожного модуля, який здобувачі вищої освіти повинні засвоїти протягом семестру, виноситься на одну з двох модульних контрольних робіт, що проводяться в кожному семестрі.

Модульна контрольна робота може виконуватись в два етапи: перший – теоретичний матеріал (письмово); другий – практичні завдання. Сумарна максимальна кількість балів, що виставляється здобувачу вищої освіти за виконання всіх завдань однієї контрольної роботи залежить від складності матеріалу, який виноситься на модульний контроль.

За виконання завдань самостійної роботи, що стосуються даних модулів здобувачу вищої освіти нараховується різна кількість балів, в залежності від складності матеріалу.

Критерієм успішного проходження здобувачем освіти поточного оцінювання є досягнення здобувачем освіти не менше 50% балів від загальної кількості запланованої за конкретною темою. Конкретна максимальна кількість балів подається у таблицях розподілу балів, які отримують здобувачі за модуль та за окремі види навчальної роботи.

Невиконані практичні завдання, а також неявка на модульну контрольну роботу оцінюються в 0 балів незалежно від причини невиконання (неявки).

Сумарна оцінка (від 0 до 100 балів) виставляється у відомість модульного контролю. Модуль зараховується, якщо сумарний бал складає не менше 60 балів, і зараховано всі види роботи, які є складовими даного модуля.

Здобувач вищої освіти, який не з'явився на модульну контрольну роботу, або ж його модульна оцінка складає від 0 до 34 балів, зобов'язаний скласти (перескласти) модуль до початку підсумкового контролю у строки, визначені викладачем дисципліни та погоджені деканатом факультету.

Критерії оцінювання підсумкового контролю

Залікова методика оцінювання. За результатами модульних контролів визначається підсумкова модульна оцінка. Залікова та екзаменаційна оцінка визначається в залежності від рейтингового балу, або балів за залік та екзамен.

До складання заліку допускаються здобувачі вищої освіти, у яких підсумкова модульна оцінка за семестр становить не менше 35 балів і, яким зараховано всі лабораторні роботи за цей семестр.

Здобувач вищої освіти, підсумкова модульна оцінка якого складає від 0 до 34 балів, зобов'язаний покращити її до початку підсумкового семестрового контролю під час чергування викладачів на кафедрі у строки, визначені викладачем дисципліни та погоджені деканатом факультету. В протилежному випадку, здобувач не допускається до заліку і у нього виникає академічна заборгованість.

Залік з навчальної дисципліни здобувач вищої освіти може не скласти, якщо він успішно пройшов усі модульні контролі та його влаштовує підсумкова модульна оцінка. Здобувачі вищої освіти, підсумкова модульна оцінка яких становить від 35 до 59, залік складають обов'язково. Здобувач освіти може підвищити на заліку рейтинговий бал, при цьому, за результатами складання заліку оцінка не може бути менша за підсумкову модульну оцінку, яку він отримав за результатами модульних контролів у семестрі.

Залік проводиться в усній формі. На залік виносяться практичні та завдання в обсязі навчального матеріалу за 2-й семестр. Оцінювання результатів навчання на заліку здійснюється за 100-бальною шкалою. Оцінка за залік вноситься у відомість обліку успішності.

Таблиця відповідності оцінок за різними шкалами оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену	для заліку
90-100	A	відмінно	зараховано
82-89	B	добре	
74-81	C		
64-73	D		
60-63	E		
35-59	FX	незадовільно з можливістю повторного складання	незараховано з можливістю повторного складання
0-34	F	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	незараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

Критерій оцінювання підсумкового контролю з дисципліни

— «відмінно» (90-100 балів, A) заслуговує студент, який виявив всебічне і глибоке знання програмового матеріалу, вміння вільно виконувати завдання, передбачені програмою, засвоїв

основну і ознайомився з додатковою літературою, розуміє взаємозв'язок головних понять дисципліни та їх значення для майбутньої професії;

— **«добре» (82-89 балів, В)** заслуговує студент, який виявив повне знання програмного матеріалу, успішно виконує передбачені програмою завдання, засвоїв основну літературу рекомендовану програмою, виявив систематичний характер знань з дисциплін і здатний до самостійного доповнення, але під час відповіді допустив деякі неточності;

— **«добре» (74-81 бал, С)** заслуговує студент, що виявив не цілком повне знання програмного матеріалу, не завжди успішно виконує передбачені програмою завдання, частково засвоїв основну літературу, рекомендовану програмою, виявив не систематичний характер знань з дисциплін і не завжди здатний до їх самостійного доповнення і під час відповіді допускає деякі неточності;

— **«задовільно» (64-73 бали, D)** заслуговує студент, що виявив знання основного програмного матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий з основною рекомендованою літературою. Як правило, дана оцінка виставляється студентам, що допустили помилки у відповіді на заліку чи екзамені та при виконанні залікових або екзаменаційних завдань, але які володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача;

— **«задовільно» (60-63 балів, E)** заслуговує студент, що виявив часткове знання основного програмного матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, не завжди вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий лише частково з основною рекомендованою літературою. Як правило, дана оцінка виставляється студентам, що допустили грубі помилки у відповіді на заліку чи екзамені та при виконанні залікових або екзаменаційних завдань, але які частково володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача.

— **«незадовільно» (35-59 балів, FX)** виставляється студенту, який виявив суттєві прогалини в знаннях основного програмного матеріалу, допустив принципові помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

— **«незадовільно» (0-34 балів, F)** виставляється студенту коли протягом семестру він допустив грубі помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

6. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

6.1. Зміст навчальної дисципліни

Семестр III.

Модуль №1.

Змістовий модуль №1. Елементи теорії міри та інтегралу Лебега.

Тема 1. Системи множин. Міра та її властивості.

Тема 2. Вимірні множини. Продовження міри. Властивості мір і вимірних множин.

Тема 3. Монотонні класи множин. Єдиність продовження міри.

Тема 4. Міра Лебега лінійних множин. Міра Лебега на дійсній прямій. Дискретні міри. Міра Лебега-Стілтєса.

Тема 5. Вимірні функції та дії над ними, властивості, критерій вимірності функції.

Тема 6. Інтеграл Лебега та Лебега-Стілтєса, їх обчислення.

Тема 7. Прямий добуток просторів. Теорема Фубіні.

Тема 8. Метричні простори. Збіжність. Сепарабельність. Повнота.

Тема 9. Стискаючі відображення, нерухома точка. Застосування до розв'язання інтегральних рівнянь.

Модуль №2.

Змістовий модуль №2. Теорія просторів та операторів.

- Тема 1.** Топологічні простори. Лінійні топологічні простори.
- Тема 2.** Лінійні нормовані простори, приклади ЛНП, збіжність за нормою, поповнення ЛНП. Лінійні функціонали.
- Тема 3.** Перебгільбертові та гільбертові простори. Ортогональність та ортогональні проєкції в гільбертових просторах.
- Тема 4.** Ортонормовані системи та ортонормовані базиси в гільбертових просторах. Ортогоналізація системи елементів. Приклади банахових та гільбертових просторів.
- Тема 5.** Лінійні неперервні функціонали та спряжені простори.
- Тема 6.** Лінійні неперервні оператори. Простір ЛНО. Добуток операторів. Обернений оператор. Спряжений оператор. Компактні оператори. Спектр і резольвента.
- Тема 7.** Розв'язність рівнянь з компактними операторами.
- Тема 8.** Інтегральні рівняння Фредгольма та Вольтерра та методи їх розв'язання.

6.2. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	у тому числі					
	Усього	лекції	практичні	лабораторні	індивідуальна робота	самостійна робота
Семестр 1						
Модуль 1						
Змістовий модуль 1. Елементи теорії міри та інтегралу Лебега.						
Тема 1. Системи множин. Міра та її властивості.	8	2	2			4
Тема 2. Вимірні множини. Продовження міри. Властивості мір і вимірних множин.	6	2	1			3
Тема 3. Монотонні класи множин. Єдиність продовження міри.	6	2	1			3
Тема 4. Міра Лебега лінійних множин. Міра Лебега на дійсній прямій. Дискретні міри. Міра Лебега-Стілтєса.	8	2	2			4
Тема 5. Вимірні функції та дії над ними, властивості, критерій вимірності функції.	8	2	2			4
Тема 6. Інтеграл Лебега та Лебега-Стілтєса, їх обчислення.	3	2	1			3
Тема 7. Прямий добуток просторів. Теорема Фубіні.	6	2	1			3
Тема 8. Метричні простори. Збіжність. Сепарабельність. Повнота.	8	2	2			4
Тема 9. Стискаючі відображення, нерухома точка. Застосування до розв'язання інтегральних рівнянь.	8	2	2			4
Разом за змістовий модуль 1	64	18	14			32
Усього за модуль 1	64	18	14			32
Модуль 2						
Змістовий модуль 2. Диференціальне числення функції однієї змінної.						
Тема 1. Топологічні простори. Лінійні топологічні простори.	6	2	1			3

Тема 2. Лінійні нормовані простори, приклади ЛНП, збіжність за нормою, поповнення ЛНП. Лінійні функціонали.	10	2	3		5
Тема 3. Перебгільбертові та гільбертові простори. Ортогональність та ортогональні проекції в гільбертових просторах.	6	2	1		3
Тема 4. Ортонормовані системи та ортонормовані базиси в гільбертових просторах. Ортогоналізація системи елементів. Приклади банахових та гільбертових просторів.	6	2	1		3
Тема 5. Лінійні неперервні функціонали та спряжені простори.	6	2	1		3
Тема 6. Лінійні неперервні оператори. Простір ЛНО. Добуток операторів. Обернений оператор. Спряжений оператор. Компактні оператори. Спектр і резольвента.	8	2	2		4
Тема 7. Розв'язність рівнянь з компактними операторами.	8	2	2		4
Тема 8. Інтегральні рівняння Фредгольма та Вольтерра та методи їх розв'язання.	6	2	1		3
Разом за змістовий модуль 2	56	16	12		28
Усього за модуль 2	56	16	12		28
Екзамен		4			
Усього годин	120	34	26		60

6.3. Темі практичних занять Семестр III

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Системи множин. Міра та її властивості.	2
2	Вимірні множини. Продовження міри. Властивості мір і вимірних множин.	1
3	Монотонні класи множин. Єдиність продовження міри.	1
4	Міра Лебега лінійних множин. Міра Лебега на дійсній прямій. Дискретні міри. Міра Лебега-Стілтєса.	2
5	Вимірні функції та дії над ними, властивості, критерій вимірності функції.	2
6	Інтеграли Лебега та Лебега-Стілтєса, їх обчислення.	1
7	добуток просторів. Теорема Фубіні.	1
8	Метричні простори. Збіжність. Сепарабельність. Повнота.	2
9	Стискаючі відображення, нерухома точка. Застосування до розв'язання інтегральних рівнянь.	2
10	Топологічні простори. Лінійні топологічні простори.	2
11	Лінійні нормовані простори, приклади ЛНП, збіжність за нормою, поповнення ЛНП. Лінійні функціонали.	2
12	Перебгільбертові та гільбертові простори. Ортогональність та ортогональні проекції в гільбертових просторах.	2
13	Ортонормовані системи та ортонормовані базиси в гільбертових просторах. Ортогоналізація системи елементів. Приклади банахових та гільбертових просторів.	2
14	Лінійні неперервні функціонали та спряжені простори.	2

15	Лінійні неперервні оператори. Простір ЛНО. Добуток операторів. Обернений оператор. Спряжений оператор. Компактні оператори. Спектр і резольвента.	2
16	Розв'язність рівня з компактними операторами.	2
17	Інтегральні рівняння Фредгольма та Вольтерра та методи їх розв'язання.	2

6.4. Самостійна робота

Системи множин. Міра та її властивості.	4
Вимірні множини. Продовження міри. Властивості мір і вимірних множин.	3
Монотонні класи множин. Єдиність продовження міри.	3
Міра Лебега лінійних множин. Міра Лебега на дійсній прямій. Дискретні міри. Міра Лебега-Стілтєса.	4
Вимірні функції та дії над ними, властивості, критерій вимірності функції.	4
Інтеграл Лебега та Лебега-Стілтєса, їх обчислення.	3
добуток просторів. Теорема Фубіні.	3
Метричні простори. Збіжність. Сепарабельність. Повнота.	4
Стискаючі відображення, нерухома точка. Застосування до розв'язання інтегральних рівнянь.	4
Топологічні простори. Лінійні топологічні простори.	3
Лінійні нормовані простори, приклади ЛНП, збіжність за нормою, поповнення ЛНП. Лінійні функціонали.	5
Перебгільбертові та гільбертові простори. Ортогональність та ортогональні проєкції в гільбертових просторах.	3
Ортонормовані системи та ортонормовані базиси в гільбертових просторах. Ортогоналізація системи елементів. Приклади банахових та гільбертових просторів.	3
Лінійні неперервні функціонали та спряжені простори.	3
Лінійні неперервні оператори. Простір ЛНО. Добуток операторів. Обернений оператор. Спряжений оператор. Компактні оператори. Спектр і резольвента.	4
Розв'язність рівня з компактними операторами.	4
Інтегральні рівняння Фредгольма та Вольтерра та методи їх розв'язання.	3

7. ІНСТРУМЕНТИ, ОБЛАДНАННЯ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ, ВИКОРИСТАННЯ ЯКИХ ПЕРЕДБАЧАЄ НАВЧАЛЬНА ДИСЦИПЛІНА

Технічні засоби – мультимедійний проектор.

Програмне забезпечення – операційна система, пакет Microsoft Office.

8. РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

1. Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функціональний аналіз: переклад з англ. Кудрик Т.С., Скасків О.Б.: за наук. ред. Михайлеця В.А., Скасківа О.Б. – Львів: Чижиков, 2014. – 559с.
2. Боярищева Т.В., Герич М.С., Погоріляк О.О., Синявська О.О., Сливка-Тилищак Г.І., Слюсарчук П.В., Тегза А.М. Теорія міри й інтегралу Лебега. Функціональний аналіз. Навчальний посібник для студентів математичних, фізичних та технічних спеціальностей. Ужгород: Говерла, 2022. – 182 с.