

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1. Нелінійні системи. Системи в симетричній формі

Приклад 1.1. Розв'язати нелінійну систему рівнянь

$$\begin{cases} y' = \frac{z}{x}, \\ z' = \frac{xz - (y - z)^2}{x^2}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Розв'язання. Систему диференціальних рівнянь можна звести шляхом виключення змінних до одного рівняння (іноді до кількох рівнянь із однією невідомою функцією в кожному). Виключимо z із рівнянь (1.1). Із першого рівняння маємо $z = xy'$.

Підстановка у друге рівняння після спрощення дає

$$x^3 y'' = -(y - xy')^2.$$

Таким чином, задана система рівнянь (1.1) зведена до одного рівняння другого порядку відносно невідомої функції $y(x)$. Це рівняння може бути розв'язане шляхом пониження порядку. Після того, як із цього рівняння знайдемо $y(x)$, другу невідому функцію $z(x)$ знаходимо з рівності $z = xy'$.

Зауважимо, що при розв'язуванні системи шляхом виключення змінних зазвичай отримується рівняння вищого порядку, тому в більшості випадків систему доцільніше розв'язувати шляхом відшукування інтегровних комбінацій. Для цього зручніше перейти від системи вигляду (1.1) до відповідної системи в симетричній формі.

Визначивши dx із обох рівнянь системи (1.1) і прирівнявши отримані співвідношення, дістанемо відповідну до (1.1) систему в симетричній формі

$$\frac{dx}{1} = \frac{xdy}{z} = \frac{x^2 dz}{xz - (y - z)^2}. \quad (1.2)$$

Для розв'язання цієї системи, а отже, і системи (1.1), треба побудувати дві лінійно незалежні інтегровні комбінації. Першу з них знаходимо, скориставшись правилом рівності дробів:

$$\frac{dx}{1} = \frac{x^2 dy}{xz} = \frac{x^2 dz}{xz - (y - z)^2} = \frac{x^2 d(y - z)}{(y - z)^2},$$

звідси перша інтегровна комбінація

$$dx = \frac{x^2 d(y - z)}{(y - z)^2}. \quad (1.3)$$

Відокремивши змінні в (1.3), після інтегрування отримуємо:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{d(y - z)}{(y - z)^2} \Rightarrow -\frac{1}{x} = -\frac{1}{y - z} + C_1,$$

тобто перший «перший інтеграл» системи (1.2) має вигляд

$$\frac{1}{y-z} - \frac{1}{x} = C_1, \quad (1.4)$$

де C_1 – довільна стала.

Рівність (1.4) дає змогу спростити відшукання другої інтегрованої комбінації. Дійсно, із (1.4) маємо:

$$y - z = \frac{x}{C_1 x + 1}. \quad (1.5)$$

Підставивши значення $y - z$ із (1.5) у друге з рівнянь системи (1.1), дістанемо:

$$z' = \frac{xz(C_1 x + 1)^2 - x^2}{x^2(C_1 x + 1)^2} \Rightarrow z' - \frac{z}{x} = -\frac{1}{(C_1 x + 1)^2}.$$

Одержане рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку відносно функції $z(x)$. Інтегруємо його за відомою формулою загального розв'язку:

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{dx}{x}} \left(C_2 - \int e^{-\int \frac{dx}{x}} \frac{dx}{(C_1 x + 1)^2} \right) = x \left(C_2 - \int \frac{dx}{x(C_1 x + 1)^2} \right) = \\ &= x \left(C_2 - \ln |x| + \ln |C_1 x + 1| - \frac{1}{C_1 x + 1} \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

де C_2 – довільна стала. Ця рівність дає другий «перший інтеграл», очевидно незалежний відносно першого, і дозволяє визначити y як функцію змінної x із (1.5):

$$y = z + \frac{x}{C_1 x + 1} = x(C_2 - \ln |x| + \ln |C_1 x + 1|).$$

Відповідь. $y = x(C_2 - \ln |x| + \ln |C_1 x + 1|),$

$$z = x \left(C_2 - \ln |x| + \ln |C_1 x + 1| - \frac{1}{C_1 x + 1} \right).$$

Приклад 1.2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь, задану в симетричній формі:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}. \quad (1.7)$$

Розв'язання. Перші два дроби утворюють інтегровану комбінацію

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

із якої після інтегрування отримуємо перший «перший інтеграл»

$$\frac{x}{y} = C_1. \quad (1.8)$$

Щоб знайти другу інтегровану комбінацію, скористаємося правилом рівності дробів. Із (1.7) маємо

$$\frac{ydx + xdy}{y \cdot xz + x \cdot yz} = \frac{dz}{-xy} \Rightarrow \frac{d(xy)}{2xyz} = \frac{dz}{-xy} \Rightarrow d(xy) = -2zdz.$$

Таким чином, другий «перший інтеграл» має вигляд

$$xy + z^2 = C_2. \quad (1.9)$$

Очевидно, що «перші інтеграли» (1.8) та (1.9) є незалежними. Їх сукупність дає загальний розв'язок системи (1.7) у неявному вигляді.

Зауваження. Для відшукування другої інтегрованої комбінації можна також аналогічно до Прикладу 1.1 скористатися відомим «першим інтегралом» (1.8), який дає змогу виключити з системи (1.7) одне з невідомих, наприклад, x . Справді, із (1.8) маємо $x = C_1 y$. Підстановка у друге з рівнянь (1.7) дає

$$\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-C_1 y^2} \Rightarrow -C_1 y dy = z dz \Rightarrow z^2 = -C_1 y^2 + C_2.$$

Підставивши в останню рівність значення C_1 із (1.8), отримаємо той же «перший інтеграл» (1.9).

Визначивши з (1.8) та (1.9) y і z як функції змінної x , за потреби можна дістати загальний розв'язок системи (1.7) у явному вигляді.

Відповідь. $\frac{x}{y} = C_1, xy + z^2 = C_2.$

Приклад 1.3. Знайти загальний розв'язок нелінійної системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x^2 - t}{y}, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (1.10)$$

Розв'язання. Визначивши dt із обох рівнянь системи (1.10) і прирівнявши отримані співвідношення, перейдемо до відповідної системи в симетричній формі

$$\frac{dt}{1} = \frac{y dx}{x^2 - t} = \frac{dy}{-x}. \quad (1.11)$$

Для розв'язання цієї системи, а отже, і системи (1.10), треба побудувати дві лінійно незалежні інтегровані комбінації. Першу з них знаходимо, скориставшись правилом рівності дробів:

$$\frac{dt}{1} = \frac{y dx + x dy}{-t} \Rightarrow d(xy) = -t dt,$$

звідки після інтегрування отримуємо перший «перший інтеграл» системи (1.11)

$$2xy + t^2 = C_1. \quad (1.12)$$

Рівність (1.12) дає змогу спростити відшукування другої інтегрованої комбінації. Дійсно, із (1.12) маємо:

$$x = \frac{C_1 - t^2}{2y}. \quad (1.13)$$

Підставивши значення x із (1.13) у друге з рівнянь системи (1.10), дістанемо:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{C_1 - t^2}{2y} \Rightarrow 2y dy = (t^2 - C_1) dt \Rightarrow y^2 = \frac{t^3}{3} - C_1 t + C_2.$$

Замінивши в останній рівності сталу C_1 її значенням із (1.12), отримуємо другий «перший інтеграл», очевидно незалежний відносно (1.12):

$$y^2 = \frac{t^3}{3} - (2xy + t^2) \cdot t + C_2 \Rightarrow y^2 + \frac{2t^3}{3} + 2txy = C_2.$$

Відповідь. $2xy + t^2 = C_1$, $y^2 + \frac{2t^3}{3} + 2txy = C_2$.

2. Інтегрування диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку

Інтегрування лінійних та квазілінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними (ДРЧП) першого порядку зводиться до інтегрування відповідних систем звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі. При цьому слід враховувати, що на відміну від систем звичайних рівнянь, із яких визначаємо кілька шуканих функцій однієї незалежної змінної (див. попередню тему), у випадку ДРЧП знаходимо одну шукану функцію від багатьох незалежних змінних.

Для визначеності в подальшому під **однорідними** розумітимемо ДРЧП першого порядку вигляду

$$\sum_{i=1}^n p_i(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad (\text{А})$$

а під **неоднорідними** – вигляду

$$\sum_{i=1}^n p_i(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = q(x_1, \dots, x_n, u), \quad (\text{Б})$$

де $u(x_1, \dots, x_n)$ – шукана функція.

Приклад 2.1. Розв'язати однорідне ДРЧП

$$(xy + 1) \frac{\partial z}{\partial x} - y(x + y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (2.1)$$

Розв'язання. Записуємо відповідну систему в симетричній формі:

$$\frac{dx}{xy + 1} = \frac{dy}{-y(x + y)}. \quad (2.2)$$

Для побудови загального розв'язку ДРЧП (2.1) потрібно зінтегрувати звичайне диференціальне рівняння першого порядку (2.2), яке можна переписати у вигляді

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \equiv y(x + y)dx + (xy + 1)dy = 0. \quad (2.3)$$

Для цього рівняння виконується умова існування інтегрального множника $\mu(y)$:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{y - (x + 2y)}{y(x + y)} = -\frac{1}{y} = \varphi(y),$$

тоді $\mu(y) = e^{\int \varphi(y) dy} = e^{-\int y^{-1} dy} = y^{-1}$. Домножимо рівняння (2.3) на $\mu(y)$, дістанемо:

$$M_1(x, y)dx + N_1(x, y)dy \equiv (x + y)dx + (x + y^{-1})dy = 0. \quad (2.4)$$

Для рівняння (2.4) виконується умова Ейлера: $\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x} = 1$, отже, маємо рівняння в повних диференціалах. Знайдемо функцію $f(x, y)$, повним диференціалом якої є ліва частина рівняння (2.4), із системи ДРЧП

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = M_1(x, y) = x + y, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N_1(x, y) = x + y^{-1}. \end{cases}$$

Інтегруючи перше з рівнянь останньої системи, маємо $f(x, y) = 0,5x^2 + xy + \psi(y)$, підстановка в друге рівняння дає $\psi(y) = \ln |y|$. Звідси $f(x, y) = 0,5x^2 + xy + \ln |y|$, а загальний розв'язок рівняння (2.4), а отже, «перший інтеграл» системи (2.2), має вигляд

$$0,5x^2 + xy + \ln |y| = C,$$

де C – довільна стала. Тоді згідно з теоремою про структуру загального розв'язку однорідного ДРЧП першого порядку вигляду (А) загальний розв'язок ДРЧП (2.1) запишеться як $z = \Phi(0,5x^2 + xy + \ln |y|)$, де Φ – довільна функція свого аргументу.

Відповідь. Загальний розв'язок: $z = \Phi(0,5x^2 + xy + \ln |y|)$, де Φ – довільна функція.

Приклад 2.2. Знайти загальний розв'язок однорідного ДРЧП

$$(4x^2y + x) \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (2.5)$$

Розв'язання. Записуємо відповідну систему в симетричній формі:

$$\frac{dx}{4x^2y + x} = \frac{dy}{y}. \quad (2.6)$$

Для побудови загального розв'язку ДРЧП (2.5) потрібно зінтегрувати звичайне диференціальне рівняння першого порядку (2.6). Задля спрощення процесу інтегрування скористаємося правилом рівності дробів:

$$\frac{xdy - ydx}{-4x^2y^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow -\frac{1}{4y^2} d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{dy}{y}.$$

Відокремивши змінні, після інтегрування дістанемо:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = -4ydy \Rightarrow \frac{y}{x} = -2y^2 + C.$$

Отже, «перший інтеграл» системи (2.6) має вигляд

$$\frac{y}{x} + 2y^2 = C,$$

де C – довільна стала. Тоді згідно з теоремою про структуру загального розв'язку однорідного ДРЧП першого порядку вигляду (А) загальний розв'язок ДРЧП (2.5)

запишеться як $z = \Phi\left(\frac{y}{x} + 2y^2\right)$, де Φ – довільна функція свого аргументу.

Відповідь. $z = \Phi\left(\frac{y}{x} + 2y^2\right)$, де Φ – довільна функція.

Приклад 2.3. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДРЧП

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + (xy + e^x) \frac{\partial z}{\partial y} = -z. \quad (2.7)$$

Розв'язання. Записуємо відповідну систему в симетричній формі:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{xy + e^x} = \frac{dz}{-z}. \quad (2.8)$$

Для побудови загального розв'язку ДРЧП (2.7) із системи (2.8) потрібно побудувати дві лінійно незалежні інтегровні комбінації. Перший і третій дроби утворюють очевидну інтегровну комбінацію

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{z},$$

із якої після інтегрування отримуємо перший «перший інтеграл»

$$xz = C_1.$$

Перші два дроби також дають інтегровну комбінацію (очевидно незалежну відносно першої), яку можна записати у вигляді лінійного неоднорідного рівняння першого порядку

$$y' - y = \frac{e^x}{x}.$$

Його загальний розв'язок дається формулою

$$y = e^{\int dx} \left(C_2 + \int e^{-\int dx} \frac{e^x}{x} dx \right) = e^x (C_2 + \ln |x|).$$

Звідси отримуємо другий «перший інтеграл» системи (2.8)

$$e^{-x} \cdot y - \ln |x| = C_2.$$

Тоді згідно з теоремою про структуру загального розв'язку неоднорідного ДРЧП першого порядку вигляду (Б) загальний розв'язок ДРЧП (2.7) у неявному вигляді дається співвідношенням $\Phi(xz, e^{-x} \cdot y - \ln |x|) = 0$, де Φ – довільна функція своїх аргументів. Однак, оскільки шукана функція $z(x, y)$ входить лише в один із побудованих «перших інтегралів», то її можна подати також в еквівалентному явному вигляді

$$xz = F(e^{-x} \cdot y - \ln |x|) \Rightarrow z = x^{-1} F(e^{-x} \cdot y - \ln |x|).$$

Відповідь. $z = x^{-1} F(e^{-x} \cdot y - \ln |x|)$, де F – довільна функція.

Приклад 2.4. Знайти множину розв'язків квазілінійного ДРЧП першого порядку

$$xy \frac{\partial u}{\partial x} + (x - 2u) \frac{\partial u}{\partial y} = yu. \quad (2.9)$$

Розв'язання. Записуємо відповідну систему в симетричній формі:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x - 2u} = \frac{du}{yu}. \quad (2.10)$$

Для побудови загального розв'язку ДРЧП (2.9) із системи (2.10) потрібно побудувати дві лінійно незалежні інтегровні комбінації. Перший і третій дроби утворюють очевидну інтегровну комбінацію

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u},$$

із якої після інтегрування отримуємо перший «перший інтеграл»

$$x^{-1}u = C_1. \quad (2.11)$$

Другу інтегровну комбінацію можна отримати з першого й другого дробів, скориставшись отриманим співвідношенням для виключення змінної u . Із (2.11) маємо $u = C_1 x$, а отже,

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x - 2C_1 x} \Rightarrow (1 - 2C_1)dx = ydy \Rightarrow 0,5y^2 = (1 - 2C_1)x + C_2.$$

Підставивши в останню рівність значення C_1 із (2.11), отримаємо другий «перший інтеграл», очевидно незалежний відносно першого:

$$0,5y^2 - x + 2u = C_2.$$

ДРЧП (2.9) є неоднорідним вигляду (Б), тому його загальний розв'язок записується за тими ж правилами, що й у випадку Прикладу 2.3. Оскільки шукана функція $u(x, y)$ входить в обидва «перші інтеграли», то подамо множину розв'язків у неявному вигляді, а саме $\Phi(x^{-1}u, 0,5y^2 - x + 2u) = 0$, де Φ – довільна функція своїх аргументів.

Відповідь. $\Phi(x^{-1}u, 0,5y^2 - x + 2u) = 0$, де Φ – довільна функція.

3. Задачі Коші для ДРЧП першого порядку

Приклад 3.1. Розв'язати задачу Коші для лінійного ДРЧП

$$\frac{y}{3} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{x^2}{8} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (3.1)$$

за початкових умов

$$y = 1,5\sqrt{x^3}, \quad u = 2x^4. \quad (3.2)$$

Розв'язання. Побудуємо спочатку загальний розв'язок однорідного ДРЧП (3.1). Запишемо відповідну систему в симетричній формі:

$$\frac{3dx}{y} = \frac{8dy}{x^2}. \quad (3.3)$$

Звідси після відокремлення змінних та інтегрування маємо:

$$3x^2 dx = 8y dy \Rightarrow x^3 = 4y^2 + C.$$

Отже, «перший інтеграл» системи (3.3) має вигляд

$$x^3 - 4y^2 = C, \quad (3.4)$$

де C – довільна стала. Тоді згідно з теоремою про структуру загального розв'язку однорідного ДРЧП першого порядку вигляду (А) загальний розв'язок ДРЧП (3.1) запишеться у вигляді $u = \Phi(x^3 - 4y^2)$, де Φ – довільна функція свого аргументу.

Підставивши в (3.4) значення y із початкових умов (3.2), із урахуванням другої початкової умови маємо:

$$\begin{cases} u = 2x^4, \\ C = -8x^3. \end{cases}$$

Виключивши з останньої системи змінну x , дістанемо співвідношення

$$x = \sqrt[3]{-\frac{C}{8}} \Rightarrow u = \frac{\sqrt[3]{C^4}}{8}. \quad (3.5)$$

Розв'язок задачі Коші (3.1)-(3.2) отримується підстановкою в (3.5) значення C із (3.4), тоді

$$u = \frac{\sqrt[3]{(x^3 - 4y^2)^4}}{8}.$$

Задля перевірки правильності обчислень підставимо в отриманий розв'язок значення $y = 1,5\sqrt{x^3}$ із (3.2). Маємо:

$$u = \frac{\sqrt[3]{(x^3 - 9x^3)^4}}{8} = 2x^4,$$

тобто початкові умови справді виконуються.

Відповідь. $u = \frac{\sqrt[3]{(x^3 - 4y^2)^4}}{8}.$

Приклад 3.2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = -xy \quad (3.6)$$

та інтегральну поверхню, що проходить через криву

$$y = x^2, \quad z = x^3. \quad (3.7)$$

Розв'язання. Складаємо відповідну систему в симетричній формі:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$$

і знаходимо її «перші інтеграли» (див. Приклад 1.2)

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad z^2 + xy = C_2. \quad (3.8)$$

Отже, загальний розв'язок ДРЧП (3.6) – неоднорідного типу (Б) – можна записати в неявному вигляді

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, z^2 + xy\right) = 0,$$

де Φ – довільна функція своїх аргументів. Оскільки z входить тільки в один із «перших інтегралів» (3.8), то загальний розв'язок можна виписати і в явному вигляді. Тоді

$$z^2 + xy = F\left(\frac{x}{y}\right), \quad z = \pm \sqrt{F\left(\frac{x}{y}\right) - xy},$$

де F – довільна функція.

Щоб знайти інтегральну поверхню, що проходить через лінію (3.7), запишемо рівняння цієї кривої в параметричному вигляді, узявши за параметр, наприклад, змінну x :

$$x = x, \quad y = x^2, \quad z = x^3.$$

Підставивши ці вирази у (3.8), дістанемо

$$\frac{1}{x} = C_1, \quad x^6 + x^3 = C_2.$$

Виключивши з цих рівностей x , отримаємо:

$$\frac{1}{C_1^6} + \frac{1}{C_1^3} = C_2.$$

Підставивши в останнє співвідношення замість C_1 і C_2 ліві частини «перших інтегралів» (3.8), знайдемо шуканий розв'язок задачі Коші (3.6)-(3.7)

$$\left(\frac{y}{x}\right)^6 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = z^2 + xy.$$

Відповідь. Загальний розв'язок: $z = \pm \sqrt{F\left(\frac{x}{y}\right) - xy}$, де F – довільна функція.

$$\text{Шукана інтегральна поверхня: } \left(\frac{y}{x}\right)^6 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = z^2 + xy.$$

Приклад 3.3. Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння (2.7) за початкових умов

$$y = e^x \cdot \ln |x|, \quad z = 4x^{-1}. \quad (3.9)$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння, побудований у Прикладі 2.3, має вигляд

$$z = x^{-1} F(e^{-x} \cdot y - \ln |x|), \quad (3.10)$$

де F – довільна функція. Зауважимо, що при підкладанні значень y і z із умов (3.9) у два «перші інтеграли» ДРЧП (2.7)

$$xz = C_1, \quad e^{-x} \cdot y - \ln |x| = C_2$$

їх ліві частини набувають сталих значень і отримуються рівності $4 = C_1$, $0 = C_2$, а це означає, що крива (3.9) є **характеристикою** рівняння (2.7), через яку проходять безліч інтегральних поверхонь. Знайдемо ці поверхні шляхом підстановки (3.9) у загальний розв'язок (3.10). Маємо:

$$4x^{-1} = x^{-1} F(e^{-x} \cdot e^x \cdot \ln |x| - \ln |x|) \Rightarrow F(0) = 4.$$

Остання рівність визначає умову, за якої інтегральні поверхні (3.10) проходять через криву (3.9).

Відповідь. Задача Коші має безліч розв'язків вигляду $z = x^{-1} F(e^{-x} \cdot y - \ln |x|)$, де F – довільна функція, для якої виконується умова $F(0) = 4$.

Примітка. Необхідні теоретичні відомості по темах розділу:

Маринець К. В. Стійкість систем звичайних диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку. – Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння», частина III. – Ужгород: «Говерла», 2017. – С. 35-43.
Лекції до Модуля 4 – ДРЧП першого порядку.