

## СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

### 1. Дослідження на стійкість за першим наближенням

**Приклад 1.1.** Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь із параметром  $a = \text{const}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{4 + 4y} - 2e^{x+y}, \\ \dot{y} = \sin ax + \ln(1 - 4y). \end{cases} \quad (1.1)$$

**Розв'язання.** Очевидно, що точка фазової площини  $(x, y) = (0, 0)$  є розв'язком системи (1.1). Щоб дослідити цей розв'язок на стійкість, побудуємо для нелінійної системи (1.1) систему першого наближення шляхом виділення лінійної частини з функцій  $P(x, y) = \sqrt{4 + 4y} - 2e^{x+y}$  та  $Q(x, y) = \sin ax + \ln(1 - 4y)$  в околі точки  $(0, 0)$  за формулою Тейлора. Маємо:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot y + \psi_1(x, y) = -2x - y + \psi_1(x, y), \\ Q(x, y) &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot y + \psi_2(x, y) = ax - 4y + \psi_2(x, y), \end{aligned}$$

де функції  $\psi_1(x, y)$  і  $\psi_2(x, y)$  рівні  $O(x^2 + y^2)$ , а отже, задовольняють умови теореми Ляпунова, згідно з якою висновку про стійкість нульового розв'язку системи (1.1) можна дійти шляхом дослідження системи першого наближення

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = ax - 4y. \end{cases} \quad (1.2)$$

Лінійна однорідна система (1.2) зі сталими коефіцієнтами задається матрицею

$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ a & -4 \end{pmatrix}$ . Знайдемо власні значення цієї матриці:

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ a & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8 + a = 0,$$

звідки  $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1 - a}$ .

При  $a > 1$  корені комплексні, причому  $\text{Re} \lambda_{1,2} = -3 < 0$ , а при  $-8 < a \leq 1$  корені дійсні й від'ємні. Отже, згідно з теоремою Ляпунова у цих випадках нульовий розв'язок системи (1.1) асимптотично стійкий.

При  $a < -8$  один із коренів додатний, а тому нульовий розв'язок є нестійким.

При  $a = -8$  маємо  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -6$ . У цьому випадку питання про стійкість не вирішується з застосуванням теореми Ляпунова.

**Відповідь.** Нульовий розв'язок системи (1.1) асимптотично стійкий при  $a > -8$ , і нестійкий при  $a < -8$ .

**Приклад 1.2.** Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - \ln(1 + y) + \sin x, \\ \dot{y} = e^x + \sin(x + y) - \cos^2 y. \end{cases} \quad (1.3)$$

**Розв'язання.** Очевидно, що точка фазової площини  $(x, y) = (0, 0)$  є розв'язком системи (1.3). Щоб дослідити цей розв'язок на стійкість, побудуємо для нелінійної системи (1.1) систему першого наближення шляхом виділення лінійної частини з функцій  $P(x, y) = 2x - \ln(1 + y) + \sin x$  та  $Q(x, y) = e^x + \sin(x + y) - \cos^2 y$  в околі точки  $(0, 0)$  за формулою Тейлора. Аналогічно до Прикладу 1.1 маємо:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= (2 + \cos x)|_{(0,0)} \cdot x - (1 + y)^{-1}|_{(0,0)} \cdot y + \psi_1(x, y) = 3x - y + \psi_1(x, y), \\ Q(x, y) &= [e^x + \cos(x + y)]|_{(0,0)} \cdot x + [\cos(x + y) + 2\sin 2y]|_{(0,0)} \cdot y + \psi_2(x, y) = \\ &= 2x + y + \psi_2(x, y), \end{aligned}$$

де функції  $\psi_1(x, y)$  і  $\psi_2(x, y)$  рівні  $O(x^2 + y^2)$ , а отже, задовольняють умови теореми Ляпунова. Звідси отримуємо систему першого наближення

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 2x + y, \end{cases}$$

яка задається матрицею  $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Знайдемо власні значення цієї матриці:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,$$

звідки  $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ .

Оскільки  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 2 > 0$ , то згідно з теоремою Ляпунова нульовий розв'язок системи (1.3) є нестійким.

**Відповідь.** Нульовий розв'язок системи (1.3) нестійкий.

## 2. Критерій Рауса-Гурвіца

**Приклад 2.1.** За допомогою критерію Рауса-Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння

$$y^{(4)} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 5y = 0. \quad (2.1)$$

**Розв'язання.** Зауважимо, що критерій Рауса-Гурвіца дає необхідні й достатні умови від'ємності дійсних частин усіх коренів полінома

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (2.2)$$

з додатними коефіцієнтами. Якщо (2.2) – характеристичний поліном лінійного однорідного рівняння чи системи, то критерій Рауса-Гурвіца дає можливість зробити висновок щодо асимптотичної стійкості нульового розв'язку відповідного рівняння чи системи.

Щоб застосувати критерій Рауса-Гурвіца до рівняння (2.1), немає потреби вписувати характеристичний поліном (2.2), адже його коефіцієнти співпадають із коефіцієнтами

самого рівняння. Маємо:  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 5$ ,  $a_3 = 8$ ,  $a_4 = 5$ . Усі ці числа додатні, отже, необхідна умова критерію виконується. Складаємо матрицю Гурвіца – квадратну матрицю розмірності  $n \times n$  (у нашому випадку  $n = 4$ ), у рядки якої коефіцієнти  $a_i$ ,  $i = \overline{0,4}$  вписуються в оберненому порядку, починаючи з пари  $a_1, a_0$ , причому так, щоб на головній діагоналі стояли числа  $a_1, a_2, a_3, a_4$ :

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Критерій асимптотичної стійкості виконується, якщо всі головні діагональні мінори матриці  $H$  є строго додатними. Перевіримо виконання цієї умови:

$$\Delta_1 = 2 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

а це означає, що нульовий розв'язок рівняння (2.1) не є асимптотично стійким. Для визначення стійкості чи нестійкості розв'язку потрібно застосувати додаткові критерії.

**Відповідь.** Нульовий розв'язок рівняння (2.1) не є асимптотично стійким.

**Приклад 2.2.** За допомогою критерію Рауса-Гурвіца визначити, при яких значеннях параметрів  $a$  та  $b$  є асимптотично стійким нульовий розв'язок рівняння

$$y''' + ay'' + 2y' + by = 0. \quad (2.3)$$

**Розв'язання.** Аналогічно до Прикладу 2.1 маємо:  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = a$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = b$ . Усі ці числа повинні бути додатними, отже, необхідна умова критерію виконується при  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Складаємо матрицю Гурвіца розмірності  $3 \times 3$  за згаданими в попередньому прикладі правилами:

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 2 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Критерій асимптотичної стійкості виконується, якщо всі головні діагональні мінори матриці  $H$  є строго додатними. Випишемо ці умови:

$$\Delta_1 = a > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{vmatrix} = 2a - b > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 2 & a \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b(2a - b) > 0.$$

Усі три нерівності справджуються за одночасного виконання умов  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $2a - b > 0$ , які можна записати у вигляді однієї нерівності  $0 < b < 2a$ .

**Відповідь.** Нульовий розв'язок рівняння (2.3) є асимптотично стійким при значеннях параметрів  $a$  та  $b$ , для яких виконується нерівність  $0 < b < 2a$ .

**Приклад 2.3.** Із застосуванням критерію Рауса-Гурвіца дослідити на асимптотичну стійкість нульовий розв'язок системи другого порядку з параметром  $\alpha = \text{const}$

$$\dot{X} = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

**Розв'язання.** Характеристичне рівняння для матриці  $A$  має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 3 & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\alpha + 1)\lambda + \alpha + 6 = 0.$$

Складаємо матрицю Гурвіца:

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - 1 & 1 \\ 0 & \alpha + 6 \end{pmatrix}.$$

Критерій асимптотичної стійкості виконується, якщо всі головні діагональні мінори матриці  $H$  є строго додатними. Випишемо ці умови:

$$\Delta_1 = -\alpha - 1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\alpha - 1 & 1 \\ 0 & \alpha + 6 \end{vmatrix} = -(\alpha^2 + 7\alpha + 6) > 0.$$

Останні нерівності справджуються за одночасного виконання умов  $\alpha < -1$ ,  $\alpha^2 + 7\alpha + 6 < 0$ , що має місце при  $-6 < \alpha < -1$ .

**Відповідь.** Нульовий розв'язок системи (2.4) є асимптотично стійким при  $-6 < \alpha < -1$ .

### 3. Положення рівноваги динамічних систем

**Приклад 3.1.** Визначити тип положення рівноваги заданої системи диференціальних рівнянь та побудувати його фазовий портрет:

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases} \quad (3.1)$$

**Розв'язання.** Особливою точкою системи (3.1), або положенням рівноваги динамічної системи, є точка  $(0,0)$ . Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення

матриці  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  системи (3.1):

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Звідси  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Корені дійсні, різні й одного знаку, причому обидва додатні.

Отже, тип положення рівноваги – **нестійкий вузол**.

Для побудови фазового портрета положення рівноваги типу вузол найперше треба знайти дві фазові траєкторії, які зображаються прямими лініями, що проходять через особливу точку. Ці прямі завжди напрямлені уздовж відповідних знайденим власним значенням власних векторів. Визначимо ці вектори за алгоритмом методу Ейлера:

$$(A - \lambda_1 E)h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

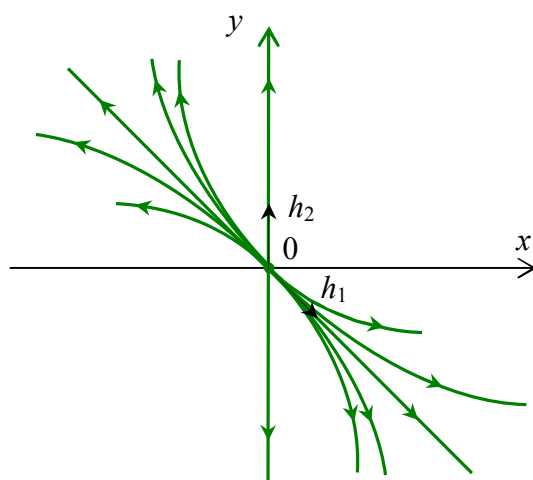
$$(A - \lambda_2 E)h_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

У випадку вузла маємо інтегральні криві типу парабол, які в особливій точці дотикаються до прямої, напрямленої уздовж власного вектора, що відповідає меншому за абсолютною величиною власному значенню, тобто числу  $\lambda_1 = 1$ , і перетинають іншу пряму, що відповідає другому власному значенню  $\lambda_2 = 2$ .

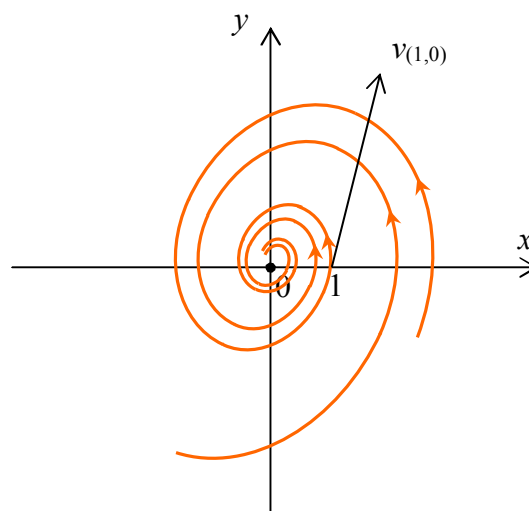
Оскільки вузол нестійкий, то рух по траєкторіях відбувається в напрямі від положення рівноваги.

Тепер ми маємо всі дані для схематичної побудови фазового портрета особливої точки системи (3.1).

**Відповідь.** Положення рівноваги системи (3.1) – нестійкий вузол. Фазовий портрет зображений на мал. 1.



Мал. 1



Мал. 2

**Приклад 3.2.** Дослідити особливу точку  $(0,0)$  заданого рівняння та побудувати фазовий портрет:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 3y}{x - 2y}. \quad (3.2)$$

**Розв'язання.** Рівнянню (3.2) відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 3y, \end{cases} \quad (3.3)$$

що задається матрицею  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ . Знаходимо корені характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Звідси  $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ . Корені комплексно спряжені, причому мають від'ємні дійсні частини. Отже, тип положення рівноваги – **асимптотичний фокус**.

Для визначення напряму закручування траєкторій побудуємо вектор швидкості  $v = (\dot{x}, \dot{y})$  у деякій точці фазової площини без початку координат (особливої точки), наприклад, у точці  $(x, y) = (1, 0)$ . На підставі (3.3)  $v = (x - 2y, 4x - 3y)$ . При значеннях  $x = 1, y = 0$  отримуємо вектор  $v_{(1,0)} = (1, 4)$ . Отже, росту  $t$  відповідає рух по траєкторіях проти годинникової стрілки. Оскільки дійсна частина коренів характеристичного рівняння  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -1 < 0$ , то особлива точка асимптотично стійка, а тому з ростом  $t$  розв'язки необмежено наближаються до положення рівноваги. Отже, за руху проти годинникової стрілки інтегральні криві наближаються до початку координат. Тепер ми маємо всі дані для схематичної побудови фазового портрета особливої точки рівняння (3.2).

**Відповідь.** Положення рівноваги рівняння (3.2) – асимптотичний фокус. Фазовий портрет зображений на мал. 2.

**Приклад 3.3.** Визначити тип особливої точки заданої системи диференціальних рівнянь та побудувати відповідний фазовий портрет:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = 1,5x - 3y. \end{cases} \quad (3.4)$$

**Розв'язання.** Знайдемо особливі точки як розв'язки алгебраїчної системи рівнянь

$$\begin{cases} -x + 2y = 0, \\ 1,5x - 3y = 0. \end{cases}$$

Остання система має безліч розв'язків вигляду  $(2k, k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Звідси випливає, що система (3.4) має безліч особливих точок, геометричним місцем яких є пряма  $x = 2y$ .

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1,5 & -3 \end{pmatrix}$

системи (3.4):

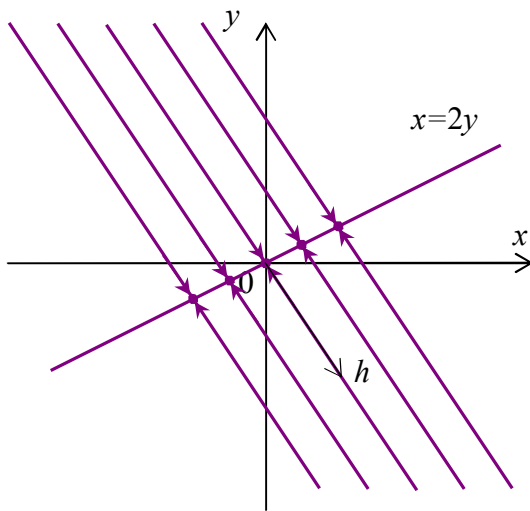
$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 1,5 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda = 0.$$

Звідси  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -4$ . Один із коренів рівний нулеві, а другий – від'ємний. Отже, тип особливої точки – **стійка пряма положень рівноваги**. Оскільки ненульовий корінь  $\lambda_2 < 0$ , то росту  $t$  відповідає рух по траєкторіях у напрямі до прямої положень рівноваги  $x = 2y$ . Зауважимо, що ця пряма є тільки геометричним місцем особливих точок системи (3.4), а не розв'язком цієї системи. Траєкторії в цьому випадку зображаються прямими, паралельними до власного вектора  $h$ , що відповідає ненульовому власному значенню  $\lambda_2 = -4$ . Знайдемо цей вектор:

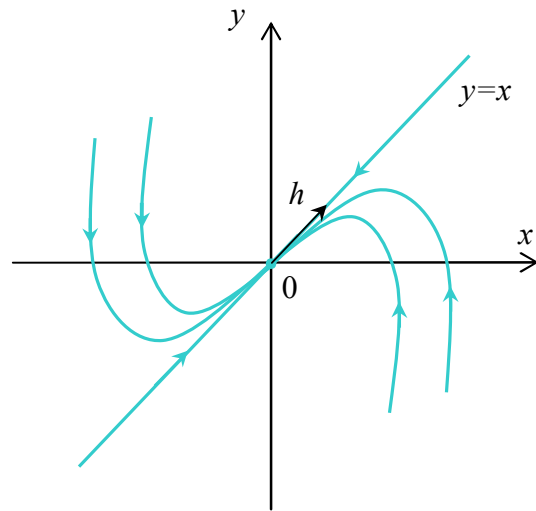
$$(A - \lambda_2 E)h = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Тепер ми маємо всі дані для схематичної побудови фазового портрета особливої точки системи (3.4).

**Відповідь.** Тип особливої точки системи (3.4) – стійка пряма положень рівноваги. Фазовий портрет зображений на мал. 3.



Мал. 3



Мал. 4

**Приклад 3.4.** Дослідити особливу точку  $(0,0)$  заданого рівняння та побудувати фазовий портрет:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 6y}{-4x - y}. \quad (3.5)$$

**Розв'язання.** Рівнянню (3.5) відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - y, \\ \dot{y} = x - 6y, \end{cases}$$

що задається матрицею  $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$ . Знаходимо корені характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} -4 - \lambda & -1 \\ 1 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 5)^2 = 0.$$

Звідси  $\lambda_{1,2} = -5$ . Маємо двократний від'ємний корінь  $\lambda = -5$ , причому матриця  $A - \lambda E$  є ненульовою. Отже, тип положення рівноваги – **асимптотично стійкий вироджений вузол**.

Для побудови фазового портрета виродженого вузла найперше треба знайти фазову траєкторію, яка зображається прямою лінією, що проходить через особливу точку. Ця пряма завжди напрямлена уздовж відповідного знайденому власному значенню  $\lambda$  власного вектора. Визначимо цей вектор:

$$(A - \lambda E)h = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

У випадку виродженого вузла маємо інтегральні криві типу «півпарабол», які в особливій точці дотикаються до прямої, напрямленої уздовж власного вектора (тобто прямої  $y = x$ ). Оскільки вироджений вузол стійкий, то рух по траєкторіях відбувається в напрямі до положення рівноваги.

Побудувавши вектори швидкості  $v = (-4x - y, x - 6y)$  у різних точках фазової площини, за винятком особливої точки та точок прямої  $y = x$ , переконуємося, що

«півпараболи» входять у положення рівноваги з першої координатної чверті в півплощині  $y < x$  і з четвертої – у півплощині  $y > x$ .

Тепер ми маємо всі дані для схематичної побудови фазового портрета особливої точки рівняння (3.5).

**Відповідь.** Положення рівноваги рівняння (3.5) – асимптотично стійкий вироджений вузол. Фазовий портрет зображений на мал. 4.

#### 4. Особливі точки нелінійних автономних систем

**Приклад 4.1.** Знайти та дослідити особливі точки нелінійної автономної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + 3, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 10. \end{cases} \quad (4.1)$$

**Розв'язання.** Знайдемо особливі точки як розв'язки алгебраїчної системи рівнянь:

$$\begin{cases} P(x, y) \equiv xy + 3 = 0, \\ Q(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 10 = 0. \end{cases}$$

Звідси отримуємо чотири особливі точки системи (4.1):  $M_1(-1,3)$ ,  $M_2(-3,1)$ ,  $M_3(1,-3)$ ,  $M_4(3,-1)$ . Проведемо дослідження стійкості кожної з отриманих особливих точок за першим наближенням, використовуючи алгоритм, проілюстрований у Прикладах 1.1 та 1.2.

**1.**  $M_1(-1,3)$ . Побудуємо для нелінійної системи (4.1) систему першого наближення в околі цієї точки, користуючись формулою Тейлора. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x,y)=(-1,3)} \cdot x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,y)=(-1,3)} \cdot y = 3x - y, \\ \dot{y} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,y)=(-1,3)} \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x,y)=(-1,3)} \cdot y = -2x + 6y. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ системи (4.2):}$$

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 16 = 0.$$

Звідси  $\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$ . Корені дійсні, різні й одного знаку, причому обидва додатні.

Отже, тип особливої точки – **нестійкий вузол**.

**2.**  $M_2(-3,1)$ . Побудуємо для нелінійної системи (4.1) систему першого наближення в околі цієї точки аналогічно до попереднього випадку. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x,y)=(-3,1)} \cdot x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,y)=(-3,1)} \cdot y = x - 3y, \\ \dot{y} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,y)=(-3,1)} \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x,y)=(-3,1)} \cdot y = -6x + 2y. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \text{ системи (4.3):}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 16 = 0.$$

Звідси  $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{2}$ . Корені дійсні, різні й різних знаків. Отже, тип особливої точки – **сідло**. Сідло завжди є нестійким, оскільки у випадку цього типу один із коренів завжди додатний.

3.  $M_3(1, -3)$ . Побудуємо для нелінійної системи (4.1) систему першого наближення в околі цієї точки аналогічно до попередніх випадків. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x,y)=(1,-3)} \cdot x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,y)=(1,-3)} \cdot y = -3x + y, \\ \dot{y} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,y)=(1,-3)} \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x,y)=(1,-3)} \cdot y = 2x - 6y. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \text{ системи (4.4):}$$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9\lambda + 16 = 0.$$

Звідси  $\lambda_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}$ . Корені дійсні, різні й різних знаків, причому обидва від'ємні.

Отже, тип особливої точки – **асимптотично стійкий вузол**.

4.  $M_4(3, -1)$ . Побудуємо для нелінійної системи (4.1) систему першого наближення в околі цієї точки аналогічно до попередніх випадків. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x,y)=(3,-1)} \cdot x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,y)=(3,-1)} \cdot y = -x + 3y, \\ \dot{y} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,y)=(3,-1)} \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x,y)=(3,-1)} \cdot y = 6x - 2y. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \text{ системи (4.5):}$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 16 = 0.$$

Звідси  $\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$ . Корені дійсні, різні й різних знаків. Отже, тип особливої точки – **сідло** (завжди нестійке).

**Відповідь.** Особливі точки системи (4.1):  $(-1, 3)$  – нестійкий вузол;  $(-3, 1)$ ,  $(3, -1)$  – сідла;  $(1, -3)$  – асимптотично стійкий вузол.

**Приклад 4.2.** Знайти та дослідити особливі точки нелінійної автономної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y - x^3, \\ \dot{y} = -4x - 3y + 7y^5. \end{cases} \quad (4.6)$$

**Розв'язання.** Знайдемо особливі точки як розв'язки алгебраїчної системи рівнянь:

$$\begin{cases} P(x, y) \equiv -3x + 4y - x^3 = 0, \\ Q(x, y) \equiv -4x - 3y + 7y^5 = 0. \end{cases}$$

Очевидними розв'язками цієї системи є  $M_1(0,0)$ ,  $M_2(1,1)$ ,  $M_3(-1,-1)$ . Шляхом виключення змінних можна показати, що інших дійсних розв'язків система не має. Проведемо дослідження стійкості кожної з отриманих особливих точок за першим наближенням аналогічно до Прикладу 4.1.

**1.**  $M_1(0,0)$ . Побудуємо для нелінійної системи (4.6) систему першого наближення в околі цієї точки. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot y = -3x + 4y, \\ \dot{y} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot y = -4x - 3y. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \text{ системи (4.7):}$$

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ -4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0.$$

Звідси  $\lambda_{1,2} = -3 \pm 4i$ . Корені комплексно спряжені з від'ємними дійсними частинами. Отже, тип особливої точки – **асимптотичний фокус**.

**2.**  $M_2(1,1)$ . Побудуємо для нелінійної системи (4.6) систему першого наближення в околі цієї точки. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x,y)=(1,1)} \cdot x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,y)=(1,1)} \cdot y = -6x + 4y, \\ \dot{y} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,y)=(1,1)} \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x,y)=(1,1)} \cdot y = -4x + 32y. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 32 \end{pmatrix} \text{ системи (4.8):}$$

$$\begin{vmatrix} -6 - \lambda & 4 \\ -4 & 32 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 26\lambda - 176 = 0.$$

Звідси  $\lambda_{1,2} = 13 \pm \sqrt{345}$ . Корені дійсні, різні й різних знаків. Отже, тип особливої точки – **сідло** (завжди нестійке).

3.  $M_3(-1,-1)$ . Побудуємо для нелінійної системи (4.1) систему першого наближення в околі цієї точки аналогічно до попередніх випадків. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x,y)=(-1,-1)} \cdot x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,y)=(-1,-1)} \cdot y = -6x + 4y, \\ \dot{y} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,y)=(-1,-1)} \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x,y)=(-1,-1)} \cdot y = -4x + 32y. \end{aligned}$$

Одержана система першого наближення аналогічна до (4.8). Тому, використовуючи результат попереднього дослідження, можемо стверджувати, що тип особливої точки – **сідло** (завжди нестійке).

**Відповідь.** Особливі точки системи (4.6):  $(0,0)$  – асимптотичний фокус;  $(1,1)$ ,  $(-1,-1)$  – сідла.

**Приклад 4.3.** Дослідити особливі точки і накреслити на фазовій площині траєкторії нелінійної автономної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2xy, \\ \dot{y} = -4y + xy. \end{cases} \quad (4.9)$$

**Розв'язання.** Знайдемо особливі точки як розв'язки алгебраїчної системи рівнянь:

$$\begin{cases} P(x, y) \equiv 4x - 2xy = 0, \\ Q(x, y) \equiv -4y + xy = 0. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи є  $M_1(0,0)$ ,  $M_2(4,2)$ . Проведемо дослідження стійкості кожної з отриманих особливих точок за першим наближенням.

1.  $M_1(0,0)$ . Побудуємо для нелінійної системи (4.9) систему першого наближення в околі цієї точки. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot y = 4x, \\ \dot{y} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot y = -4y. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці

$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$  системи (4.10):

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 \\ 0 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 4) = 0.$$

Звідси  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = -4$ . Корені дійсні, різні й різних знаків. Отже, тип особливої точки – **сідло** (завжди нестійке).

Для побудови фазового портрета положення рівноваги типу сідло, як і у випадку вузла (див. Приклад 3.1), найперше треба знайти дві фазові траєкторії, які зображаються прямими лініями, що проходять через особливу точку. Ці прямі завжди напрямлені уздовж відповідних знайденим власним значенням власних векторів. Визначимо ці вектори:

$$(A - \lambda_1 E)h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(A - \lambda_2 E)h_2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що прямими траєкторіями в фазовому портреті сідла є осі координат  $y = 0$  та  $x = 0$ . Ці прямі будуть асимптотами інтегральних кривих, які у випадку сідла мають вигляд гіпербол. Оскільки  $\lambda_1 = 4 > 0$ , а  $\lambda_2 = -4 < 0$ , то рух по осі абсцис відбувається в напрямі від особливої точки, а по осі ординат – до особливої точки. Із цими напрямками узгоджується також і рух по вітках гіпербол.

2.  $M_2(4,2)$ . Побудуємо для нелінійної системи (4.9) систему першого наближення в околі цієї точки. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x,y)=(4,2)} \cdot x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,y)=(4,2)} \cdot y = -8y, \\ \dot{y} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,y)=(4,2)} \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x,y)=(4,2)} \cdot y = 2x. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ системи (4.11):}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -8 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 16 = 0.$$

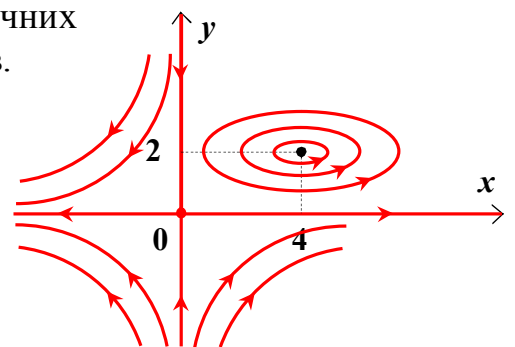
Звідси  $\lambda_{1,2} = \pm 4i$ . Корені комплексно спряжені, причому чисто уявні. Отже, тип особливої точки – **центр** (завжди стійкий). Інтегральні криві у випадку центра є замкнутими траєкторіями у вигляді еліпсів із центром в особливій точці.

Тепер, враховуючи результати дослідження особливих точок, можемо схематично зобразити траєкторії системи (4.9) на фазовій площині.

Зауважимо, що (4.9) є системою типу «хижак-жертва» (модель Лотки-Вольтерри), якими в екології описується співіснування двох біологічних популяцій з одним видом хижаків і одним видом жертв.

У цій моделі  $x(t)$  позначає число жертв, а  $y(t)$  – число хижаків, що годуються жертвами. Замкнуті траєкторії в першій чверті фазової площини ілюструють циклічність зміни чисельності популяцій.

**Відповідь.** Особливі точки системи (4.9):  $(0,0)$  – сідло,  $(4,2)$  – центр. Фазова картина схематично зображена на мал. 5.



Мал. 5

**Примітка.** Необхідні теоретичні відомості по темах розділу:

Маринець К. В. Стійкість систем звичайних диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку. – Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння», частина III. – Ужгород: «Говерла», 2017. – С. 3-20. Лекції до Модуля 4 – Теорія стійкості.