ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера

Приклад 1.1. Розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння методом Ейлера:
$$y''' - 2y'' - 3y' = 0. \qquad (1.1)$$
Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння для ДР (1.1):
$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda \equiv \lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0.$$
Коренями останнього рівняння є $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$ – отже, маємо випадок дійсних різних коренів. Згідно з методом Ейлера у цьому випадку кореням характеристичного рівняння відповідають частинні розв'язки ДР (1.1) вигляду
$$\varphi_1(x) = \mathrm{e}^{0\cdot x} = 1, \quad \varphi_2(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad \varphi_3(x) = \mathrm{e}^{3x},$$
а загальний розв'язок ДР (1.1) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв'язків
$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + C_3\varphi_3(x),$$
де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Відповідь. $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3\,\mathrm{e}^{3x}$.

Приклад 1.2. Розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння методом Ейлера:
$$y''' + y = 0. \qquad (1.2)$$
Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння для ДР (1.2):
$$\lambda^3 + 1 \equiv (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0.$$
Коренями останнього рівняння є $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Згідно з правилами методу Ейлера дійсному однократному кореню $\lambda_1 = -1$ відповідає частинний розв'язок ДР (1.2) вигляду $\varphi_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$, парі комплексно спряжених коренів $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ відповідають два лінійно незалежні частинні розв'язки ДР (1.2) вигляду
$$\varphi_2(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad \varphi_3(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$
а загальний розв'язок ДР (1.2) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв'язків
$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + C_3\varphi_3(x),$$
де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Відповідь. $y = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

Приклад 1.3. Розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння методом Ейлера:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0. \tag{1.3}$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння для ДР (1.3):

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 \equiv (\lambda - 1)^3 = 0.$$

Останнє рівняння має трикратний дійсний корінь $\lambda_{1,2,3} = 1$. Згідно з методом Ейлера у цьому випадку кореню $\lambda = 1$ відповідають три лінійно незалежні частинні розв'язки ДР (1.3) вигляду

$$\varphi_1(x) = \mathrm{e}^x, \quad \varphi_2(x) = x\,\mathrm{e}^x, \quad \varphi_3(x) = x^2\,\mathrm{e}^x,$$

а загальний розв'язок ДР (1.3) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв'язків

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + C_3\varphi_3(x),$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Відповідь. $y = \mathrm{e}^x(C_1 + C_2x + C_3x^2)$.

Приклад 1.4. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння четвертого порядку

$$y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0 \tag{1.4}$$

за початкових умов

$$y(0) = 4, \quad y'(0) = -4, \quad y''(0) = -11, \quad y'''(0) = 16. \tag{1.5}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок ДР (1.4) аналогічно до Прикладів 1.1-1.3. Запишемо характеристичне рівняння для ДР (1.4):

$$\lambda^4 + 13\lambda^2 + 36 \equiv (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 9) = 0.$$

Останнє рівняння має комплексні корені $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, $\lambda_{3,4} = \pm 3i$. Згідно з правилами методу Ейлера парі комплексно спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ відповідають два лінійно незалежні частинні розв'язки ДР (1.4) вигляду

$$\varphi_1(x) = \cos 2x, \quad \varphi_2(x) = \sin 2x,$$

іншій парі комплексно спряжених коренів $\lambda_{3,4} = \pm 3i$ – ще два лінійно незалежні частинні розв'язки ДР (1.4) вигляду

$$\varphi_3(x) = \cos 3x, \quad \varphi_4(x) = \sin 3x,$$

а загальний розв'язок ДР (1.4) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв'язків:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + C_3\cos 3x + C_4\sin 3x. \tag{1.6}$$

Виділимо з (1.6) частинний розв'язок, який справджує початкові умови (1.5). Підставивши (1.6) в (1.5), одержимо алгебраїчну систему для визначення невідомих сталих C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &\equiv C_1 + C_3 = 4, \\ y'(0) &\equiv 2C_2 + 3C_4 = -4, \\ y''(0) &\equiv -4C_1 - 9C_3 = -11, \\ y'''(0) &\equiv -8C_2 - 27C_4 = 16, \end{aligned}\right\}$$

звідки $C_1 = 5$, $C_2 = -2$, $C_3 = -1$, $C_4 = 0$. Підставивши знайдені значення сталих в (1.6), одержимо шуканий розв'язок задачі Коші (1.4)-(1.5).

Відповідь. $y = 5\cos 2x - 2\sin 2x - \cos 3x$.

2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Метод варіації сталих (Лаґранжа)

Приклад 2.1. Методом варіації сталих розв’язати лінійне неоднорідне ДР

$$y'' + 9y = 3\csc 3x. \tag{2.1}$$

Розв’язання. Знайдемо спочатку загальний розв’язок відповідного до ДР (2.1) однорідного рівняння

$$y'' + 9y = 0 \tag{2.2}$$

аналогічно до Прикладів 1.1-1.4. Запишемо характеристичне рівняння для ДР (2.2):

$$\lambda^2 + 9 = 0.$$

Останнє рівняння має комплексні корені $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Згідно з правилами методу Ейлера цій парі комплексно спряжених коренів відповідають два лінійно незалежні частинні розв’язки ДР (2.2) вигляду

$$\varphi_1(x) = \cos 3x, \quad \varphi_2(x) = \sin 3x,$$

а загальний розв’язок ДР (2.2) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв’язків:

$$y_{з.о.} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Тоді згідно з алгоритмом методу варіації сталих загальний розв’язок неоднорідного ДР (2.1) слід шукати у вигляді

$$y = C_1(x)\cos 3x + C_2(x)\sin 3x, \tag{2.3}$$

де невідомі функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ визначаються із системи Лаґранжа

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 3x + C_2'(x)\sin 3x = 0, \\ -3C_1'(x)\sin 3x + 3C_2'(x)\cos 3x = 3\csc 3x \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 3x + C_2'(x)\sin 3x = 0, \\ -C_1'(x)\sin 3x + C_2'(x)\cos 3x = \dfrac{1}{\sin 3x}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Детермінант системи (2.4) рівний

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -\sin 3x & \cos 3x \end{vmatrix} = 1,$$

а тоді

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \begin{vmatrix} 0 & \sin 3x \\ \sin^{-1} 3x & \cos 3x \end{vmatrix} = -1 \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = -x + \overline{C}_1,$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -\sin 3x & \sin^{-1} 3x \end{vmatrix} = \operatorname{ctg} 3x \quad \Rightarrow \quad C_2(x) = \frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + \overline{C}_2,$$

де $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$ – довільні сталі.

Підставивши знайдені функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ у (2.3), одержимо шуканий загальний розв’язок неоднорідного ДР (2.1).

Відповідь. $y = (\overline{C}_1 - x)\cos 3x + \left(\overline{C}_2 + \frac{1}{3}\ln|\sin 3x|\right)\sin 3x$.

Приклад 2.2. Із застосуванням методу Лаґранжа розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y''' - y'' = 6e^{3x} \tag{2.5}$$

за початкових умов

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \tag{2.6}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного до (2.5) однорідного ДР

$$y''' - y'' = 0. \tag{2.7}$$

аналогічно до попередніх прикладів. Запишемо характеристичне рівняння для ДР (2.7):

$$\lambda^3 - \lambda^2 \equiv \lambda^2(\lambda - 1) = 0,$$

звідки $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 1$. Згідно з правилами методу Ейлера двократному дійсному кореню $\lambda = 0$ відповідають два лінійно незалежні частинні розв'язки ДР (2.7) вигляду

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = x,$$

тоді як однократному дійсному кореню $\lambda_3 = 1$ відповідає частинний розв'язок ДР (2.7) $\varphi_3(x) = e^x$. Загальний розв'язок ДР (2.7) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв'язків:

$$y_{з.о.} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x. \tag{2.8}$$

Тоді згідно з алгоритмом методу варіації сталих загальний розв'язок неоднорідного ДР (2.5) слід шукати у вигляді

$$y = C_1(x) + C_2(x)\cdot x + C_3(x)e^x, \tag{2.9}$$

де невідомі функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ визначаються із системи Лаґранжа

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cdot x + C_3'(x)e^x = 0, \\ C_2'(x) + C_3'(x)e^x = 0, \\ C_3'(x)e^x = 6e^{3x}, \end{cases}$$

звідки послідовно визначаємо

$$C_3'(x) = 6e^{2x} \quad \Rightarrow \quad C_3(x) = 3e^{2x} + \overline{C}_3,$$
$$C_2'(x) = -6e^{3x} \quad \Rightarrow \quad C_2(x) = -2e^{3x} + \overline{C}_2,$$
$$C_1'(x) = 6(x-1)e^{3x} \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = \frac{6x-8}{3}e^{3x} + \overline{C}_1$$

де $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, $\overline{C}_3$ – довільні сталі.

Підставивши знайдені функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ у (2.9), одержимо загальний розв'язок неоднорідного ДР (2.5)

$$y = \overline{C}_1 + \frac{6x-8}{3}e^{3x} + (\overline{C}_2 - 2e^{3x})\cdot x + (\overline{C}_3 + 3e^{2x})\cdot e^x$$

або після спрощення

$$y=\overline{C}_1+\overline{C}_2x+\overline{C}_3\,\mathrm{e}^x+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}. \tag{2.10}$$

Виділимо з (2.10) частинний розв’язок, який справджує початкові умови (2.6). Підставивши (2.10) у (2.6), одержимо алгебраїчну систему для визначення невідомих сталих $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, $\overline{C}_3$

$$\left.\begin{aligned} y(0)&\equiv\overline{C}_1+\overline{C}_3+\frac{1}{3}=0,\\ y'(0)&\equiv\overline{C}_2+\overline{C}_3+1=0,\\ y''(0)&\equiv\overline{C}_3+3=0, \end{aligned}\right\}$$

звідки $\overline{C}_1=\dfrac{8}{3}$, $\overline{C}_2=2$, $\overline{C}_3=-3$. Підставивши знайдені значення сталих у (2.10), одержимо шуканий розв’язок задачі Коші (2.5)-(2.6).

Відповідь. $y=2x-3\mathrm{e}^x+\dfrac{8+\mathrm{e}^{3x}}{3}$.

3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів

Приклад 3.1. Побудувати загальний розв’язок рівняння (2.5) із застосуванням методу невизначених коефіцієнтів.

Розв’язання. Вільний член рівняння (2.5) має вигляд квазіполінома, тому до даного рівняння застосовний метод невизначених коефіцієнтів. Згідно з алгоритмом цього методу загальний розв’язок ДР (2.5) шукаємо у вигляді

$$y=Y(x)+y_0(x), \tag{3.1}$$

де $Y(x)$ – загальний розв’язок відповідного до (2.5) однорідного ДР (2.7), а $y_0(x)$ – деякий частинний розв’язок неоднорідного ДР (2.5).

Зауважимо, що знаходження $Y(x)$ викладене у Прикладі 2.2, і ця складова шуканого розв’язку (3.1) дається формулою (2.8). Знайдемо другу складову $y_0(x)$, виписавши спочатку її загальний вигляд відповідно до правил методу невизначених коефіцієнтів: якщо вільний член рівняння має вигляд квазіполінома

$$f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_{s_1}(x)\cos\beta x+Q_{s_2}(x)\sin\beta x\right), \tag{3.2}$$

де $P_{s_1}(x)$, $Q_{s_2}(x)$ – поліноми степенів s_1 і s_2 відповідно; α, β – відомі дійсні числа, то частинний розв’язок $y_0(x)$ неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді подібного до (3.2) квазіполінома

$$y_0(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\overline{P}_s(x)\cos\beta x+\overline{Q}_s(x)\sin\beta x\right)\cdot x^m, \tag{3.3}$$

де $s=\max\{s_1,s_2\}$, а число m рівне кратності кореня характеристичного рівняння (контрольного числа) $\gamma=\alpha+i\beta$.

У нашому випадку $f(x)=6\mathrm{e}^{3x}$. Порівнюючи з (3.2), визначаємо контрольне число:

$$\alpha=3,\quad \beta=0\quad\Rightarrow\quad \gamma=\alpha+i\beta=3.$$

Це число не є коренем характеристичного рівняння (див. Приклад 2.2), тому його кратність $m=0$. Числовий коефіцієнт при експоненті є поліномом нульового степеня, тому $s=0$.

Виходячи зі знайдених чисел, виписуємо частинний розв'язок на підставі формули (3.3):

$$y_0(x)=\mathrm{e}^{3x}[\overline{P}_0(x)\cos(0\cdot x)+\overline{Q}_0(x)\sin(0\cdot x)]\cdot x^0=\mathrm{e}^{3x}\,\overline{P}_0(x)=A\,\mathrm{e}^{3x},$$

де A – невизначений коефіцієнт, числове значення якого належить знайти із неоднорідного рівняння (2.5) безпосередньою підстановкою.

Отже, маємо: $y_0''(x)=9A\,\mathrm{e}^{3x}$, $y_0'''(x)=27A\,\mathrm{e}^{3x}$. Підставивши у (2.5), одержимо

$$27A\,\mathrm{e}^{3x}-9A\,\mathrm{e}^{3x}=6\,\mathrm{e}^{3x},$$

звідки $A=\dfrac{1}{3}$ і $y_0(x)=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$. Тоді згідно з (3.1) із урахуванням (2.8)

$$y=C_1+C_2x+C_3\,\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x},$$

що цілком узгоджується з формулою (2.10), отриманою із застосуванням методу Лаґранжа.

Відповідь. $y=C_1+C_2x+C_3\,\mathrm{e}^{x}+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$.

Приклад 3.2. Записати загальний розв'язок рівняння

$$y^{(6)}-5y^{(4)}+4y''=5x^2(2-\mathrm{e}^{-2x})-1+\cos 6x+3x(\mathrm{e}^{4x}-\sin x)-9\cos x+7\,\mathrm{e}^{x} \tag{3.4}$$

із невизначеними коефіцієнтами (числових значень коефіцієнтів не знаходити).

Розв'язання. Вільний член рівняння (3.4) має вигляд суми квазіполіномів, тому до даного рівняння застосовний метод невизначених коефіцієнтів. Згідно з алгоритмом цього методу загальний розв'язок ДР (3.4) шукаємо у вигляді (3.1), де $Y(x)$ – загальний розв'язок відповідного до (3.5) однорідного ДР

$$y^{(6)}-5y^{(4)}+4y''=0, \tag{3.5}$$

а $y_0(x)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного ДР (3.4).

Знайдемо спочатку $Y(x)$. Для цього запишемо характеристичне рівняння для ДР (3.5):

$$\lambda^6-5\lambda^4+4\lambda^2\equiv\lambda^2(\lambda^4-5\lambda^2+4)=0,$$

звідки $\lambda_{1,2}=0$, $\lambda_{3,4}=\pm1$, $\lambda_{5,6}=\pm2$. Згідно з правилами методу Ейлера цим кореням відповідають частинні розв'язки

$$\varphi_1(x)=1,\quad \varphi_2(x)=x,\quad \varphi_3(x)=\mathrm{e}^{x},\quad \varphi_4(x)=\mathrm{e}^{-x},\quad \varphi_5(x)=\mathrm{e}^{2x},\quad \varphi_6(x)=\mathrm{e}^{-2x}.$$

Тоді загальний розв'язок ДР (3.5) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв'язків:

$$Y(x)=C_1+C_2x+C_3\,\mathrm{e}^{x}+C_4\,\mathrm{e}^{-x}+C_5\,\mathrm{e}^{2x}+C_6\,\mathrm{e}^{-2x}. \tag{3.6}$$

Випишемо загальний вигляд частинного розв'язку $y_0(x)$ відповідно до правил методу невизначених коефіцієнтів. Для цього виділимо з вільного члена рівняння (3.4) доданки, яким відповідають різні контрольні числа – у цьому можна переконатися, порівнюючи кожен доданок із загальним виглядом (3.2), – і тоді $y_0(x)$ буде сумою частинних розв'язків, побудованих за формулою (3.3) для кожного з квазіполіномів, утвореного з доданків, яким відповідає однакове контрольне число. Таких квазіполіномів отримуємо шість:

$$f_1(x)=10x^2-1,\quad f_2(x)=-5x^2\mathrm{e}^{-2x},\quad f_3(x)=\cos 6x,$$

$$f_4(t)=3x\mathrm{e}^{4x},\quad f_5(x)=-3x\sin x-9\cos x,\quad f_6(x)=7\mathrm{e}^{x}\ .$$

Визначимо вигляд частинного розв'язку для кожного з цих квазіполіномів.

1. Для функції $f_1(x)$ маємо: $\alpha=0$ (числовий коефіцієнт у степені експоненти), $\beta=0$ (числовий коефіцієнт в аргументі косинуса чи синуса), тоді контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=0$. Це число є двократним коренем характеристичного рівняння (маємо ***резонансний випадок***), тому $m=2$. Останнє необхідне для застосування формули (3.3) число $s=2$ (маємо поліном другого степеня). Підставивши визначені α, β, m і s у формулу (3.3), одержимо загальний вигляд першої складової частинного розв'язку

$$y_{01}(x)=\overline{P}_2(x)\cdot x^2=Ax^4+Bx^3+Cx^2.$$

2. Для функції $f_2(x)$ маємо: $\alpha=-2$, $\beta=0$, тоді контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=-2$. Це число є однократним коренем характеристичного рівняння, тому $m=1$. Коефіцієнт при експоненті є поліномом другого степеня, тому $s=2$. Підставивши визначені α, β, m і s у формулу (3.3), одержимо загальний вигляд другої складової частинного розв'язку

$$y_{02}(x)=\overline{P}_2(x)\mathrm{e}^{-2x}\cdot x=(Dx^3+Ex^2+Fx)\mathrm{e}^{-2x}.$$

3. Для функції $f_3(x)$ маємо: $\alpha=0$, $\beta=6$, і контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=6i$. Це число не є коренем характеристичного рівняння (***нерезонансний випадок***), тому $m=0$. Також очевидно $s=0$. Підставивши визначені α, β, m і s у формулу (3.3), одержимо загальний вигляд третьої складової частинного розв'язку

$$y_{03}(x)=\overline{P}_0(x)\cos 6x+\overline{Q}_0(x)\sin 6x=G\cos 6x+H\sin 6x.$$

4. Для функції $f_4(x)$ маємо: $\alpha=4$, $\beta=0$, і контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=4$. Це число не є коренем характеристичного рівняння, тому $m=0$. Також очевидно $s=1$. Підставивши визначені α, β, m і s у формулу (3.3), одержимо загальний вигляд четвертої складової частинного розв'язку

$$y_{04}(x)=\overline{P}_1(x)\mathrm{e}^{4x}=(Ix+J)\mathrm{e}^{4x}.$$

5. Для функції $f_5(x)$ маємо: $\alpha=0$, $\beta=1$, і контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=i$. Це число не є коренем характеристичного рівняння, тому $m=0$. При синусі маємо поліном першого степеня, тому $s=1$. Підставивши визначені α, β, m і s у формулу (3.3), одержимо загальний вигляд п'ятої складової частинного розв'язку

$$y_{05}(x)=\overline{P}_1(x)\cos x+\overline{Q}_1(x)\sin 6x=(Kx+L)\cos x+(Mx+N)\sin x.$$

6. Для функції $f_6(x)$ маємо: $\alpha=1$, $\beta=0$, тоді контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=1$. Це число є однократним коренем характеристичного рівняння, тому $m=1$. Коефіцієнт при експоненті є поліномом нульового степеня, тому $s=0$. Підставивши визначені α, β, m і s у формулу (3.3), одержимо загальний вигляд шостої складової частинного розв'язку

$$y_{06}(x)=\overline{P}_0(x)\mathrm{e}^{x}\cdot x=Ox\mathrm{e}^{x}.$$

Шуканий частинний розв’язок $y_0(x)$ буде сумою шести його складових. Позначені літерами коефіцієнти теоретично можна знайти безпосередньою підстановкою $y_0(x)$ у рівняння (3.4), однак у завданні знаходження їх числових значень не вимагається.
Згідно з формулою (3.1) загальний розв’язок неоднорідного рівняння (3.4) рівний сумі побудованого частинного розв’язку $y_0(x)$ і загального розв’язку (3.6) відповідного однорідного рівняння.

Відповідь.

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{x} + C_4 e^{-x} + C_5 e^{2x} + C_6 e^{-2x} + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 +$$
$$+ (Dx^3 + Ex^2 + Fx) e^{-2x} + G\cos 6x + H\sin 6x + (Ix + J) e^{4x} +$$
$$+ (Kx + L)\cos x + (Mx + N)\sin x + Ox e^{x}.$$

Приклад 3.3. Знайти розв’язок задачі Коші для диференціального рівняння

$$y'' - 9y = e^{3x}\cos x \qquad (3.7)$$

за початкових умов

$$y(0) = -\frac{1}{37}, \quad y'(0) = \frac{3}{37}. \qquad (3.8)$$

Розв’язання. Вільний член рівняння (3.7) має вигляд квазіполінома, тому до даного рівняння застосовний метод невизначених коефіцієнтів. Згідно з алгоритмом цього методу загальний розв’язок ДР (2.5) шукаємо у вигляді (3.1), де $Y(x)$ – загальний розв’язок відповідного до (3.7) однорідного ДР

$$y'' - 9y = 0, \qquad (3.9)$$

а $y_0(x)$ – деякий частинний розв’язок неоднорідного ДР (3.7).
Знайдемо спочатку $Y(x)$. Для цього запишемо характеристичне рівняння для ДР (3.9):

$$\lambda^2 - 9 = 0,$$

звідки $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$. Згідно з правилами методу Ейлера цим кореням відповідають частинні розв’язки

$$\varphi_1(x) = e^{-3x}, \quad \varphi_2(x) = e^{3x}.$$

Тоді загальний розв’язок ДР (3.9) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв’язків:

$$Y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}. \qquad (3.10)$$

Знайдемо частинний розв’язок $y_0(x)$, виписавши спочатку його загальний вигляд відповідно до правил методу невизначених коефіцієнтів.
Для вільного члена $f(x) = e^{3x}\cos x$ маємо: $\alpha = 3$, $\beta = 1$, і контрольне число $\gamma = \alpha + i\beta = 3 + i$. Це число не є коренем характеристичного рівняння, тому $m = 0$.
Також очевидно $s = 0$. Підставивши визначені α, β, m і s у формулу (3.3), одержимо загальний вигляд частинного розв’язку:

$$y_0(x) = e^{3x}[\overline{P}_0(x)\cos x + \overline{Q}_0(x)\sin x] = e^{3x}(A\cos x + B\sin x), \qquad (3.11)$$

де A, B – невизначені коефіцієнти, числові значення яких належить знайти шляхом безпосередньої підстановки (3.11) у неоднорідне рівняння (3.7).
Маємо:

$$y_0'(x) = e^{3x}(3A\cos x + 3B\sin x - A\sin x + B\cos x),$$
$$y_0''(x) = e^{3x}(8A\cos x + 8B\sin x - 6A\sin x + 6B\cos x).$$

Підставивши у (2.5), одержимо

$$e^{3x}(8A\cos x + 8B\sin x - 6A\sin x + 6B\cos x) - 9e^{3x}(A\cos x + B\sin x) = e^{3x}\cos x,$$

або після спрощення

$$-A\cos x - B\sin x - 6A\sin x + 6B\cos x = \cos x.$$

Прирівнюючи в останній рівновті коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$, одержимо систему для визначення A і B:

$$\begin{cases} -A + 6B = 1, \\ -6A - B = 0, \end{cases}$$

звідки $A = -\dfrac{1}{37}$, $B = \dfrac{6}{37}$. Тоді згідно з (3.1) із урахуванням (3.10) і (3.11) загальний розв'язок ДР (3.7) запишеться у вигляді

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} + e^{3x}\left(\frac{6}{37}\sin x - \frac{1}{37}\cos x\right). \tag{3.12}$$

Виділимо з (3.12) частинний розв'язок, який справджує початкові умови (3.8). Підставивши (3.12) у (3.8), одержимо алгебраїчну систему для визначення невідомих сталих C_1, C_2

$$\left.\begin{aligned} y(0) &\equiv C_1 + C_2 - \frac{1}{37} = -\frac{1}{37}, \\ y'(0) &\equiv -3C_1 + 3C_2 + \frac{3}{37} = \frac{3}{37}, \end{aligned}\right\}$$

звідки $C_1 = C_2 = 0$. Підставивши знайдені значення сталих у (3.12), одержимо шуканий розв'язок задачі Коші (3.7)-(3.8).

Відповідь. $y = e^{3x}\left(\dfrac{6}{37}\sin x - \dfrac{1}{37}\cos x\right)$.

4. Рівняння Ейлера та Лежандра

Приклад 4.1. Розв'язати рівняння Ейлера

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 4x - 1. \tag{4.1}$$

Розв'язання. Зведемо рівняння Ейлера (4.1) до лінійного ДР зі сталими коефіцієнтами заміною незалежної змінної $x = e^t$, $t = \ln x$. Тоді

$$y'(x) = e^{-t}\, y'(t), \quad y''(x) = e^{-2t}[y''(t) - y'(t)],$$

і після підстановки в (4.1) одержимо

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}[y''(t) - y'(t)] - 2e^t \cdot e^{-t}\, y'(t) + 2y(t) = 4e^t - 1,$$

або після спрощення

$$y'' - 3y' + 2y(t) = 4e^t - 1. \tag{4.2}$$

Вільний член рівняння (4.2) має вигляд суми квазіполіномів, тому до даного рівняння застосовний метод невизначених коефіцієнтів. Маємо:

$$y = Y(t) + y_0(t), \tag{4.3}$$

де $Y(t)$ – загальний розв'язок відповідного до (4.2) однорідного ДР

$$y'' - 3y' + 2y(t) = 0, \tag{4.4}$$

а $y_0(t)$ – деякий частинний розв’язок неоднорідного ДР (4.2).
Знайдемо спочатку $Y(t)$. Для цього запишемо характеристичне рівняння для ДР (4.4):

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

звідки $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Згідно з правилами методу Ейлера цим кореням відповідають частинні розв’язки

$$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^t, \quad \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{2t}.$$

Тоді загальний розв’язок ДР (4.4) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв’язків:

$$Y(t) = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{2t}. \tag{4.5}$$

Знайдемо частинний розв’язок $y_0(t)$, виписавши спочатку його загальний вигляд відповідно до правил методу невизначених коефіцієнтів. Для цього розглянемо окремо кожен із доданків вільного члена рівняння (4.2), оскільки їм відповідають різні контрольні числа. Маємо два квазіполіноми:

$$f_1(t) = 4\,\mathrm{e}^t, \quad f_2(t) = -1,$$

Визначимо вигляд частинного розв’язку для кожного з цих квазіполіномів.

1. Для функції $f_1(t)$ маємо: $\alpha = 1$, $\beta = 0$, тоді контрольне число $\gamma = \alpha + i\beta = 1$. Це число є однократним коренем характеристичного рівняння, тому $m = 1$. Також очевидно $s = 0$. Тоді з урахуванням формули (3.3) одержимо загальний вигляд першої складової частинного розв’язку

$$y_{01}(t) = \overline{P}_0(t)\,\mathrm{e}^t \cdot t = At\,\mathrm{e}^t.$$

2. Для функції $f_2(t)$ маємо: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, тоді контрольне число $\gamma = \alpha + i\beta = 0$. Це число не є коренем характеристичного рівняння, тому $m = 0$. Також очевидно $s = 0$. Тоді з урахуванням формули (3.3) одержимо загальний вигляд другої складової частинного розв’язку

$$y_{02}(t) = \overline{P}_0(t) = B.$$

Отже, шуканий частинний розв’язок має вигляд

$$y_0(t) = At\,\mathrm{e}^t + B, \tag{4.6}$$

де A, B – невизначені коефіцієнти, числові значення яких належить знайти шляхом безпосередньої підстановки (4.6) у неоднорідне рівняння (4.2).
Маємо:

$$y_0'(t) = \mathrm{e}^t(At + A), \quad y_0''(x) = \mathrm{e}^t(At + 2A).$$

Підставивши у (4.2), одержимо

$$\mathrm{e}^t(At + 2A) - 3\,\mathrm{e}^t(At + A) + 2(At\,\mathrm{e}^t + B) = 4\,\mathrm{e}^t - 1,$$

або після спрощення

$$-A\,\mathrm{e}^t + 2B = 4\,\mathrm{e}^t - 1.$$

звідки очевидно $A = -4$, $B = -\dfrac{1}{2}$. Тоді згідно з (4.3) із урахуванням (4.5) і (4.6) загальний розв’язок ДР (4.2) запишеться у вигляді

$$y = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{2t} - 4t\,\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}. \tag{4.7}$$

Ввівши в (4.7) обернену підстановку незалежної змінної $t = \ln x$, одержимо шуканий загальний розв’язок рівняння Ейлера (4.1).

Відповідь. $y = C_1 x + C_2 x^2 - 4x\ln x - \dfrac{1}{2}$.

Приклад 4.2. Розв'язати рівняння Лежандра

$$(3x-1)^2 y'' + 3\cdot(3x-1)y' + 9y = 6x-2. \tag{4.8}$$

Розв'язання. Зведемо рівняння Лежандра (4.8) до лінійного ДР зі сталими коефіцієнтами заміною $3x-1=\mathrm{e}^t$, $t=\ln(3x-1)$. Тоді

$$y'(x) = 3\mathrm{e}^{-t}\, y'(t), \quad y''(x) = 9\mathrm{e}^{-2t}[y''(t) - y'(t)],$$

і після підстановки в (4.8) одержимо

$$\mathrm{e}^{2t}\cdot 9\mathrm{e}^{-2t}[y''(t) - y'(t)] + 3\mathrm{e}^{t}\cdot 3\mathrm{e}^{-t}\, y'(t) + 9y(t) = 2t,$$

або після спрощення

$$y'' + y(t) = \frac{2t}{9}. \tag{4.9}$$

Вільний член рівняння (4.9) має вигляд квазіполінома, тому до даного рівняння застосовний метод невизначених коефіцієнтів. Згідно з алгоритмом цього методу загальний розв'язок ДР (4.9) шукаємо у вигляді (4.3), де $Y(t)$ – загальний розв'язок відповідного до (4.9) однорідного ДР

$$y'' + y(t) = 0, \tag{4.10}$$

а $y_0(t)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного ДР (4.9).
Знайдемо спочатку $Y(t)$. Для цього запишемо характеристичне рівняння для ДР (4.10):

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

звідки $\lambda_{1,2} = \pm i$. Згідно з правилами методу Ейлера цим кореням відповідають частинні розв'язки

$$\varphi_1(t) = \cos t, \quad \varphi_2(t) = \sin t.$$

Тоді загальний розв'язок ДР (4.10) подається у вигляді лінійної комбінації знайдених частинних розв'язків:

$$Y(t) = C_1\cos t + C_2\sin t. \tag{4.11}$$

Знайдемо частинний розв'язок $y_0(t)$, виписавши спочатку його загальний вигляд відповідно до правил методу невизначених коефіцієнтів. Для вільного члена ДР (4.9) визначаємо: $\alpha=0$, $\beta=0$, тоді контрольне число $\gamma=\alpha+i\beta=0$. Це число не є коренем характеристичного рівняння, тому $m=0$. Також очевидно $s=1$. Тоді з урахуванням формули (3.3) одержимо загальний вигляд частинного розв'язку

$$y_0(t) = \overline{P_1}(t) = At + B, \tag{4.12}$$

де A, B – невизначені коефіцієнти, числові значення яких належить знайти шляхом безпосередньої підстановки (4.12) у неоднорідне рівняння (4.9).
Маємо:

$$y_0'(t) = A, \quad y_0''(t) = 0.$$

Підставивши у (4.9), одержимо

$$At + B = \frac{2t}{9},$$

звідки очевидно $A = \frac{2}{9}$, $B = 0$. Тоді згідно з (4.3) із урахуванням (4.11) і (4.12) загальний розв'язок ДР (4.9) запишеться у вигляді

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{2t}{9}. \tag{4.13}$$

Ввівши в (4.13) обернену підстановку незалежної змінної $t = \ln(3x-1)$, одержимо шуканий загальний розв'язок рівняння Лежандра (4.8).

Відповідь. $y = C_1 \cos\ln(3x-1) + C_2 \sin\ln(3x-1) + \frac{2}{9}\ln(3x-1)$.

Примітка. Необхідні теоретичні відомості по темах розділу:
Маринець К. В. Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи диференціальних рівнянь першого порядку. – Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння», частина II. – Ужгород: «Говерла», 2017. – С. 26-50.
Лекції до Модуля 3 – Лінійні рівняння вищих порядків.