Курс: «Диференціальні рівняння» **ст. викл. Рего В. Л.**
До Модуля 4
Цикл лекцій по темах розділу:

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1. Системи в симетричній формі

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь (СДР) у нормальній формі

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \tag{1.1}$$

Визначивши dx із кожного з рівнянь СДР (1.1) і прирівнявши отримані значення, дістанемо еквівалентні до (1.1) співвідношення

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \dots, y_n)} = \frac{dx}{1}. \tag{1.2}$$

Домноживши в (1.2) знаменники дробів на деякий коефіцієнт $\alpha(x, y_1, \dots, y_n) \neq 0$, ввівши нові змінні за формулами

$$z_1 = y_1, \quad \dots, \quad z_n = y_n, \quad z_{n+1} = x,$$

і позначивши

$$b_j(z_1, \dots, z_{n+1}) = f_j(z_{n+1}, z_1, \dots, z_n) \cdot \alpha(z_{n+1}, z_1, \dots, z_n), \quad j = \overline{1, n},$$

$$b_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1}) = 1 \cdot \alpha(z_{n+1}, z_1, \dots, z_n),$$

отримаємо так звану ***симетричну форму*** системи (1.1)

$$\frac{dz_1}{b_1(z_1, \dots, z_{n+1})} = \dots = \frac{dz_n}{b_n(z_1, \dots, z_{n+1})} = \frac{dz_{n+1}}{b_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1})}, \tag{1.3}$$

де немає явно визначених незалежних або залежних змінних.
Якщо потрібно перейти від симетричної форми (1.3) до системи в нормальному вигляді (1.1), то для цього в (1.3) одну зі змінних, наприклад, z_{n+1}, слід призначити незалежною змінною, і тоді з (1.3) отримаємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dz_{n+1}} = \dfrac{b_1(z_1, \dots, z_{n+1})}{b_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1})}, \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dz_n}{dz_{n+1}} = \dfrac{b_n(z_1, \dots, z_{n+1})}{b_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1})}. \end{cases}$$

Введемо поняття загального розв’язку системи звичайних диференціальних рівнянь (1.1).

Означення 1 (*поняття загального розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь*). Система n довільних лінійно незалежних функцій, неперервно-диференційовних за змінною x, і залежних від n параметрів c_1, c_2, ..., c_n (сталих інтегрування)

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, c_1, c_2, ..., c_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, c_1, c_2, ..., c_n), \\ \quad\vdots \\ y_n = \varphi_n(x, c_1, c_2, ..., c_n), \end{cases} \tag{1.4}$$

$\varphi_i : T_2 = I_x \times D_c \to \mathrm{R}$, $T_2 \subset \mathrm{R}^{n+1}$, $i = \overline{1,n}$ з обмеженою чи необмеженою областю визначення $(x, c_1, c_2, ..., c_n) \in I_x \times D_c = T_2 \subset \mathrm{R}^{n+1}$, складає загальний розв'язок СДР (1.1) в області $T = I_x \times D_y$, якщо:

1) $(x, \varphi_1(x, c_1, c_2, ..., c_n), ..., \varphi_n(x, c_1, c_2, ..., c_n)) \in T$ для $\forall (x, c_1, c_2, ..., c_n) \in T_2$;

2) $\dfrac{\partial \varphi_i(x, c_1, c_2, ..., c_n)}{\partial x} = f_i(x, \varphi_1(x, c_1, c_2, ..., c_n), ..., \varphi_n(x, c_1, c_2, ..., c_n))$, $i = \overline{1,n}$;

3) для $\forall (x, y_1, y_2, ..., y_n) \in T$ система (1.4) однозначно розв'язна відносно c_1, c_2, ..., c_n:

$$\begin{cases} c_1 = \psi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ c_2 = \psi_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \quad\vdots \\ c_n = \psi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \tag{1.5}$$

Означення 2 (*інтеграли та «перші інтеграли» СДР*). Кожну з функцій $\psi_i : I_x \times D_y \to \mathrm{R}$, $i = \overline{1,n}$, що фігурують у правій частині рівнянь системи (1.5), називають ***інтегралом*** СДР (1.1), а відповідне співвідношення $\psi_i = c_i$ називається ***«першим інтегралом»*** СДР (1.1).
Із (1.5) випливає: сукупність n лінійно незалежних «перших інтегралів» СДР (1.1) складає загальний інтеграл цієї системи.

Для відшукання «перших інтегралів» доцільно замінити СДР (1.1) еквівалентною системою в симетричній формі (1.2) або (1.3), і інтегрувати останню шляхом побудови лінійно незалежних інтегровних комбінацій.
Інтегровною комбінацією шуканих функцій та їх похідних називається будь-яке диференціальне рівняння, яке є наслідком системи і легко інтегрується. Побудувавши k лінійно незалежних інтегровних комбінацій для заданої СДР n-го порядку, можна понизити порядок останньої на k одиниць. Якщо вдалося побудувати n таких комбінацій, то з них можна отримати n лінійно незалежних «перших інтегралів» СДР, які складають загальний інтеграл у вигляді (1.5), і таким чином знаходження загального розв'язку (1.4) можна звести до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь.

Із метою побудови інтегровних комбінацій для систем у симетричній формі вигляду (1.2) або (1.3) найчастіше застосовують правило рівності дробів, яке задається співвідношеннями

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\ldots+k_nb_n}, \tag{1.6}$$

де $a_i,\ b_i,\ k_i=const$, $i=\overline{1,n}$.

Якщо побудовані кілька інтегровних комбінацій, то ними за потреби можна скористатися для відшукання наступних шляхом виключення змінних із отриманих «перших інтегралів».

Наприклад, для системи в симетричній формі

$$\frac{xdx}{y^2(z^2+3x^2)}=-\frac{dy}{y(z^2+x^2)}=\frac{dz}{zy^2} \tag{1.7}$$

із застосуванням (1.6) можна утворити інтегровну комбінацію

$$\frac{xdx+ydy}{2x^2y^2}=\frac{ydy+zdz}{-x^2y^2} \quad\Rightarrow\quad d\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)=-2d\left(\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right),$$

із якої отримуємо «перший інтеграл»

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=-y^2-z^2+c_1 \quad\Rightarrow\quad c_1=\frac{x^2}{2}+\frac{3y^2}{2}+z^2.$$

Другу інтегровну комбінацію можна отримати, наприклад, визначивши з останньої рівності x^2 і підставивши в другий і третій дроби симетричної системи (1.7):

$$x^2=2c_1-3y^2-2z^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{y(3y^2+z^2-2c_1)}=\frac{dz}{zy^2}.$$

Останню рівність можна переписати у вигляді рівняння Бернуллі

$$\frac{dy}{dz}-\frac{3y}{z}=\frac{z^2-2c_1}{zy},$$

після інтегрування якого дістанемо другий «перший інтеграл», очевидно незалежний відносно першого.

Зауважимо, що у випадку системи (1.7) другу інтегровну комбінацію можна побудувати й простішим шляхом, прирівнявши перший і третій дроби:

$$\frac{xdx}{y^2(z^2+3x^2)}=\frac{dz}{zy^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{dx}=\frac{xz}{z^2+3x^2}.$$

Останнє рівняння інтегрується як нелінійне однорідне або як рівняння Бернуллі відносно шуканої функції $x(z)$.

2. Основні поняття та означення теорії ДРЧП

Означення 3 (***поняття диференціального рівняння з частинними похідними***)**.** Скалярна нетотожна рівність, яка пов’язує деякою функціональною залежністю незалежні змінні $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, невідому функцію цих змінних $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ та її частинні похідні за цими змінними до певного порядку, називається ***диференціальним рівнянням із частинними похідними*** (ДРЧП).

Означення 4 (*поняття порядку ДРЧП*). ДРЧП називається ***рівнянням m-го порядку***, якщо воно містить хоча б одну частинну похідну *m*-го порядку і не містить похідних вищих порядків.

У загальному випадку ДРЧП *m*-го порядку має вигляд

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_n}, ..., u_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}}\right) = 0,$$

де $\sum_{i=1}^{n} k_i = m,\ F$ – задана функція своїх аргументів, а

$$u_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}} = \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_n^{k_n}}.$$

Серед диференціальних рівнянь із частинними похідними (ДРЧП) є такі класи рівнянь, а саме лінійні та квазілінійні рівняння першого порядку, розв'язки яких можна отримати шляхом розв'язування побудованих відповідним чином звичайних диференціальних рівнянь.

Означення 5 (*поняття ДРЧП першого порядку*). ДРЧП першого порядку для функції *n* змінних $u : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R},\ (x_1, ..., x_n) \mapsto u(x_1, ..., x_n)$ має загальний вигляд

$$F\left(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{2.1}$$

де $F : \mathrm{R}^{2n+1} \to \mathrm{R}$ задана функція.

Рівняння вигляду

$$p_1(x_1, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + p_n(x_1, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{2.2}$$

називають ***лінійним однорідним ДРЧП першого порядку***.

Рівняння вигляду

$$p_1(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + p_n(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = q(x_1, ..., x_n, u) \tag{2.3}$$

називають ***квазілінійним неоднорідним ДРЧП першого порядку***, де коефіцієнти $p_1, ..., p_n$ – задані функції, неперервно-диференційовні в області визначення $(x_1, ..., x_n, u) \in T \subset \mathrm{R}^{n+1}$.

Означення 6 (*розв'язок ДРЧП першого порядку*). Функція $u : D \subset \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ називається розв'язком ДРЧП (2.3) в області *D*, якщо

1) $u(x_1, ..., x_n)$ неперервно-диференційовна в області *D*;

2) $(x_1, ..., x_n, u) \in T$ для $\forall (x_1, ..., x_n) \in D$;

3) $u(x_1,...,x_n)$ справджує рівняння (2.3) для $\forall(x_1,...,x_n)\in D$.
Наприклад, для лінійного однорідного ДРЧП

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial u}{\partial x_3}=0 \tag{2.4}$$

функція $u(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1^2}{x_2^2}+\dfrac{x_2^2}{x_3^2}+2$ є розв'язком в області $x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0$, тому що після підстановки її частинних похідних у (2.4) маємо

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial u}{\partial x_3}=x_1\frac{2x_1}{x_2^2}-x_2\frac{2x_1^2x_2}{x_2^4}+x_2\frac{2x_2}{x_3^2}-x_3\frac{2x_2^2x_3}{x_3^4}\equiv 0;$$

тоді як функція $u(x_1,x_2,x_3)=x_1x_3+x_2x_3$ не є розв'язком ДРЧП (2.4), оскільки в цьому випадку

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial u}{\partial x_3}=x_1x_3+x_2x_3+x_3(x_1+x_3)\neq 0.$$

Означення 7 (*задача Коші для ДРЧП першого порядку*). Задача Коші для ДРЧП першого порядку (2.1) полягає у знаходженні такого розв'язку $u(x_1,x_2,...,x_n)$, який справджує початкову умову $u(x_{1,0},x_2,...,x_n)=\varphi(x_2,...,x_n)$, де φ – наперед задана функція.

Дамо геометричну інтерпретацію ДРЧП першого порядку на прикладі рівняння для функції двох змінних $z(x,y)$, яке має вигляд

$$F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},...,\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0. \tag{2.5}$$

Постановка задачі Коші для ДРЧП (2.5): знайти такий розв'язок $z(x,y)$ ДРЧП (2.5), який справджує початкову умову $z(x_0,y)=\varphi(y)$ або $z(x,y_0)=\varphi(x)$.
Геометрична інтерпретація: ДРЧП (2.5) є співвідношенням, що пов'язує координати x, y, z деякої поверхні $z=z(x,y)$, яка називається ***інтегральною поверхнею*** ДРЧП (2.5), та кутові коефіцієнти дотичної площини до цієї поверхні. Початкова умова задає деяку просторову криву, через яку проходить інтегральна поверхня. Якщо через криву $z=\varphi(y)$ [або $z=\varphi(x)$] проходить нескінченна кількість інтегральних поверхонь, то таку криву називають ***характеристикою*** ДРЧП (2.5).

3. Лінійні однорідні ДРЧП першого порядку

Означення 8 (*поняття характеристичної системи рівнянь*). Система звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx_1}{p_1(x_1,...,x_n)}=...=\frac{dx_n}{p_n(x_1,...,x_n)}, \tag{3.1}$$

яка у випадку $p_n(x_1,...,x_n)\neq 0$ еквівалентна нормальній системі з $n-1$ рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_n} = \dfrac{p_1(x_1,\ldots,x_n)}{p_n(x_1,\ldots,x_n)}, \\ \vdots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n} = \dfrac{p_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)}{p_n(x_1,\ldots,x_n)}, \end{cases} \tag{3.2}$$

називають ***характеристичною системою рівнянь*** для лінійного однорідного ДРЧП (2.2).

Позначимо через

$$\begin{cases} \psi_1(x_1,\ldots,x_n) = c_1, \\ \psi_2(x_1,\ldots,x_n) = c_2, \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n) = c_{n-1} \end{cases} \tag{3.3}$$

сукупність $n-1$ лінійно незалежних «перших інтегралів» характеристичної системи (3.1), а отже, і еквівалентної їй системи (3.2).

Теорема 3.1 (***про розв'язок однорідного ДРЧП першого порядку***). Будь-який інтеграл $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ характеристичної системи (3.1) є водночас розв'язком лінійного однорідного ДРЧП (2.2).

Доведення. Нехай $\psi(x_1,\ldots,x_n) = c$ – деякий «перший інтеграл» системи (3.1). Тоді $d\psi = 0$ і з урахуванням того, що згідно з (3.1) $dx_i = kp_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i = \overline{1,n}$, де $k \neq 0$ коефіцієнт пропорційності, одержимо:

$$d\psi \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n = k\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_1}p_1 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}p_n\right\} = 0,$$

тобто функція $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ є розв'язком ДРЧП (2.2).

Теорема 3.2 (***про інтеграл характеристичної системи***). Будь-який розв'язок лінійного однорідного ДРЧП (2.2) $u = \psi(x_1,\ldots,x_n) \neq const$ є водночас інтегралом характеристичної системи (3.1), а також еквівалентної їй системи (3.2).

У загальній теорії ДРЧП на відміну від теорії звичайних диференціальних рівнянь питання про визначення і побудову загального розв'язку не ставиться. Виняток становлять лінійні однорідні ДРЧП першого порядку, розв'язки яких, як буде показано нижче, містять довільну функцію.

Теорема 3.3 (***про загальний розв'язок лінійного однорідного ДРЧП першого порядку***). Нехай (3.3) – сукупність $n-1$ лінійно незалежних «перших інтегралів» характеристичної системи (3.1). Тоді співвідношення

$$u = u_{з.}(x_1,\ldots,x_n) = \Phi(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1}), \tag{3.4}$$

де Φ довільна неперервно-диференційовна функція своїх аргументів, визначає загальний розв'язок лінійного однорідного ДРЧП (2.2).

Доведення. Нехай $\psi_i(x_1,...,x_n)=c_i$, $i=\overline{1,n-1}$ – сукупність $n-1$ лінійно незалежних «перших інтегралів» характеристичної системи (3.1), а $\psi_0(x_1,...,x_n)$ деякий частинний розв'язок ДРЧП (2.2). Оскільки згідно з Теоремою 3.1 функції $\psi_1(x_1,...,x_n)$, ..., $\psi_{n-1}(x_1,...,x_n)$ також є розв'язками ДРЧП (2.2), то

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x_1,...,x_n)\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}=0, \quad j=\overline{0,n-1}. \tag{3.5}$$

Розглянемо систему (3.5) як лінійну однорідну алгебраїчну систему відносно функцій $p_1(x_1,...,x_n)$, ..., $p_n(x_1,...,x_n)$. Очевидно, що така система (3.5) має нетривіальний розв'язок, а тому її визначник

$$\Delta=|J|=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_0}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_0}{\partial x_n} \\ & \cdots & \\ \dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}\equiv 0.$$

Оскільки якобіан *J*, складений для функцій ψ_0, ψ_1, ..., ψ_{n-1}, тотожно рівний нулеві, то ця система функцій є лінійно залежною, тобто існує функціональна залежність $F(\psi_0,\psi_1,...,\psi_{n-1})=0$. Але функції ψ_1, ..., ψ_{n-1} є лінійно незалежними, тому повинно бути $\psi_0=\Phi(\psi_1,...,\psi_{n-1})$. А оскільки ψ_0 – довільний частинний розв'язок ДРЧП (2.2), то функція $u=\Phi(\psi_1,...,\psi_{n-1})$ буде загальним розв'язком ДРЧП (2.2).

Зауваження. Із Теорем 3.1-3.3 випливає, що знаходження загального розв'язку (3.4) лінійного однорідного ДРЧП (2.2) зводиться до побудови $n-1$ лінійно незалежних розв'язків (інтегралів) характеристичної системи звичайних диференціальних рівнянь (3.1).

Проілюструємо алгоритм розв'язання на прикладі лінійного однорідного ДРЧП

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial u}{\partial x_3}=0, \quad x_1,x_2,x_3>0. \tag{3.6}$$

Запишемо відповідну систему в симетричній формі (3.1)

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dx_3}{x_3}. \tag{3.7}$$

Очевидно, що інтегровну комбінацію можна утворити з будь-якої пари дробів. Маємо:

$$\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{x_1}=\dfrac{dx_2}{x_2}, \\ \dfrac{dx_1}{x_1}=\dfrac{dx_3}{x_3} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \ln x_1=\ln x_2+\ln c_1, & c_1>0, \\ \ln x_1=\ln x_3+\ln c_2, & c_2>0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{x_1}{x_2}=c_1, \\ \dfrac{x_1}{x_3}=c_2. \end{array}$$

Одержані рівності є двома лінійно незалежними «першими інтегралами» характеристичної системи (3.7). Тоді на підставі Теореми 3.3 загальний розв'язок ДРЧП (3.6) запишеться за формулою (3.4) у вигляді

$$u(x_1,x_2,x_3)=\Phi\left(\frac{x_1}{x_2},\frac{x_1}{x_3}\right),$$

де Φ довільна неперервно-диференційовна функція своїх аргументів.

Означення 9 (***задача Коші для лінійного однорідного ДРЧП***)**.** Задачу

$$\begin{cases} p_1(x_1,\ldots,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+p_n(x_1,\ldots,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_n}=0, \\ u(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)\big|_{x_n=x_{n,0}}=\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}), \end{cases} \tag{3.8}$$

де $x_{n,0}$ деяке фіксоване значення, а φ задана неперервно-диференційовна функція, називають ***задачею Коші*** (задачею з початковою умовою) для лінійного однорідного ДРЧП (2.2).

Зауважимо, що у задачі (3.8) фіксованою може бути будь-яка з незалежних змінних. Легко бачити: якщо у випадку звичайного диференціального рівняння задача Коші полягає у відшуканні розв'язку у вигляді рівняння кривої, яка проходить через задану точку, то у випадку ДРЧП шукаємо рівняння поверхні, яка проходить через задану криву.

Розв'язок задачі Коші (3.8) отримаємо з загального розв'язку (3.4) тоді, коли підберемо функцію Φ таким чином, щоб виконувалася задана початкова умова, тобто

$$\Phi\big(\psi_1(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n,0}),\ldots,\psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n,0})\big)=\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}). \tag{3.9}$$

Введемо позначення

$$\begin{cases} \psi_1(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n,0})=\overline{\psi}_1, \\ \qquad\vdots \\ \psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n,0})=\overline{\psi}_{n-1}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Тоді (3.9) можна записати у вигляді

$$\Phi\big(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1}\big)=\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}).$$

Крім того, система (3.10) на деякій підмножині області визначення розв'язна відносно змінних x_1, ..., x_{n-1}:

$$\begin{cases} x_1=\omega_1(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1}), \\ \qquad\vdots \\ x_{n-1}=\omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1}). \end{cases}$$

Нехай досі довільна функція Φ надалі буде

$$\Phi\big(\psi_1(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n),\ldots,\psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)\big)=$$
$$=\varphi\big(\omega_1(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1}),\ldots,\omega_{n-1}(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1})\big).$$

Очевидно, що розв'язок у вигляді

$$u=u(x_1,\ldots,x_n)=\varphi\big(\omega_1(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1}),\ldots,\omega_{n-1}(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1})\big) \tag{3.11}$$

справджує також задану початкову умову, коли замість x_n підставити значення $x_{n,0}$.

Проілюструємо застосування формули (3.11) на прикладі задачі Коші

$$\begin{cases} x_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \\ u(x_1, x_2)\big|_{x_2=0} = \cos x_1 = \varphi(x_1). \end{cases} \tag{3.12}$$

Побудуємо перший інтеграл за характеристичною системою

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{-x_1} \quad \Rightarrow \quad -x_1 dx_1 - x_2 dx_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \int x_1 dx_1 + \int x_2 dx_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} = \frac{c}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 = c = \psi_1(x_1, x_2).$$

Із формул (3.10)

$$\psi_1(x_1, x_2 = 0) = \overline{\psi}_1 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 = \overline{\psi}_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \pm\sqrt{\overline{\psi}_1}.$$

Тоді розв'язок задачі Коші (3.12) можна записати за формулою (3.10):

$$u(x_1, x_2) = \varphi\left(\pm\sqrt{\psi_1}\right) = \cos\left(\pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right).$$

4. Квазілінійні ДРЧП першого порядку

Покажемо, що розв'язання квазілінійного неоднорідного ДРЧП (2.3) можна звести до розв'язання лінійного однорідного ДРЧП вигляду (2.2).
Будемо шукати розв'язок ДРЧП (2.3) у неявному вигляді

$$V(x_1, \ldots, x_n, u) = 0, \tag{4.1}$$

де функція V є неперервно-диференційовною. Диференціюванням за змінними x_k із (4.1) дістанемо:

$$\frac{\partial V(x_1, \ldots, x_n, u)}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{-\dfrac{\partial V(x_1, \ldots, x_n, u)}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Підставивши значення похідних у (2.3), одержимо лінійне однорідне ДРЧП відносно функції $n+1$ змінної $V(x_1, \ldots, x_n, u)$:

$$p_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + p_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_n} + q(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0, \tag{4.2}$$

розв'язок якого, побудований за формулою (3.4)

$$V = V_{з.}(x_1, \ldots, x_n, u) = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n),$$

згідно з (4.1) визначає розв'язок квазілінійного ДРЧП (2.3) у неявному вигляді (загальний інтеграл)

$$\Phi(\psi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \psi_2(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n, u)) = 0, \tag{4.3}$$

де $\psi_1(x_1, \ldots, x_n, u)$, $\psi_2(x_1, \ldots, x_n, u)$, …, $\psi_n(x_1, \ldots, x_n, u)$ – n лінійно незалежних інтегралів характеристичної системи в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{p_1(x_1, \ldots, x_n, u)} = \ldots = \frac{dx_n}{p_n(x_1, \ldots, x_n, u)} = \frac{du}{q(x_1, \ldots, x_n, u)}, \tag{4.4}$$

що відповідає однорідному ДРЧП (4.2).

Теорема 4.1 (***про загальний розв'язок неоднорідного ДРЧП першого порядку***). Якщо $\psi_i(x_1,...,x_n,u)=c_i$, $i=\overline{1,n}$ – n лінійно незалежних інтегралів характеристичної системи (4.4), що відповідає неоднорідному ДРЧП (2.3) – або однорідному ДРЧП (4.2), – то співвідношення (4.3), де Φ довільна неперервно-диференційовна функція своїх аргументів, визначає загальний інтеграл неоднорідного ДРЧП (2.3).

Зауваження. Якщо шукана функція $u(x_1,...,x_n)$ входить тільки в один із побудованих n лінійно незалежних інтегралів, наприклад, у ψ_1, тоді загальний інтеграл зазвичай записують у вигляді

$$\psi_1(x_1,...,x_n,u)=F(\psi_2(x_1,...,x_n),...,\psi_n(x_1,...,x_n)), \tag{4.5}$$

де F довільна неперервно-диференційовна функція своїх аргументів, звідки часто вдається виразити шукану функцію в явному вигляді.

Відзначимо, що твердження теореми 4.1 справедливе і для інших типів ДРЧП першого порядку, які є частинними випадками квазілінійного ДРЧП (2.3), а саме:

1) лінійного однорідного ДРЧП, яке містить шукану функцію:

$$p_1(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+p_n(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}+b(x_1,...,x_n)u=0$$

[тут беремо $q=-b(x_1,...,x_n)u$];

2) лінійного неоднорідного ДРЧП

$$p_1(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+p_n(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}+b_1(x_1,...,x_n)u=b_2(x_1,...,x_n)$$

[тут беремо $q=b_2(x_1,...,x_n)-b_1(x_1,...,x_n)u$];

3) так званого напівлінійного ДРЧП

$$p_1(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+p_n(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=b(x_1,...,x_n,u)$$

[у цьому випадку $q=b(x_1,...,x_n,u)$].

Наостанок проілюструємо алгоритм інтегрування ДРЧП вигляду (2.3) на прикладі: в області $x_1,x_2,x_3,u>0$ знайти загальний розв'язок заданого ДРЧП і розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_3}=6u, \\ u(x_1,x_2,x_3)\big|_{x_3=2}=3x_1x_2=\varphi(x_1,x_2). \end{cases} \tag{4.6}$$

Запишемо відповідну характеристичну систему (4.4)

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dx_3}{x_3}=\frac{du}{6u}.$$

Перший дріб утворює інтегровну комбінацію з кожним із інших. Після інтегрування дістанемо три незалежні «перші інтеграли»:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2} \quad \Rightarrow \quad c_1=\frac{x_1}{x_2}=\psi_1(x_1,x_2,x_3,u),\\
&\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_3}{x_3} \quad \Rightarrow \quad c_2=\frac{x_1}{x_3}=\psi_2(x_1,x_2,x_3,u),\\
&\frac{dx_1}{x_1}=\frac{du}{6u} \quad \Rightarrow \quad c_1=\frac{x_1^6}{u}=\psi_3(x_1,x_2,x_3,u).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Отже, згідно з Теоремою 4.1 загальний розв'язок заданого ДРЧП записується в неявному вигляді (4.3)

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_2},\frac{x_1}{x_3},\frac{x_1^6}{u}\right)=0,$$

або, з огляду на те, що змінна u входить тільки в один інтеграл ψ_3, можна застосувати формулу (4.5), тоді отримаємо загальний розв'язок у явному вигляді:

$$\frac{x_1^6}{u}=F\left(\frac{x_1}{x_2},\frac{x_1}{x_3}\right) \quad \Rightarrow \quad u=x_1^6\,F^{-1}\left(\frac{x_1}{x_2},\frac{x_1}{x_3}\right)=x_1^6\overline{F}\left(\frac{x_1}{x_2},\frac{x_1}{x_3}\right).$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші. Для цього випишемо відповідну систему вигляду (3.10), враховуючи фіксоване значення $x_3=2$:

$$\begin{cases}\dfrac{x_1}{x_2}=\overline{\psi}_1,\\[2mm] \dfrac{x_1}{2}=\overline{\psi}_2,\\[2mm] \dfrac{x_1^6}{u}=\overline{\psi}_3,\end{cases}$$

звідки отримуємо вирази для змінних x_1, x_2, u:

$$\begin{aligned}
&x_1=2\overline{\psi}_2=\omega_1(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_3),\\
&x_2=\frac{2\overline{\psi}_2}{\overline{\psi}_1}=\omega_2(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_3),\\
&u=\frac{(2\overline{\psi}_2)^6}{\overline{\psi}_3}=\omega_3(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_3).
\end{aligned}$$

Зрештою за формулою (3.11) випишемо розв'язок задачі Коші (4.6):

$$2^6\frac{\psi_2^6(x_1,x_2,x_3,u)}{\psi_3(x_1,x_2,x_3,u)}-3\omega_1\big(\psi_1(x_1,x_2,x_3,u),\psi_2(x_1,x_2,x_3,u),\psi_3(x_1,x_2,x_3,u)\big)\times$$
$$\times\,\omega_2\big(\psi_1(x_1,x_2,x_3,u),\psi_2(x_1,x_2,x_3,u),\psi_3(x_1,x_2,x_3,u)\big)=0,$$

звідки з урахуванням (4.7)

$$2^6\frac{\frac{x_1^6}{x_3^6}}{\frac{x_1^6}{u}}-3\cdot 2\cdot\frac{x_1}{x_3}\cdot\frac{2\cdot\frac{x_1}{x_3}}{\frac{x_1}{x_2}}=0,$$

або

$$2^4\frac{u}{x_3^6}-3\frac{x_1x_2}{x_3^2}=0 \quad\Rightarrow\quad u(x_1,x_2,x_3)=3\frac{x_1x_2x_3^4}{2^4}.$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що отримана функція справджує початкову умову задачі (4.6): $u(x_1,x_2,2)=3x_1x_2$.

Джерело:

Rontó Miklós, Raisz Péterné. Differenciálegyenletek műszakiaknak. Elméleti összefoglaló 300 kidolgozott feladattal. – Miskolci egyetemi kiadó, 2004. – Стор. 309-322.