ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння *n*-го порядку та їх властивості. Теорема про структуру загального розв'язку ЛОДР

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) n-го порядку називається диференціальне рівняння (ДР) вигляду

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0, \quad x \in [a,b], \tag{1.1}$$

де $p_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ – деякі неперервні на проміжку $x \in [a,b]$ функції, L – позначення лінійного оператора.

Наведемо спочатку найзагальніші властивості ЛОДР (1.1), які доводяться шляхом безпосередньої підстановки у вказане ДР:

а) будь-яке перетворення незалежної змінної $x = \varphi(\xi)$ з проміжку $a \le x \le b$, $\alpha \le \xi \le \beta$, де $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, не змінює лінійності ЛОДР (1.1);

б) лінійне перетворення залежної змінної $y(x) = \gamma_1(x)z(x) + \gamma_2(x)$, де $z(x)$ нова залежна змінна, $\gamma_1(x)$ і $\gamma_2(x)$ задані неперервні функції, не змінює лінійності ЛОДР (1.1);

в) якщо $y_1(x)$ деякий частинний розв'язок ЛОДР (1.1), то функція $y_2(x) = Cy_1(x)$, де C довільна стала, також буде розв'язком ЛОДР (1.1);

г) якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – два частинні розв'язки ЛОДР (1.1), то їх сума $y_3(x) = y_1(x) + y_2(x)$ також буде розв'язком ЛОДР (1.1).

Означення 1. Система функцій $\{y_1(x),\ldots,y_n(x)\}$ називається ***лінійно залежною*** на проміжку $x \in [a,b]$, якщо існують такі сталі C_i, $i = \overline{1,n}$, не всі рівні нулеві, що лінійна комбінація $\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) \equiv 0$ для всіх $x \in [a,b]$. У протилежному випадку (якщо лінійна комбінація рівна нулеві лише за всіх $C_i = 0$, $i = \overline{1,n}$), система $\{y_1(x),\ldots,y_n(x)\}$ називається ***лінійно незалежною***.

Означення 2. Детермінант вигляду

$$W[y_1,\ldots,y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ & \ldots & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

називається ***детермінантом Вронського*** (вронськіяном) для системи функцій $\{y_1(x),\ldots,y_n(x)\}$.

Означення 3. Система n лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ ЛОДР (1.1) називається ***фундаментальною системою частинних розв'язків*** (ФСЧР) ЛОДР (1.1).

Наступні властивості ЛОДР (1.1) формулюватимемо у вигляді теорем.

Теорема 1.1 (***про вронськіян для лінійно залежної системи функцій***). Якщо система функцій $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$ є лінійно залежною, то детермінант Вронського для цієї системи функцій тотожно рівний нулеві: $W[y_1,...,y_n]\equiv 0$.

Теорема 1.2 (***про вронськіян для лінійно незалежної системи розв'язків ЛОДР***). Якщо розв'язки $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ ЛОДР (1.1) є лінійно незалежними на відрізку $x\in[a,b]$, то вронськіян $W[y_1,...,y_n]$ не перетворюється в нуль у жодній точці цього відрізка.

Теорема 1.3 (***про існування ФСЧР для ЛОДР***). Для всякого ЛОДР вигляду (1.1) існує фундаментальна система частинних розв'язків.

Теорема 1.4 (***про структуру загального розв'язку ЛОДР* n*-го порядку***). Якщо функції $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ утворюють ФСЧР ЛОДР (1.1), то загальний розв'язок ЛОДР (1.1) рівний лінійній комбінації

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i y_i(x), \tag{1.2}$$

де C_i, $i=\overline{1,n}$ – довільні сталі.

<u>Доведення</u>. Розглянемо задачу Коші для ЛОДР (1.1) із початковими умовами

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\quad ...,\quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},\quad x_0\in[a,b]. \tag{1.3}$$

Функція (1.2) є розв'язком ЛОДР (1.1) згідно з властивостями ***в)***, ***г)*** ЛОДР (1.1). Покажемо, що (1.2) є загальним розв'язком ЛОДР (1.1), тобто з (1.2) підбором числових значень сталих C_i, $i=\overline{1,n}$ завжди можна одержати частинний розв'язок ЛОДР (1.1), який справджує початкові умови вигляду (1.3).

Підклавши (1.2) у початкові умови (1.3), отримуємо лінійну неоднорідну алгебраїчну систему для визначення сталих C_i, $i=\overline{1,n}$:

$$\begin{cases} C_1y_{10}+...+C_ny_{n0}=y_0, \\ C_1y_{10}'+...+C_ny_{n0}'=y_0', \\ \qquad ... \\ C_1y_{10}^{(n-1)}+...+C_ny_{n0}^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{1.4}$$

де $y_{i0}^{(k)}=y_i^{(k)}(x_0)$, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{0,n-1}$. Оскільки функції $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ утворюють ФСЧР ЛОДР (1.1), то визначник системи (1.4), рівний вронськіяну $W[y_1,...,y_n]$, відмінний від нуля в точці x_0 згідно з Теоремою 1.2. Отже, сталі C_1, ..., C_n визначаються однозначно із системи (1.4), а тому вираз (1.2) є загальним розв'язком ЛОДР (1.1).

Теорема 1.5 (***про систему* (n+1)*-го частинного розв'язку ЛОДР* n*-го порядку***). Система (n+1)-го частинного розв'язку $\{y_1(x),...,y_n(x),y_{n+1}(x)\}$ ЛОДР (1.1) є лінійно залежною.

Теорема 1.6 (***про ЛОДР зі спільною ФСЧР***). Якщо два ЛОДР вигляду (1.1) мають спільну ФСЧР, то вони є тотожними між собою, тобто всі їх коефіцієнти співпадають. Звідси випливає, що ФСЧР цілком визначає ЛОДР зі старшим коефіцієнтом, рівним 1.

Використовуючи Теореми 1.5 і 1.6, можна завжди побудувати ЛОДР вигляду (1.1), якщо відома його ФСЧР. Справді, нехай $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$ – ФСЧР деякого ЛОДР. Тоді згідно з Теоремою 1.6 вона цілком визначає відповідне ЛОДР вигляду (1.1). Нехай $y(x)$ – інший частинний розв'язок цього ж ЛОДР. Тоді згідно з Теоремою 1.5 система функцій $\{y_1(x),...,y_n(x),y(x)\}$ буде лінійно залежною, а отже (Теорема 1.1)

$$W[y_1,...,y_n,y]\equiv\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n & y \\ y_1' & \dots & y_n' & y' \\ & \dots & & \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}=0. \tag{1.5}$$

Рівність (1.5) якраз і визначає шукане ЛОДР для заданої ФСЧР. Щоб отримати ЛОДР у вигляді (1.1), розкладемо детермінант Вронського $W[y_1,...,y_n,y]$ по елементах останнього стовпця і поділимо на коефіцієнт при $y^{(n)}(x)$. Маємо:

$$y^{(n)}-\frac{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ & \dots & \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1,...,y_n]}y^{(n-1)}+\dots+(-1)^n\frac{\begin{vmatrix} y_1' & \dots & y_n' \\ & \dots & \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1,...,y_n]}y=0. \tag{1.6}$$

Зауважимо, що коефіцієнтом при $y^{(n)}(x)$ є вронськіян $W[y_1,...,y_n]$, який згідно з Теоремою 1.2 не обертається в нуль у жодній точці заданого відрізка. Отже, (1.6) є шукане ЛОДР вигляду (1.1), яке відповідає заданій ФСЧР $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$.
Порівнюючи коефіцієнти ЛОДР (1.1) та (1.6), отримуємо тотожність

$$p_1(x)=-\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ & & \dots & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1,...,y_n]}. \tag{1.7}$$

Легко бачити, що визначник у чисельнику рівності (1.7) є похідною від вронськіяна, що міститься в знаменнику, оскільки подається у вигляді суми детермінантів, одержаних із $W[y_1,...,y_n]$ диференціюванням одного з його рядків [при цьому (n–1) перших визначників матимуть два однакові рядки, а отже, обертатимуться в нуль, і лише диференціювання n-го рядка дасть ненульовий вираз – а саме чисельник дробу з (1.7)]. Отже, з (1.7) маємо

$$\frac{W'[y_1,\dots,y_n]}{W[y_1,\dots,y_n]}=-p_1(x).$$

Зінтегрувавши останнє ДР на проміжку від x_0 (вибрана стала) до x, отримаємо:

$$\ln W=-\int_{x_0}^{x}p_1(t)dt+\ln C \quad\Rightarrow\quad W=C\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p_1(t)dt}.$$

Для визначення сталої C покладемо $x=x_0$. Отже, $C=W(x_0)$ і

$$W[y_1,\dots,y_n]=W(x_0)\cdot\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p_1(t)dt}. \qquad (1.8)$$

Формула (1.8) називається ***формулою Остроградського-Ліувілля***. Рівність (1.8) визначає детермінант Вронського через коефіцієнт при $y^{(n-1)}$ заданого ЛОДР (1.1) із точністю до сталого множника.

2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння *n*-го порядку та їх властивості. Теорема про структуру загального розв'язку ЛНДР

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням (ЛНДР) n-го порядку називається ДР вигляду

$$L[y]\equiv y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_n(x)y=f(x),\quad x\in[a,b], \qquad (2.1)$$

де $f(x)\neq 0$, $p_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ – деякі неперервні на проміжку $x\in[a,b]$ функції, L – позначення лінійного оператора. При цьому рівняння (1.1) називають ЛОДР, відповідним до ЛНДР (2.1).

Оскільки оператор L лінійний, то для довільних функцій y_1, y_2 з його області визначення мають силу рівності: $L[Cy_1]=CL[y_1]$; $L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$. Із цих властивостей випливають деякі властивості ЛНДР (2.1), зокрема:

а) якщо $y_0(x)$ деякий розв'язок ЛНДР (2.1), а $Y(x)$ – будь-який розв'язок відповідного ЛОДР (1.1), то їх сума $y(x)=Y(x)+y_0(x)$ буде розв'язком ЛНДР (2.1). Справді, $L[y]=L[y_0+Y]=L[y_0]+L[Y]=f(x)+0=f(x)$;

б) якщо $f(x)=\sum_{k=1}^{m}f_k(x)$ і для кожного з рівнянь $L[y]=f_k(x)$ знайдені відповідні розв'язки $y_k(x)$, то функція $y(x)=\sum_{k=1}^{m}y_k(x)$ є розв'язком ЛНДР (2.1) (***принцип суперпозиції***). Справді,

$$L[y]=L[y_1+\dots+y_m]=L[y_1]+\dots+L[y_m]=f_1(x)+\dots+f_m(x)=f(x).$$

Теорема 2.1 (***про структуру загального розв'язку ЛНДР* n*-го порядку***). Загальний розв'язок ЛНДР (2.1), де $f(x)$, $p_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ – неперервні на заданому відрізку

$x \in [a,b]$ функції, є сумою загального розв'язку $Y(x)$ відповідного ЛОДР (1.1) і будь-якого частинного розв'язку $y_0(x)$ ЛНДР (2.1):

$$y(x) = Y(x) + y_0(x). \tag{2.2}$$

Доведення. Функція (2.2) є розв'язком ЛНДР (2.1) згідно з властивістю ***а)***. Покажемо, що (2.2) є загальним розв'язком ЛНДР (2.1), тобто за будь-яких початкових умов (1.3) із (2.2) завжди можна одержати частинний розв'язок ЛНДР (2.1), який справджує початкові умови (1.3).

Нехай $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$ – ФСЧР відповідного до (2.1) ЛОДР (1.1). Тоді згідно з Теоремою 1.4 $Y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, а звідси на підставі (2.2)

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + y_0(x). \tag{2.3}$$

Підклавши (2.3) у початкові умови (1.3), отримуємо лінійну неоднорідну алгебраїчну систему для визначення невідомих сталих C_i, $i = \overline{1,n}$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_0(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = y_0' - y_0'(x_0), \\ \qquad ... \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}(x_0), \end{cases} \tag{2.4}$$

визначник якої $W[y_1,...,y_n](x_0) \neq 0$ згідно з Теоремою 1.2. Отже, сталі C_1, ..., C_n визначаються однозначно із системи (2.4), тобто з (2.2) завжди можна отримати частинний розв'язок ЛНДР (2.1), який справджує початкові умови (1.3). Тому (2.2) є загальним розв'язком ЛНДР (2.1).

Теорема 2.2 (***метод варіації сталих для ЛНДР* n*-го порядку***). Якщо відома ФСЧР $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$ ЛОДР (1.1), то загальний розв'язок відповідного ЛНДР (2.1) може бути знайдений за допомогою n квадратур.

Доведення. Нехай для ЛОДР (1.1) відома ФСЧР $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$, тоді для цієї системи функцій $W[y_1,...,y_n](x) \neq 0$ у будь-якій точці $x \in [a,b]$, а загальний розв'язок ЛОДР (1.1) рівний $Y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, де C_1, ..., C_n – довільні сталі.

Для побудови розв'язку ЛНДР (2.1) застосуємо ***метод варіації сталих*** (***метод Лаґранжа***) аналогічно до лінійних ДР першого порядку: загальний розв'язок ЛНДР (2.1) знаходимо, поклавши в загальному розв'язку відповідного ЛОДР $C_i = C_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ (деякі наразі невідомі функції). Отже,

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i(x), \tag{2.5}$$

звідки $y'(x)=\sum_{i=1}^{n}[C_i'(x)y_i(x)+C_i(x)y_i'(x)]$. Покладемо в останньому виразі $\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i(x)=0$, тоді $y''(x)=\sum_{i=1}^{n}[C_i'(x)y_i'(x)+C_i(x)y_i''(x)]$. Покладемо $\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i'(x)=0$ і так далі, поки нарешті на n-му кроці отримаємо $y^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}[C_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)+C_i(x)y_i^{(n)}(x)]$.

Для того, щоб функція (2.5) із вибраними таким чином коефіцієнтами $C_i(x)$ була розв'язком ЛНДР (2.1), повинна виконуватися рівність $\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)=f(x)$. Це випливає з безпосереднього підкладання (2.5) та виразів для похідних із урахуванням додаткових умов у ЛНДР (2.1).

Отже, у підсумку для визначення $C_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ отримуємо лінійну неоднорідну алгебраїчну систему відносно перших похідних шуканих функцій:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1^{(s)}(x)+\ldots+C_n'(x)y_n^{(s)}(x)=0, \quad s=\overline{0,n-2}; \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=f(x). \end{cases} \tag{2.6}$$

Система (2.6) називається ***системою Лаґранжа***, а її визначник $W[y_1,\ldots,y_n]\neq 0$ в жодній точці проміжку $x\in[a,b]$. Тому (2.6) має єдиний розв'язок вигляду $C_i'(x)=\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, а отже, власне коефіцієнти $C_i(x)$ знаходяться за допомогою n квадратур (інтегрувань): $C_i(x)=\int\varphi_i(x)dx+\overline{C}_i$, $i=\overline{1,n}$, де $\overline{C}_i$ довільні сталі.

Підклавши знайдені $C_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ у (2.5), одержимо загальний розв'язок ЛНДР (2.1).

3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера

ЛОДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$L[y]\equiv y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0, \quad x\in[a,b], \tag{3.1}$$

де a_1, ..., a_n – задані сталі.

Для інтегрування ЛОДР (3.1) застосуємо ***метод Ейлера***. Розв'язок будемо шукати у вигляді

$$y(x)=\mathrm{e}^{\lambda x} \tag{3.2}$$

(***підстановка Ейлера***), де λ деяка стала. Тоді $y'(x)=\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}$, ..., $y^{(n)}(x)=\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda x}$.

Підклавши (3.2) і вирази для похідних у (3.1), після скорочення на ненульовий множник $\mathrm{e}^{\lambda x}$ одержимо

$$P(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \tag{3.3}$$

Вираз $P(\lambda)$ називається ***характеристичним поліномом***, а рівність (3.3) – ***характеристичним рівнянням*** (ХР) для ЛОДР (3.1). Вигляд загального розв'язку ЛОДР (3.1) визначається коренями ХР (3.3). Тут можливі три випадки.

1. Випадок дійсних різних коренів. Нехай усі корені ХР (3.3) дійсні й різні, тобто $\lambda_i \in R$, $i = \overline{1,n}$, причому $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Тоді кожному з коренів λ_i згідно з (3.2) відповідатиме частинний розв'язок $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$, а загальний розв'язок ЛОДР (3.1) згідно з Теоремою 1.4 запишеться у вигляді лінійної комбінації

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x},$$

де C_1, ..., C_n – довільні сталі. Зауважимо, що частинні розв'язки $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$, $i = \overline{1,n}$ є лінійно незалежними, оскільки детермінант Вронського для цієї системи функцій

$$W[y_1,...,y_n] = e^{(\lambda_1+...+\lambda_n)x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ & & ... & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

(визначник в останній рівності є детермінантом Вандермонда, який, як відомо з курсу алгебри, у випадку всіх різних чисел λ_i не рівний нулеві).

2. Випадок комплексно спряжених коренів. Нехай ХР (3.3) має два комплексно спряжені корені $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Тоді згідно з (3.2) їм відповідатимуть комплексні розв'язки ЛОДР (3.1) вигляду (із застосуванням формули Ейлера)

$$\bar{y}_{1,2}(x) = e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i\sin\beta x). \tag{3.4}$$

Має силу наступна

Лема. Якщо $f(x) = u(x) + iv(x)$ є комплексним розв'язком ЛОДР (3.1), то дійсна й уявна частини цієї функції також є розв'язками ЛОДР (3.1). Справді, $L[f] = L[u] + iL[v]$, тому з рівності $L[f] = 0$ випливають рівності $L[u] = 0$, $L[v] = 0$.

Використовуючи наведену лему в застосуванні до функцій (3.4), одержимо: парі комплексно спряжених коренів ХР (3.3) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $(\alpha,\beta \in R,\ \beta \neq 0)$ відповідають два дійсні частинні розв'язки ЛОДР (3.1): $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Зауважимо, що ці частинні розв'язки є лінійно незалежними, оскільки

$$W[y_1, y_2] = e^{2\alpha x} \cdot \begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x} \neq 0.$$

3. Випадок кратних коренів. Нехай дійсне число λ_0 є коренем ХР (3.3) кратності $k > 1$. Тоді характеристичний поліном $P(\lambda)$ подається у вигляді $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k P_{n-k}(\lambda)$, де $P_{n-k}(\lambda)$ деякий поліном від λ степеня $(n-k)$ з коренями, відмінними від λ_0. Тоді з урахуванням ХР (3.3) одержимо:

$$P(\lambda_0) = P'(\lambda_0) = ... = P^{(k-1)}(\lambda_0) = 0. \tag{3.5}$$

Розглянемо функцію $y(x) = x^m e^{\lambda_0 x}$, де $m < n$ натуральне число. Знайдемо її похідні до n-го порядку включно:

$$y'(x) = e^{\lambda_0 x}(\lambda_0 x^m + m x^{m-1}),$$

$$y''(x) = \mathrm{e}^{\lambda_0 x}[\lambda_0^2 x^m + 2m\lambda_0 x^{m-1} + m(m-1)x^{m-2}],\ ...,$$
$$y^{(m)}(x) = \mathrm{e}^{\lambda_0 x}(\lambda_0^m x^m + m^2\lambda_0^{m-1}x^{m-1} + ... + m!),\ ...,$$
$$y^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{\lambda_0 x}\left(\lambda_0^n x^m + nm\lambda_0^{n-1}x^{m-1} + ... + \frac{n!}{(n-m)!}\lambda_0^{n-m}\right).$$

Підклавши знайдені похідні в ЛОДР (3.1), після зведення подібних доданків одержимо:

$$L[y] \equiv \mathrm{e}^{\lambda_0 x}\left(P(\lambda_0)x^m + mP'(\lambda_0)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}P''(\lambda_0)x^{m-2} + ... + P^{(m)}(\lambda_0)\right) = 0. \quad (3.6)$$

Із урахуванням (3.5) рівність (3.6) виконуватиметься для всіх $m = 0,1,...,k-1$. Тому відповідні функції $y(x) = x^m \mathrm{e}^{\lambda_0 x}$ будуть розв'язками ЛОДР (3.1).

Отже, якщо дійсне число λ_0 є коренем ХР (3.3) кратності $k > 1$, то йому відповідають k лінійно незалежних ($W[y_1,...,y_k] \neq 0$) частинних розв'язків

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_0 x},\ \ y_2(x) = x\mathrm{e}^{\lambda_0 x},\ \ ...,\ \ y_k(x) = x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 x}.$$

Аналогічно можна показати: якщо кожен із двох комплексно спряжених коренів ХР (3.3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ має кратність $k > 1$, то цій парі відповідатимуть $2k$ лінійно незалежних частинних розв'язків ЛОДР (3.1)

$$y_{1,m}(x) = x^m \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y_{2,m}(x) = x^m \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ m = \overline{0,k-1}.$$

Із розглянутих випадків очевидно, що всім кореням ХР (3.3) загалом відповідають n лінійно незалежних частинних розв'язків, які складають ФСЧР ЛОДР (3.1). Тоді загальний розв'язок ЛОДР (3.1) згідно з Теоремою 1.4 записується у вигляді лінійної комбінації (1.2). Отже, метод Ейлера дає змогу інтегрувати ЛОДР вигляду (3.1) без квадратур.

4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів

ЛНДР *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x),\ \ x \in [a,b], \quad (4.1)$$

де a_1, ..., a_n – задані сталі, $f(x) \neq 0$ – відома функція.

Загальний розв'язок $y(x)$ ЛНДР (4.1) згідно з Теоремою 2.1 є сумою загального розв'язку $Y(x)$ відповідного ЛОДР (3.1) і деякого частинного розв'язку $y_0(x)$ ЛНДР (4.1), тобто подається у вигляді (2.2). Як було показано в попередній темі, $Y(x)$ у вигляді (1.2) можна побудувати за допомогою методу Ейлера залежно від коренів характеристичного рівняння (3.3).

Розглянемо випадок, коли вільний член $f(x)$ ЛНДР (4.1) має вигляд ***квазіполінома***

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_{s_1}(x)\cos\beta x + Q_{s_2}(x)\sin\beta x\right), \quad (4.2)$$

де $P_{s_1}(x)$, $Q_{s_2}(x)$ – поліноми степенів s_1 і s_2 відповідно; α, β – відомі дійсні числа.

Тоді для відшукання частинного розв'язку $y_0(x)$ ЛНДР (4.1) застосовний штучний метод, який має назву ***методу невизначених коефіцієнтів*** і дає змогу розв'язати ЛНДР (4.1) без квадратур.

Згідно з цим методом частинний розв’язок $y_0(x)$ ЛНДР (4.1) шукаємо у вигляді подібного до (4.2) квазіполінома

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\overline{P}_s(x)\cos\beta x + \overline{Q}_s(x)\sin\beta x\right)\cdot x^m, \tag{4.3}$$

де $s = \max\{s_1, s_2\}$, а число m рівне кратності кореня ХР (3.3) $\gamma = \alpha + i\beta$ (якщо γ не є коренем ХР, то $m = 0$). Останнє значення називають ***контрольним числом*** для квазіполінома (4.2).

Поліноми $\overline{P}_s(x)$, $\overline{Q}_s(x)$ записуємо з невизначеними коефіцієнтами, які як правило позначаються літерами. Числові значення цих коефіцієнтів знаходимо шляхом безпосередньої підстановки квазіполінома (4.3) у ЛНДР (4.1). Якщо загальний вигляд частинного розв’язку виписаний вірно, то з отриманої після підстановки рівності ці коефіцієнти повинні визначатися однозначно.

Підставивши знайдені числові значення коефіцієнтів у (4.3), одержимо шуканий частинний розв’язок $y_0(x)$ ЛНДР (4.1). Тоді загальний розв’язок $y(x)$ ЛНДР (4.1) записується згідно з формулою (2.2).

Зауваження 1. Якщо $f(x)$ складається з кількох доданків-квазіполіномів вигляду (4.2), яким відповідають різні контрольні числа, то для кожного з цих доданків частинний розв’язок записується окремо згідно з формулою (4.3), після чого $y_0(x)$ шукається методом невизначених коефіцієнтів у вигляді суми всіх записаних частинних розв’язків.

Зауваження 2. Якщо вільний член ЛНДР (4.1) не має спеціального вигляду (4.2), то загальний розв’язок такого рівняння знаходять за допомогою методу Лаґранжа аналогічно до ЛНДР зі змінними коефіцієнтами згідно з алгоритмом, викладеним у Теоремі 2.2.

5. Лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку, що зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Рівняння Ейлера має вигляд

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \quad x \in [a,b], \tag{5.1}$$

де a_1, ..., a_n – задані сталі.

ДР (5.1) є лінійним неоднорідним [при $f(x) \equiv 0$ – однорідним] рівнянням *n*-го порядку зі змінними коефіцієнтами. Воно зводиться до лінійного ДР зі сталими коефіцієнтами заміною незалежної змінної $x = \mathrm{e}^t$, $t = \ln x$. Справді, тоді маємо

$$y'(x) = \mathrm{e}^{-t}\, y'(t), \quad y''(x) = \mathrm{e}^{-2t}[y''(t) - y'(t)], \quad y'''(x) = \mathrm{e}^{-3t}[y'''(t) - 3y''(t) + 2y'(t)]$$

тощо. Очевидно, що після підстановки знайдених похідних у ДР (5.1) коефіцієнти x^k, $k = \overline{1,n}$ скоротяться, тому одержимо лінійне ДР зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_{n-1} y' + \alpha_n y(t) = f(\mathrm{e}^t), \tag{5.2}$$

де всі похідні беруться вже за новою незалежною змінною *t*.

Іноді (особливо у випадку однорідного рівняння) для інтегрування ДР (5.1) зручно ввести підстановку $y = x^\lambda$, де λ деяка невідома стала. Тоді після підкладання в ДР (5.1) для визначення λ одержимо алгебраїчне рівняння

$$\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+1)+\ldots+a_1\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+2)+\ldots+ \\ +a_{n-2}\lambda(\lambda-1)+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \tag{5.3}$$

Можна показати, що рівняння (5.3) буде характеристичним для ДР (5.2). Нехай λ_1, ..., λ_n – корені рівняння (5.3), а $y_1(t)$, ..., $y_n(t)$ – відповідні частинні розв'язки ЛОДР

$$y^{(n)}+\alpha_1 y^{(n-1)}+\ldots+\alpha_{n-1}y'+\alpha_n y(t)=0. \tag{5.4}$$

Тоді загальний розв'язок ДР (5.4) $y(t)=C_1y_1(t)+\ldots+C_ny_n(t)$. Частинний розв'язок ЛНДР (5.2) можна знайти методом невизначених коефіцієнтів або методом Лаґранжа. Із загального розв'язку ЛНДР (5.2) заміною $t=\ln x$ одержуємо загальний розв'язок рівняння Ейлера (5.1).

Рівняння Лежандра є ДР типу Ейлера і має вигляд

$$(\alpha x+\beta)^n y^{(n)}+a_1(\alpha x+\beta)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(\alpha x+\beta)y'+a_n y=f(x),\quad x\in[a,b], \tag{5.5}$$

де α, β – задані ненульові сталі. Очевидно, що при $\alpha=0$ (5.5) буде лінійним ДР зі сталими коефіцієнтами, а при $\beta=0$ стане рівнянням Ейлера. Якщо ж $\alpha\beta\neq 0$, то (5.5) можна звести до рівняння Ейлера заміною незалежної змінної $\xi=\alpha x+\beta$; тоді $y'(x)=\alpha y'(\xi)$, ..., $y^{(n)}(x)=\alpha^n y^{(n)}(\xi)$, і з (5.5) одержимо рівняння Ейлера вигляду

$$\alpha^n\xi^n y^{(n)}+a_1\alpha^{n-1}\xi^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}\alpha\xi y'+a_n y(\xi)=f\left(\frac{\xi-\beta}{\alpha}\right).$$

Ураховуючи наведені вище способи інтегрування ДР (5.1), можна і не зводити (5.5) попередньо до рівняння Ейлера, а одразу вводити підстановки: незалежної змінної $\alpha x+\beta=\mathrm{e}^t$ або залежної змінної $y=(\alpha x+\beta)^\lambda$ і далі розв'язувати отримане лінійне ДР зі сталими коефіцієнтами аналогічно до ДР (5.1).

Джерела:

Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 180-240.

Маринець К. В. Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи диференціальних рівнянь першого порядку. – Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння», частина ІІ. – Ужгород: «Говерла», 2017. – С. 26-45.