

До Модуля 4

Індивідуальні завдання №7 до розділу:

**СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ**

Постановка завдань:

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи (за наявності в заданій системі параметрів a, b визначити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий).
2. За допомогою критерію Рауса-Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння (за наявності в заданому рівнянні параметрів a, b визначити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий).
3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет.
4. Знайти та дослідити особливі точки рівняння або системи.

Варіант 1

1.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$$
2. $y''' + y'' + y' + 2y = 0.$
3. $y' = \frac{2x + y}{3x + 4y}.$
4. $y' = \frac{2y^2 + x}{3x + 6}.$

Варіант 2

1.
$$\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$$
2. $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0.$
3. $y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}.$
4. $y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}.$

Варіант 3

1.
$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases}$$
2. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$
3. $y' = \frac{x + 4y}{2x + 3y}.$
4. $y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$

Варіант 4

1.
$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y. \end{cases}$$
2. $y^{(4)} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0.$
3. $y' = \frac{x - 2y}{3x - 4y}.$

$$4. y' = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}.$$

Варіант 5

$$1. \begin{cases} \dot{x} = x + ay + y^2, \\ \dot{y} = bx - 3y - x^2. \end{cases} \quad 2. y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0. \quad 3. y' = \frac{x + 4y}{2x + 3y}.$$

$$4. y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

Варіант 6

$$1. \begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases} \quad 2. y^{(4)} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0. \quad 3. y' = \frac{x - 2y}{3x - 4y}.$$

$$4. y' = \frac{y + \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}.$$

Варіант 7

$$1. \begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = ax + by. \end{cases} \quad 2. y^{(4)} + 13y''' + 16y'' + 55y' + 76y = 0. \quad 3. y' = \frac{2x - y}{x - y}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3. \end{cases}$$

Варіант 8

$$1. \begin{cases} \dot{x} = \ln(3e^y - 2\cos x), \\ \dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8 + 12y}. \end{cases} \quad 2. y^{(4)} + 3y''' + 26y'' + 74y' + 85y = 0. \quad 3. y' = \frac{y - 2x}{2y - 3x}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2), \\ \dot{y} = e^x - e^y. \end{cases}$$

Варіант 9

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay}, \\ \dot{y} = \ln(1 + 9x + ay). \end{cases} \quad 2. y^{(4)} + 3,1y''' + 5,2y'' + 9,8y' + 5,8y = 0. \quad 3. y' = \frac{4y - 2x}{x + y}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$$

Варіант 10

$$1. \begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x), \\ \dot{y} = 2^y - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right). \end{cases} \quad 2. y^{(5)} + 2y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0. \quad 3. y' = \frac{y}{x}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(x^2 + xy). \end{cases}$$

Вариант 11

$$1. \begin{cases} \dot{x} = \ln(e + ax) - e^y, \\ \dot{y} = bx + \operatorname{tg} y. \end{cases} \quad 2. y^{(5)} + 2y^{(4)} + 5y''' + 6y'' + 5y' + 2y = 0. \quad 3. y' = \frac{4x - y}{3x - 2y}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = x^2 - (y - 2)^2. \end{cases}$$

Вариант 12

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases} \quad 2. y^{(5)} + 3y^{(4)} + 6y''' + 7y'' + 4y' + 4y = 0. \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = \ln \frac{y^2 - y + 1}{3}, \\ \dot{y} = x^2 - y^2. \end{cases}$$

Вариант 13

$$1. \begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases} \quad 2. y^{(5)} + 4y^{(4)} + 9y''' + 16y'' + 19y' + 13y = 0. \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y + y^2), \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}. \end{cases}$$

Вариант 14

$$1. \begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases} \quad 2. y^{(5)} + 4y^{(4)} + 16y''' + 25y'' + 13y' + 9y = 0. \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x - y)^2 + 3} - 2, \\ \dot{y} = e^{y^2 - x} - e. \end{cases}$$

Вариант 15

$$1. \begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y. \end{cases} \quad 2. y^{(5)} + 3y^{(4)} + 10y''' + 22y'' + 23y' + 12y = 0. \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

$$4. y' = \frac{2y^2 + x}{3x + 6}.$$

Варіант 16

$$1. \begin{cases} \dot{x} = x + ay + y^2, \\ \dot{y} = bx - 3y - x^2. \end{cases} \quad 2. y^{(5)} + 5y^{(4)} + 15y''' + 48y'' + 44y' + 74y = 0. \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$$

$$4. y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}.$$

Варіант 17

$$1. \begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases} \quad 2. y^{(5)} + 2y^{(4)} + 14y''' + 36y'' + 23y' + 68y = 0. \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$$

$$4. y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

Варіант 18

$$1. \begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = ax + by. \end{cases} \quad 2. y''' + ay'' + by' + 2y = 0. \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4y - 6x. \end{cases}$$

$$4. y' = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}.$$

Варіант 19

$$1. \begin{cases} \dot{x} = \ln(3e^y - 2\cos x), \\ \dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8 + 12y}. \end{cases} \quad 2. y''' + 3y'' + ay' + by = 0. \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = y - 2x, \\ \dot{y} = 2y - 4x. \end{cases}$$

$$4. y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

Варіант 20

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay}, \\ \dot{y} = \ln(1 + 9x + ay). \end{cases} \quad 2. y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + ay = 0. \quad 3. y' = \frac{2x + y}{3x + 4y}.$$

$$4. y' = \frac{y + \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}.$$

Варіант 21

$$1. \begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x), \\ \dot{y} = 2^y - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right). \end{cases} \quad 2. ay^{(4)} + y''' + y'' + y' + by = 0. \quad 3. y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3. \end{cases}$$

Варіант 22

$$\underline{1.} \begin{cases} \dot{x} = \ln(e+ax) - e^y, \\ \dot{y} = bx + \operatorname{tg} y. \end{cases} \quad \underline{2.} \quad y^{(4)} + 2y''' + 4y'' + ay' + by = 0. \quad \underline{3.} \quad y' = \frac{x+4y}{2x+3y}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = \ln(2-y^2), \\ \dot{y} = e^x - e^y. \end{cases}$$

Варіант 23

$$\underline{1.} \begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases} \quad \underline{2.} \quad y^{(4)} + ay''' + 4y'' + 2y' + by = 0. \quad \underline{3.} \quad y' = \frac{x-2y}{3x-4y}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = (2x-y)(x-2), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$$

Варіант 24

$$\underline{1.} \begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases} \quad \underline{2.} \quad y^{(4)} + 2y''' + ay'' + by' + y = 0. \quad \underline{3.} \quad y' = \frac{x+4y}{2x+3y}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(x^2 + xy). \end{cases}$$

Варіант 25

$$\underline{1.} \begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases} \quad \underline{2.} \quad y^{(4)} + ay''' + 4y'' + by' + y = 0. \quad \underline{3.} \quad y' = \frac{x-2y}{3x-4y}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = x^2 - (y-2)^2. \end{cases}$$

Джерело: Маринець К. В. Стійкість систем звичайних диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку. – Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння», частина III. – Ужгород: «Говерла», 2017. – С. 21-34.

Примітки.

1. Шукані функції у системах диференціальних рівнянь $x = x(t)$, $y = y(t)$ (похідні за змінною t позначені крапками); у звичайних диференціальних рівняннях $y = y(x)$ (похідні за змінною x позначені штрихами).
2. Підкресленням виділені номери завдань із параметрами, в яких вимагається визначити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий (див. постановку завдань).
3. **Синім кольором** позначені номери завдань із виявленими й виправленими друкарськими помилками.