ІНТЕГРОВНІ ТИПИ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

1. Неповні рівняння вищих порядків

Приклад 1.1. Розв'язати диференціальне рівняння (ДР)

$$y''' = 12x, \quad y = y(x). \tag{1.1}$$

Розв'язання. (1.1) є рівнянням вигляду $y^{(n)} = f(x)$, розв'язок якого знаходиться n-кратним інтегруванням (для заданого рівняння $n = 3$):

$$y'' = 12\int x dx + \overline{C}_1 = 6x^2 + \overline{C}_1,$$

$$y' = \int (6x^2 + \overline{C}_1) dx + C_2 = 2x^3 + \overline{C}_1 x + C_2,$$

$$y = \int (2x^3 + \overline{C}_1 x + C_2) dx + C_3 = \frac{x^4}{4} + \overline{C}_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Перепозначивши в останньому виразі задля спрощення $C_1 = \frac{\overline{C}_1}{2}$, отримаємо загальний розв'язок ДР (1.1). Із побудови цього розв'язку очевидно, що особливих розв'язків рівняння не має.

Відповідь. $y = \frac{x^4}{4} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

Приклад 1.2. Розв'язати рівняння:

$$y''' = y'' \operatorname{ctg} x, \quad y = y(x). \tag{1.2}$$

Розв'язання. (1.2) є неповним ДР третього порядку, що не містить шуканої функції $y(x)$, а тому його порядок можна понизити підстановкою $y'' = z(x)$, тоді $y''' = z'(x)$ і для визначення нової невідомої функції $z(x)$ отримуємо ДР першого порядку

$$z' = z \operatorname{ctg} x.$$

Це рівняння інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dz}{dx} = z \operatorname{ctg} x \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = \operatorname{ctg} x dx \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = \ln|\sin x| + \ln|\overline{C}_1|,$$

звідки

$$z = \overline{C}_1 \sin x.$$

Підклавши в останню рівність $z = y''$, отримаємо рівняння другого порядку вигляду $y^{(n)} = f(x)$, розв'язок якого знаходиться аналогічно до Прикладу 1.1:

$$y'' = \overline{C}_1 \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = -\overline{C}_1 \cos x + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = -\overline{C}_1 \sin x + C_2 x + C_3.$$

Перепозначивши в останньому виразі задля спрощення $C_1 = -\overline{C}_1$, одержимо загальний розв'язок ДР (1.2).

Зауважимо, що єдина підозріла на особливий розв'язок функція

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = Ax + B$$

отримується з загального розв'язку при значенні $C_1 = 0$, тому додаткових розв'язків ДР (1.2) не має.
Відповідь. $y = C_1 \sin x + C_2 x + C_3$.

Приклад 1.3. Розв'язати рівняння:

$$y^2 y' - y'' = -\frac{y'^2}{y}, \quad y = y(x). \tag{1.3}$$

Розв'язання. (1.3) є неповним ДР другого порядку, що не містить незалежної змінної *x*, а тому його порядок можна понизити підстановкою $y' = p(y)$, де $p(y(x))$ – нова невідома функція. Тоді $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'p$. Підстановка виразів для похідних у (1.3) дає

$$y^2 p - p'p = -\frac{p^2}{y},$$

звідки $p = 0$ або

$$y^2 - p' = -\frac{p}{y} \quad \Rightarrow \quad p' - \frac{p}{y} = y^2. \tag{1.4}$$

(1.4) є лінійне неоднорідне ДР першого порядку відносно невідомої функції $p(y)$. Зінтегруємо його методом варіації сталої (Лаґранжа). Згідно з алгоритмом цього методу спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного до (1.4) однорідного рівняння $p' - \frac{p}{y} = 0$. Це рівняння інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y},$$

звідки

$$p_{з.о.} = C\,\mathrm{e}^{\int \frac{dy}{y}} = Cy, \quad C = const. \tag{1.5}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1.4) будемо шукати у вигляді (1.5), вважаючи сталу *C* функцією незалежної змінної *y*:

$$p = C(y) \cdot y. \tag{1.6}$$

Функцію $C(y)$ знайдемо безпосередньою підстановкою (1.6) в (1.4):

$$C'(y) \cdot y + C(y) - \frac{C(y) \cdot y}{y} = y^2,$$

звідки

$$C'(y) = y \quad \Rightarrow \quad C(y) = \frac{y^2}{2} + C_1,$$

де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдений вираз для $C(y)$ у (1.6), одержимо загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР першого порядку (1.6)

$$p = \left(\frac{y^2}{2} + C_1\right) \cdot y = \frac{y(y^2 + 2C_1)}{2}.$$

Із урахуванням підстановки $y' = p$ з останньої рівності для визначення $y(x)$ отримаємо ДР першого порядку, яке інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(y^2+2C_1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2dy}{y(y^2+2C_1)}=dx. \tag{1.7}$$

Дріб у лівій частині останньої рівності подамо сумою простих дробів:

$$\frac{2}{y(y^2+2C_1)}=\frac{A}{y}+\frac{By+D}{y^2+2C_1}=\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{y^2+2C_1}\right).$$

Тоді з (1.7) після інтегрування одержимо

$$\frac{1}{C_1}\left(\ln|y|-\frac{1}{2}\ln|y^2+2C_1|\right)=x+\ln|\overline{C}_2|,$$

звідки

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+2C_1}}=\overline{C}_2^{C_1}\,\mathrm{e}^{C_1x}.$$

Перепозначивши в останньому виразі задля спрощення $C_2=\overline{C}_2^{C_1}$, одержимо загальний інтеграл ДР (1.3) $y=C_2\,\mathrm{e}^{C_1x}\sqrt{y^2+2C_1}$.

Додаткової перевірки вимагає випадок

$$p=0 \quad \Rightarrow \quad y'=0 \quad \Rightarrow \quad y=C.$$

Очевидно, що ця функція є розв’язком ДР (1.3) і не отримується з загального інтеграла при жодних значеннях сталих C_1, C_2 – отже, вона є особливим розв’язком.

Відповідь. $y=C_2\,\mathrm{e}^{C_1x}\sqrt{y^2+2C_1}$, $y=C$.

Приклад 1.4. Розв’язати задачу Коші для ДР третього порядку

$$2y'''-3y'^2=0, \quad y(0)=-3, \quad y'(0)=1, \quad y''(0)=-1. \tag{1.8}$$

Розв’язання. (1.3) є неповним ДР другого порядку, що не містить ні шуканої функції $y(x)$, ані незалежної змінної x, тому для пониження його порядку застосовні обидва методи, проілюстровані в Прикладах 1.2 та 1.3. Підстановка з Прикладу 1.2 виглядає простішою, тому покладемо $y'=z(x)$, тоді $y'''=z''(x)$ і для визначення нової невідомої функції $z(x)$ отримуємо ДР другого порядку

$$2z''-3z^2=0. \tag{1.9}$$

Неповне ДР (1.9) уже містить шукану функцію, зате не містить незалежної змінної, тобто для пониження його порядку слід застосувати підстановку з Прикладу 1.3 у вигляді $z'=p(z)$, де $p(z(x))$ – нова невідома функція. Тоді $z''=p'p$, і з (1.9) маємо

$$2p\frac{dp}{dz}-3z^2=0 \quad \Rightarrow \quad 2pdp=3z^2dz \quad \Rightarrow \quad p^2=z^3+C_1,$$

звідки

$$p=\pm\sqrt{z^3+C_1}. \tag{1.10}$$

Обчислимо значення сталої C_1 з урахуванням початкових умов задачі Коші (1.8). Для цього спочатку знайдемо початкові значення для функцій z і p на підставі введених підстановок:

$$z=y' \quad \Rightarrow \quad z_0=y_0'=1,$$
$$p=z'=y'' \quad \Rightarrow \quad p_0=y_0''=-1.$$

Підстановка цих значень в (1.10) дає

$$-1=\pm\sqrt{1^3+C_1}\,.$$

Остання рівність виконується тільки за знаку «–» перед квадратним коренем і значення $C_1=0$. Отже, для знаходження розв’язку задачі Коші (1.8) рівність (1.10) слід записати у вигляді

$$p=-\sqrt{z^3}\,.$$

Оскільки $p=z'$, то з отриманої рівності маємо

$$\frac{dz}{dx}=-z^{\frac{3}{2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{z^{\frac{3}{2}}}=-dx \quad\Rightarrow\quad -\frac{2}{z^{\frac{1}{2}}}=-x+C_2\,.$$

З урахуванням початкових умов $x_0=0$, $z_0=1$ остання рівність дає $C_2=-2$. Тому для знаходження розв’язку задачі Коші (1.8) одержимо співвідношення

$$-\frac{2}{z^{\frac{1}{2}}}=-x-2 \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{\sqrt{z}}=x+2 \quad\Rightarrow\quad z=\frac{4}{(x+2)^2}\,.$$

Оскільки $z=y'$, то після заміни та інтегрування отримаємо

$$y'=\frac{4}{(x+2)^2} \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{4}{x+2}+C_3\,.$$

З урахуванням початкових умов $x_0=0$, $y_0=-3$ остання рівність дає $C_3=-1$. Отже, шуканий розв’язок задачі Коші (1.8) рівний

$$y=-\frac{4}{x+2}-1=\frac{-4-x-2}{x+2}=-\frac{x+6}{x+2}.$$

Відповідь. $y=-\dfrac{x+6}{x+2}$.

2. Однорідні та квазіоднорідні рівняння вищих порядків

Приклад 2.1. Розв’язати рівняння другого порядку

$$yy''-y'^2-6xy^2=0\,. \tag{2.1}$$

Розв’язання. Покажемо, що ДР (2.1) є однорідним, тобто для довільного $\lambda\neq 0$ виконується умова однорідності у вигляді

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^m F(x,y,y',y''), \tag{2.2}$$

де $F(x,y,y',y'')=yy''-y'^2-6xy^2$. Справді, для останньої функції

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda y\cdot\lambda y''-(\lambda y')^2-6x\cdot(\lambda y)^2=\lambda^2 F(x,y,y',y''),$$

тобто виконується умова (2.2) з виміром $m=2$. Отже, ДР (2.1) є однорідним, а тому його порядок можна понизити підстановкою $y=\mathrm{e}^{\int z(x)dx}$, де $z(x)$ нова невідома функція. Маємо: $y'=\mathrm{e}^{\int z(x)dx}\cdot z=yz$, $y''=y(z'+z^2)$. Підклавши похідні в ДР (2.1), для визначення $z(x)$ отримаємо ДР першого порядку

$$y\cdot y(z'+z^2)-(yz)^2-6xy^2=0 \quad\Rightarrow\quad z'-6x=0$$

за умови $y\neq 0$. Інтегруємо:

$$z'=6x \quad\Rightarrow\quad z=3x^2+C_1\,. \tag{2.3}$$

Згідно з нашою підстановкою $y' = yz$, звідки $z = \frac{y'}{y}$. Підставивши це значення в (2.3), отримаємо ДР для визначення $y(x)$

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = (3x^2 + C_1)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = x^3 + C_1 x + \ln|C_2|,$$

звідки

$$y = C_2\, \mathrm{e}^{x^3 + C_1 x}.$$

Окремої перевірки вимагає випадок $y = 0$. Очевидно, що ця функція є розв'язком ДР (2.1), однак отримується з загального розв'язку при значенні $C_2 = 0$ – отже, вона не дає додаткового розв'язку.

Відповідь. $y = C_2\, \mathrm{e}^{x^3 + C_1 x}$.

Приклад 2.2. Розв'язати рівняння (2.1) шляхом подання його лівої частини у вигляді точної похідної.

Розв'язання. Щоб подати ДР (2.1) у вигляді точної похідної, поділимо його на y^2, вважаючи $y \neq 0$. Маємо

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} - 6x = 0.$$

Очевидно, що дріб у першому доданку є похідною частки, тому останню рівність можна записати як

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y} - 3x^2\right) = 0,$$

звідки після інтегрування маємо

$$\frac{y'}{y} - 3x^2 = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 3x^2 + C_1.$$

Отримане рівняння вже розв'язане у Прикладі 2.1 (див. вище).

Приклад 2.3. Зінтегрувати рівняння

$$\frac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \frac{2yy'}{x} - 3\left(y' - \frac{y}{x}\right). \tag{2.4}$$

Розв'язання. Рівняння (2.4) не є ні неповним, ані однорідним (за перевірки умови однорідності в різних доданках отримуються різні степені λ). Покажемо, що задане ДР є квазіоднорідним, тобто для $k \neq 0$ виконується умова квазіоднорідності у вигляді

$$F(kx, k^m y, k^{m-1} y', k^{m-2} y'') = k^{\alpha} F(x, y, y', y''), \tag{2.5}$$

де $F(x, y, y', y'') = \frac{y^2}{x^2} + y'^2 - 3xy'' - \frac{2yy'}{x} + 3\left(y' - \frac{y}{x}\right)$. Для останньої функції

$$F(kx,k^m y,k^{m-1}y',k^{m-2}y'')=\frac{(k^m y)^2}{(kx)^2}+(k^{m-1}y')^2-$$
$$-3kx\cdot k^{m-2}y''-\frac{2k^m y\cdot k^{m-1}y'}{kx}+3\left(k^{m-1}y'-\frac{k^m y}{kx}\right).$$

Зрозуміло, що умова (2.5) виконуватиметься тоді, коли степені k в усіх доданках отриманого виразу будуть рівними. Прирівнявши ці степені, отримаємо систему рівнянь для визначення m

$$2m-2=2(m-1)=1+m-2=m+m-1-1=m-1=m-1,$$

яку, вилучивши повторювані вирази, можна спростити до вигляду

$$2m-2=m-1.$$

Коренем останнього алгебраїчного рівняння є число $m=1$. Існування цього кореня й означає, що ДР (2.4) є квазіоднорідним.
Отже, порядок ДР (2.4) понижується введенням нової незалежної змінної t і нової шуканої функції $z(t)$ згідно з підстановками

$$x=\mathrm{e}^t\ \ (t=\ln x),\ \ y=\mathrm{e}^{mt}\cdot z(t)=\mathrm{e}^t\cdot z(t).\qquad(2.6)$$

Тоді

$$y'(x)=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}=\mathrm{e}^t(z'(t)+z(t))\cdot\mathrm{e}^{-t}=z'+z,$$
$$y''(x)=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{1}{x}=(z''(t)+z'(t))\cdot\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{e}^{-t}(z''+z').$$

Підклавши вирази для $x, y,\ y'$ та y'' у ДР (2.4), одержимо рівність

$$\frac{(\mathrm{e}^t z)^2}{\mathrm{e}^{2t}}+(z'+z)^2=3\mathrm{e}^t\cdot\mathrm{e}^{-t}(z''+z')+\frac{2\mathrm{e}^t z\cdot(z'+z)}{\mathrm{e}^t}-3\left(z'+z-\frac{\mathrm{e}^t z}{\mathrm{e}^t}\right),$$

яка після спрощення запишеться у вигляді

$$z'^2=3z''.$$

Це ДР другого порядку, що не містить шуканої функції, тому для пониження його порядку покладемо $z'=v(t)$, тоді $z''=v'(t)$ і для визначення нової невідомої функції $v(t)$ отримуємо ДР першого порядку

$$v^2=3v'.\qquad(2.7)$$

Зінтегруємо рівняння (2.7):

$$3\frac{dv}{dt}=v^2\quad\Rightarrow\quad\frac{dv}{v^2}=\frac{dt}{3}\quad\Rightarrow\quad-\frac{1}{v}=\frac{t}{3}+\frac{C_1}{3},$$

звідки

$$v=-\frac{3}{t+C_1}.$$

Оскільки $v=z'$, то після підстановки й інтегрування маємо

$$z'=-\frac{3}{t+C_1}\quad\Rightarrow\quad z=-3\ln|t+C_1|+C_2.$$

Загальний розв'язок ДР (2.4) отримується з урахуванням підстановок (2.6):

$$y=\mathrm{e}^t\cdot z(t)=x\cdot(C_2-3\ln|\ln x+C_1|).$$

Додаткової перевірки вимагає випадок

$$v=0 \quad \Rightarrow \quad z'=0 \quad \Rightarrow \quad z=C \quad \Rightarrow \quad y=Cx.$$

Ця функція є розв'язком ДР (2.4), і не отримується з загального розв'язку при жодних значеннях сталих C_1, C_2 – отже, вона є особливим розв'язком.

Відповідь. $y=x\cdot(C_2-3\ln|\ln x+C_1|)$, $y=Cx$.

Приклад 2.4. Розв'язати задачу Коші:

$$x^2y''-3xy'=\frac{6y^2}{x^2}-4y, \quad y(1)=1, \quad y'(1)=4. \tag{2.8}$$

Розв'язання. Рівняння (2.8) не є ні неповним, ані однорідним (за перевірки умови однорідності в різних доданках отримуються різні степені λ). Покажемо, що задане ДР є квазіоднорідним, тобто для $k\neq 0$ виконується умова квазіоднорідності у вигляді (2.5), де $F(x,y,y',y'')=x^2y''-3xy'-\dfrac{6y^2}{x^2}+4y$. Для останньої функції

$$F(kx,k^my,k^{m-1}y',k^{m-2}y'')=(kx)^2\cdot k^{m-2}y''-$$

$$-3kx\cdot k^{m-1}y'-\frac{6(k^my)^2}{(kx)^2}+4k^my.$$

Умова (2.5) виконуватиметься тоді, коли степені k в усіх доданках отриманого виразу будуть рівними. Прирівнявши ці степені, отримаємо систему рівнянь для визначення m

$$2+m-2=1+m-1=2m-2=m,$$

яку, вилучивши повторювані значення, можна спростити до вигляду

$$2m-2=m.$$

Коренем останнього алгебраїчного рівняння є число $m=2$. Існування цього кореня й означає, що ДР (2.8) є квазіоднорідним.

Отже, порядок ДР (2.8) понижується введенням нової незалежної змінної t і нової шуканої функції $z(t)$ згідно з підстановками

$$x=\mathrm{e}^t \ \ (t=\ln x), \ \ y=\mathrm{e}^{mt}\cdot z(t)=\mathrm{e}^{2t}\cdot z(t). \tag{2.9}$$

Тоді

$$y'(x)=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}=\mathrm{e}^{2t}(z'(t)+2z(t))\cdot\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{e}^t(z'+2z),$$

$$y''(x)=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{1}{x}=\mathrm{e}^t(z''(t)+2z'(t)+z'(t)+2z(t))\cdot\mathrm{e}^{-t}=z''+3z'+2z.$$

Підклавши вирази для x, y, y' та y'' у ДР (2.8), одержимо рівність

$$\mathrm{e}^{2t}(z''+3z'+2z)-3\mathrm{e}^t\cdot\mathrm{e}^t(z'+2z)=\frac{6(\mathrm{e}^{2t}z)^2}{\mathrm{e}^{2t}}-4\mathrm{e}^{2t}z,$$

яка після спрощення запишеться у вигляді

$$z''=6z^2.$$

Це ДР другого порядку, що не містить незалежної змінної, тому для пониження його порядку покладемо $z'=p(z)$, тоді $z''=p'p$ і для визначення нової невідомої функції $p(z)$ отримуємо ДР першого порядку

$$p'p=6z^2. \tag{2.10}$$

Зінтегруємо рівняння (2.10):

$$p\frac{dp}{dz}=6z^2 \quad\Rightarrow\quad pdp=6z^2dz \quad\Rightarrow\quad \frac{p^2}{2}=2z^3+\frac{C_1}{2},$$

звідки

$$p=\pm\sqrt{4z^3+C_1}\,. \tag{2.11}$$

Обчислимо значення сталої C_1 з урахуванням початкових умов задачі Коші (2.8). Для цього спочатку знайдемо початкові значення для функцій z і p на підставі введених підстановок:

$$x=\mathrm{e}^t,\quad x_0=1 \quad\Rightarrow\quad t_0=0;$$

$$y=\mathrm{e}^{2t}z,\quad y_0=1 \quad\Rightarrow\quad z_0=1;$$

$$y'=\mathrm{e}^t(z'+2z),\quad y_0'=4 \quad\Rightarrow\quad z_0'=p_0=2.$$

Підстановка цих значень у (2.11) дає

$$2=\pm\sqrt{4\cdot 1^3+C_1}\,.$$

Остання рівність виконується тільки за знаку «+» перед квадратним коренем і значення $C_1=0$. Отже, для знаходження розв'язку задачі Коші (2.8) рівність (2.11) слід записати у вигляді

$$p=2\sqrt{z^3}\,.$$

Оскільки $p=z'$, то з отриманої рівності маємо

$$\frac{dz}{dt}=2z^{\frac{3}{2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{z^{\frac{3}{2}}}=2dt \quad\Rightarrow\quad -\frac{2}{z^{\frac{1}{2}}}=2t+C_2\,.$$

З урахуванням початкових умов $t_0=0$, $z_0=1$ остання рівність дає $C_2=-2$. Тому для знаходження розв'язку задачі Коші (2.8) одержимо співвідношення

$$-\frac{2}{z^{\frac{1}{2}}}=2t-2 \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{\sqrt{z}}=2-2t \quad\Rightarrow\quad z=\frac{1}{(1-t)^2}.$$

Шуканий розв'язок задачі Коші (2.8) отримується з урахуванням підстановок (2.9):

$$y=\mathrm{e}^{2t}\cdot z(t)=x^2\cdot\frac{1}{(1-\ln x)^2}.$$

Відповідь. $y=\dfrac{x^2}{(1-\ln x)^2}$.

3. Рівняння з точними похідними

Деякі диференціальні рівняння вищих порядків допускають пониження порядку шляхом подання обох їх частин у вигляді точних похідних за незалежною змінною від якихось складних функцій. Такий спосіб інтегрування вже ілюструвався у Прикладі 2.2. Задля кращого розуміння наведемо ще кілька типових прикладів, де допускається цей штучний шлях пониження порядку для рівнянь вищих порядків.

Приклад 3.1. Зінтегрувати рівняння четвертого порядку шляхом подання у вигляді точної похідної:

$$5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = 0, \quad y = y(x). \qquad (3.1)$$

Розв'язання. (3.1) є неповним ДР четвертого порядку, що не містить ні шуканої функції $y(x)$, ані незалежної змінної x, тобто належить до інтегровних типів. Щоб подати його ліву частину у вигляді точної похідної, перепишемо (3.1) у вигляді

$$2y'''^2 + 3[y'''^2 - y''y^{(4)}] = 0.$$

Поділимо останню рівність на y'''^2, вважаючи $y''' \neq 0$. Маємо

$$2 + \frac{3[y'''^2 - y''y^{(4)}]}{y'''^2} = 0. \qquad (3.2)$$

Очевидно, що дріб у другому доданку є похідною частки, тому (3.2) можна подати як

$$\frac{d}{dx}\left(2x + \frac{3y''}{y'''}\right) = 0,$$

звідки після інтегрування маємо

$$2x + \frac{3y''}{y'''} = \overline{C}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'''}{y''} = \frac{3}{\overline{C}_1 - 2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'''}{y''} + \frac{3}{2x + C_1} = 0,$$

де $C_1 = -\overline{C}_1$. Отримане рівняння третього порядку також допускає подання у вигляді точної похідної:

$$\frac{d}{dx}\left[\ln y'' + \frac{3}{2}\ln(2x + C_1)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln y'' + \frac{3}{2}\ln(2x + C_1) = \ln|\overline{C}_2|,$$

звідки

$$y'' = \overline{C}_2(2x + C_1)^{-3/2}. \qquad (3.3)$$

Отримане ДР другого порядку (3.3) є рівнянням вигляду $y^{(n)} = f(x)$, розв'язок якого знаходиться n-кратним інтегруванням (для нашого рівняння $n = 2$):

$$y' = -\overline{C}_2(2x + C_1)^{-1/2} + C_3,$$

$$y = -\overline{C}_2(2x + C_1)^{1/2} + C_3x + C_4.$$

Ввівши позначення $C_2 = -\overline{C}_2$, отримаємо загальний розв'язок ДР (3.1)

$$y = C_2\sqrt{2x + C_1} + C_3x + C_4. \qquad (3.4)$$

Додаткової перевірки вимагає випадок

$$y''' = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = \overline{A}_1 \quad \Rightarrow \quad y' = \overline{A}_1x + A_2 \quad \Rightarrow \quad y = A_1x^2 + A_2x + A_3,$$

де $A_1 = 0{,}5\overline{A}_1$. Отримана функція очевидно є розв'язком ДР (3.1) і не отримується з загального розв'язку (3.4) – отже, вона є особливим розв'язком.

Відповідь. $y = C_2\sqrt{2x + C_1} + C_3x + C_4$, $y = A_1x^2 + A_2x + A_3$.

Приклад 3.2. Зінтегрувати рівняння другого порядку шляхом подання у вигляді точної похідної:

$$y''(2y' - y) = y'^2, \quad y = y(x). \qquad (3.5)$$

Розв'язання. (3.5) є неповним ДР, що не містить незалежної змінної x, і водночас однорідним ДР другого порядку, тобто належить до інтегровних типів. Щоб подати його у вигляді точної похідної, перепишемо (3.5) у вигляді

$$2y'y'' - (yy'' + y'^2) = 0.$$

Очевидно, що вираз у дужках є похідною добутку, тому (3.5) можна подати як

$$\frac{d}{dx}(y'^2 - yy') = 0,$$

звідки після інтегрування маємо

$$y'^2 - yy' = C_1 \quad \Rightarrow \quad y = y' - \frac{C_1}{y'}. \tag{3.6}$$

Це неявне рівняння типу $y = f(y')$. Розв'яжемо його шляхом введення параметра

$$y' = p \quad \Rightarrow \quad dy = pdx. \tag{3.7}$$

Тоді з (3.6)

$$y = p + \frac{C_1}{p} \quad \Rightarrow \quad dy = \left(1 - \frac{C_1}{p^2}\right)dp. \tag{3.8}$$

Із (3.8) з урахуванням (3.7) маємо:

$$pdx = \left(1 - \frac{C_1}{p^2}\right)dp \quad \Rightarrow \quad dx = \left(\frac{1}{p} - \frac{C_1}{p^3}\right)dp,$$

звідки $x = \ln|p| + \frac{C_1}{2p^2} + C_2$. Отже, загальний розв'язок ДР (3.5) у параметричній формі

$$x = \ln|p| + \frac{C_1}{2p^2} + C_2, \quad y = p + \frac{C_1}{p}.$$

Із (3.6) випливає, що додаткової перевірки вимагає випадок

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C.$$

Отримана функція очевидно є розв'язком ДР (3.5) і не отримується з загального розв'язку – отже, вона є особливим розв'язком.

Відповідь. $x = \ln|p| + \frac{C_1}{2p^2} + C_2, \quad y = p + \frac{C_1}{p}; \quad y = C.$

Приклад 3.3. Із застосуванням подання рівняння у вигляді точної похідної розв'язати задачу Коші для рівняння другого порядку:

$$yy'' - y'^2 = xy^2y' + y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \tag{3.9}$$

Розв'язання. Можна показати, що рівняння (3.9) є квазіоднорідним при $m = -2$, а отже, належить до інтегровних типів. Щоб подати його у вигляді точної похідної, перенесемо всі доданки в ДР (3.9) у ліву частину і поділимо отриману рівність на y^2, враховуючи, що з огляду на початкові умови $y \neq 0$. Маємо

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} - (xy' + y) = 0. \tag{3.10}$$

Очевидно, що дріб у першому доданку є похідною частки, а вираз у дужках – похідною добутку, тому (3.10) можна подати як

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y} - xy\right) = 0,$$

звідки після інтегрування маємо

$$\frac{y'}{y} - xy = C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = C_1 y + xy^2. \tag{3.11}$$

Обчислимо значення сталої C_1 з урахуванням початкових умов задачі Коші (3.9):

$$-1 = C_1 \cdot 1 + 0 \cdot 1^2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1,$$

а тому рівняння (3.11) запишеться як

$$y' + y = xy^2. \tag{3.12}$$

Зінтегруємо одержане рівняння Бернуллі (3.12) методом підстановки (Д'Аламбера), шукаючи розв'язок у вигляді добутку двох функцій незалежної змінної x

$$y = u(x) \cdot v(x). \tag{3.13}$$

Після підстановки (3.13) у рівняння (3.12) і групування доданків маємо:

$$u'v + u\left[v' + v\right] = x(uv)^2. \tag{3.14}$$

Будемо вимагати, щоб у (3.14) коефіцієнт при $u(x)$ перетворився в нуль, тоді за функцію $v(x)$ можна взяти будь-який розв'язок лінійного однорідного ДР

$$\frac{dv}{dx} + v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -dx,$$

наприклад, $v = \mathrm{e}^{-\int dx} = \mathrm{e}^{-x}$. Тоді з (3.14) для визначення функції $u(x)$ дістанемо рівняння

$$\mathrm{e}^{-x}\frac{du}{dx} = \mathrm{e}^{-2x} \cdot xu^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u^2} = x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx,$$

звідки після інтегрування дістанемо

$$-\frac{1}{u} = -\mathrm{e}^{-x}(x+1) - C_2 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}(x+1) + C_2}.$$

Підставивши знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$ у (3.13), одержимо загальний розв'язок рівняння Бернуллі (3.12)

$$y = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}(x+1) + C_2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x + 1 + C_2\,\mathrm{e}^{x}}. \tag{3.15}$$

Виділимо з (3.15) частинний розв'язок, який справджує задану початкову умову $y(0) = 1$:

$$1 = \frac{1}{1 + C_2} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Шуканий розв'язок задачі Коші (3.9) отримаємо, підставивши знайдене значення сталої C_2 у (3.15).

Відповідь. $y = \dfrac{1}{x+1}$.

Примітка. Необхідні теоретичні відомості по темах розділу:
Маринець К. В. Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи диференціальних рівнянь першого порядку. – Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння», частина ІІ. – Ужгород: «Говерла», 2017. – С. 3-19.
Лекції до Модуля 2 – Інтегровні типи нелінійних рівнянь вищих порядків.