Курс: «Диференціальні рівняння та їх застосування» (П2) **ст. викл. Рего В. Л.**

До Модуля 2

Індивідуальні завдання №4 до розділів:

ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Постановка завдань:

1. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет.
2. Знайти та дослідити особливі точки рівняння або системи.
3. Записати множину розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку.
4. Знайти поверхню, що задовольняє вказане рівняння і проходить через задану криву.
5. Дати бойову інтерпретацію та розв'язати задачу Коші, вказавши переможця в описаній моделі бойових дій (вважати, що початкові умови вимірюються в тисячах осіб).

Варіант 1

1. $y' = \dfrac{2x+y}{3x+4y}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(x^2 + xy). \end{cases}$ **3.** $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$, $x = 0$, $z = y^2$. **5.** $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 5y + 2\cos t, \\ \dot{y} = -2x - y + 2\sin t, \end{cases}$ $x(0) = 4,\quad y(0) = 3.$

Варіант 2

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = x - 4y. \end{cases}$ **2.** $y' = \dfrac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}$. **3.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} + (2\mathrm{e}^x - y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$, $y = 1$, $z = x^2$. **5.** $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \mathrm{e}^{-2t}, \\ \dot{y} = -x - 3y + 2\mathrm{e}^{-2t}, \end{cases}$ $x(0) = 2,\quad y(0) = 2.$

Варіант 3

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y, \\ \dot{y} = x + 4y. \end{cases}$ **2.** $y' = \dfrac{2y}{x^2 - y^2 - 1}$. **3.** $2\sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - xy$, $x = 2$, $z = y^2 + 1$. **5.** $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y + 2\mathrm{e}^{2t}, \\ \dot{y} = -x - 3y + 13\mathrm{e}^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = 5, \quad y(0) = 1.$

Варіант 4

1. $y' = \dfrac{x - 2y}{3x - 4y}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x-y)^2 + 3} - 2, \\ \dot{y} = \mathrm{e}^{y^2 - x} - \mathrm{e}. \end{cases}$ **3.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + 2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$.

4. $\operatorname{tg} x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, $y = x$, $z = x^3$. **5.** $\begin{cases} \dot{x} = -2y + 3\mathrm{e}^{-t}, \\ \dot{y} = -4x - 2y + 6\mathrm{e}^{-t}, \end{cases}$ $x(0) = \dfrac{1}{4}, \quad y(0) = \dfrac{7}{20}.$

Варіант 5

1. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y. \end{cases}$ **2.** $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}$. **3.** $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + xy\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$.

4. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y)$, $x = 1$, $yz + 1 = 0$.

5. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 45\sin 3t, \\ \dot{y} = -6x + 22\cos 3t, \end{cases}$ $x(0) = 4, \quad y(0) = 4.$

Варіант 6

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$ **2.** $y' = \dfrac{y + \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}$. **3.** $(x - 2\mathrm{e}^{y})\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

4. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$, $y = -2$, $z = x - x^2$.

5. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 2y + 9, \\ \dot{y} = -6x - 4y + 4, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 22.$

Варіант 7

1. $y' = \dfrac{2x - y}{x - y}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3. \end{cases}$ **3.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + 2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$.

4. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x} + xz\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$, $x = a$, $y^2 + z^2 = a^2$. **5.** $\begin{cases} \dot{x} = -8x - 2y + 11, \\ \dot{y} = -4x - y + 10, \end{cases}$ $x(0) = 19, \quad y(0) = 2.$

Варіант 8

1. $y' = \dfrac{y - 2x}{2y - 3x}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2), \\ \dot{y} = e^x - e^y. \end{cases}$ **3.** $xy\dfrac{\partial u}{\partial x} + x^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = y$.

4. $z\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xz$, $x + y = 2$, $yz = 1$. **5.** $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y + 13e^{-t}, \\ \dot{y} = -x - 6y + e^{-t}, \end{cases}$ $x(0) = 11, \quad y(0) = 2.$

Варіант 9

1. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4y - 2x. \end{cases}$ **2.** $y' = \dfrac{xy - 2}{(2x - y)(x - 2)}$ **3.** $(x^2 + y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$.

4. $z\dfrac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2)\dfrac{\partial z}{\partial y} + x = 0$, $y = x^2$, $z = 2x$.

5. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 5y + 2\cos t, \\ \dot{y} = -2x - y - 2\cos t, \end{cases}$ $x(0) = 4, \quad y(0) = 3.$

Варіант 10

1. $y' = \dfrac{y}{x}$. **2.** $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y + y^2), \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}. \end{cases}$ **3.** $2y^4\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = x\sqrt{z^2 + 1}$.

4. $(y - z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - y$, $z = y = -x$.

5. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = -x - 3y - e^{-2t}, \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 2.$

Варіант 11

1. $\begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$ **2.** $y' = \dfrac{x^2 - (y-2)^2}{x^2 - y}$. **3.** $x^2 z \dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2 z \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y$.

4. $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + (xz + y) \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, $x + y = 2z$, $xz = 1$.

5. $\begin{cases} \dot{x} = -2y + 3\mathrm{e}^{-t}, \\ \dot{y} = -4x - 2y + 6\mathrm{e}^{-t}, \end{cases}$ $x(0) = 0{,}25, \quad y(0) = 0{,}35.$

Варіант 12

1. $y' = \dfrac{4x - y}{3x - 2y}$ **2.** $\begin{cases} \dot{x} = \ln \dfrac{y^2 - y + 1}{3}, \\ \dot{y} = x^2 - y^2. \end{cases}$ **3.** $yz \dfrac{\partial z}{\partial x} - xz \dfrac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{e}^z$.

4. $y^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + yz \dfrac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$, $x - y = 0$, $x - yz = 1$.

5. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y + 3\cos 4t, \\ \dot{y} = -3x - 2y + 8\cos 4t, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = \dfrac{3}{2}.$

Варіант 13

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$ **2.** $y' = \dfrac{3 - \sqrt{x^2 + 8y}}{\ln(1 - y + y^2)}$. **3.** $(z - y)^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + xz \dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$.

4. $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + z \dfrac{\partial z}{\partial y} = y$, $y = 2z$, $x + 2y = z$. **5.** $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{3y}{2} + 9, \\ \dot{y} = -\dfrac{3x}{2} - \dfrac{y}{2} + 11, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 5.$

Варіант 14

1. $y' = \dfrac{-6x - 5y}{x + 3y}$ **2.** $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x - y)^2 + 3} - 2, \\ \dot{y} = \mathrm{e}^{y^2 - x} - \mathrm{e}. \end{cases}$ **3.** $xy \dfrac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z) \dfrac{\partial z}{\partial y} = yz$.

4. $(y+2z^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}-2x^2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2$, $x=z$, $y=x^2$.

5. $\begin{cases}\dot{x}=-2x-2y+2{,}02\mathrm{e}^{0{,}01t},\\ \dot{y}=-x-y+0{,}99\mathrm{e}^{0{,}01t},\end{cases}$ $x(0)=4,\quad y(0)=3.$

Варіант 15

1. $\begin{cases}\dot{x}=x,\\ \dot{y}=2x-y.\end{cases}$ **2.** $y'=\dfrac{2y^2+x}{3x+6}$. **3.** $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{z}$.

4. $(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$, $x-y=2$, $z+2x=1$.

5. $\begin{cases}\dot{x}=-3x-\dfrac{3y}{2}+\dfrac{3t+1}{6},\\ \dot{y}=-2x-y+\dfrac{t}{3},\end{cases}$ $x(0)=4,\quad y(0)=12.$

Варіант 16

1. $y'=\dfrac{2x+2y}{-2x-5y}$ **2.** $\begin{cases}\dot{x}=2xy-4y-8,\\ \dot{y}=4y^2-x^2.\end{cases}$ **3.** $\mathrm{e}^x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=y\mathrm{e}^x$.

4. $xy^3\dfrac{\partial z}{\partial x}+x^2z^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=y^3z$, $x=-z^3$, $y=z^2$.

5. $\begin{cases}\dot{x}=-x-2y+20\cos 2t,\\ \dot{y}=-3x+32\sin 2t,\end{cases}$ $x(0)=15,\quad y(0)=2.$

Джерело: *Маринець К. В.* Стійкість систем звичайних диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку. – Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння», частина III. – Ужгород: «Говерла», 2017. – С. 3-50.

Примітка до завдань №№1, 2, 5. Шукані функції у системах диференціальних рівнянь $x=x(t)$, $y=y(t)$ (похідні за змінною t позначені крапками); у звичайних диференціальних рівняннях $y=y(x)$ (похідні за змінною x позначені штрихами).