

До Модуля 1

Індивідуальні завдання №2 до розділу:

**ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО
ПОРЯДКУ. РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ**

Постановка завдань:

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку (за наявності початкової умови – задачу Коші для лінійного рівняння першого порядку).
2. Зінтегрувати рівняння Бернуллі (за наявності початкової умови – задачу Коші для рівняння Бернуллі).
3. Знайти розв'язок рівняння (за наявності початкової умови – задачу Коші для заданого рівняння), звівши його до лінійного диференціального рівняння.
4. Перевірити, чи є задане рівняння рівнянням у повних диференціалах, та знайти його розв'язок (за наявності початкової умови – знайти інтегральну криву, що проходить через задану точку).
5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести задане рівняння до рівняння в повних диференціалах та зінтегрувати його.

Варіант 1

1. $xy' - (x-1)y = 3x$, $y(-2) = 1$. 2. $y' + 2y = y^2 e^x$. 3. $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$.
4. $(2y + \cos x + 1)dx + (2x + \sin y - 1)dy = 0$. 5. $(3x^2 y - x + 1)dx + dy = 0$.

Варіант 2

1. $xy' - 2y = x^4$. 2. $(x+1)(y' + y^2) = -y$. 3. $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$, $y(1) = -2$.
4. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$. 5. $(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0$.

Варіант 3

1. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. 2. $xy^2 y' = x^2 + y^3$. 3. $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$.
4. $x(2 - 9xy^2)dx + y(4y^2 - 6x^3)dy = 0$. 5. $(2x^2 y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$.

Варіант 4

1. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$. 2. $xydy = (y^2 + x)dx$. 3. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$, $y(e) = 0$.
4. $e^{-y} dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$. 5. $(2x^2 y - 3y^3)dx + (7 - 6xy^2)dy = 0$.

Варіант 5

1. $x^2 y' + xy + 1 = 0$. 2. $xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y$, $y(1) = 1$. 3. $5y^3 y' + 2y^4 = \frac{4x}{y} + 2y^{-1}$.

4. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$. 5. $(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y dy = 0$.

Варіант 6

1. $y = x(y' - x \cos x)$. 2. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$. 3. $y' - 10(x+1)^3 \cdot \sqrt[10]{y^9} = \frac{20y}{x+1}$.

4. $\frac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$, $M(0,1)$. 5. $(2y + xy^3)dx + (1 + x^2 y^2)dy = 0$.

Варіант 7

1. $2x(x^2 + y)dx = dy$, $y(2) = \sqrt{3}$. 2. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$. 3. $y \operatorname{tg} x = \frac{y^3}{\cos^3 x} + 2y'$.

4. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$. 5. $(1 + x^2 y)dx + (x^3 + x^2 y^2)dy = 0$.

Варіант 8

1. $(xy' - 1) \ln x = 2y$. 2. $x^3 y' \sin y = xy' - 2y$. 3. $xy^2 dx + dy + \frac{3y}{x} dx = 0$.

4. $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$, $M(-\pi, \pi)$. 5. $y^2(x - 3y)dx + x^2(x + y)dy = 0$.

Варіант 9

1. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$. 2. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$, $y(2) = 1$. 3. $y \operatorname{tg} x - 2y' = y^3 \cos^2 x$.

4. $3x^2(1 + \ln y)dx - \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy = 0$. 5. $\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right)dy = 0$.

Варіант 10

1. $(x + y^2)dy = ydx$. 2. $x dx = (x^2 - 2y + 1)dy$. 3. $1 = 4x\sqrt{y}(1 - \sqrt{y}y')$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

4. $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0$. 5. $\left(\frac{y^3}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)dy = \frac{y}{x^3}dx$.

Варіант 11

1. $(2e^y - x)y' = 1$. 2. $(x+1)(yy' - 1) = y^2$. 3. $5x^4 + (y+4-x^5)y' = 0$.

4. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$, $M(3e, 4e)$.

5. $(2xy + y^2)dx + (2x^2 + 3xy + 4y^2)dy = 0$.

Варіант 12

1. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$. 2. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2(1 + x^2) \operatorname{tg} x + 2xy^2 = 0$.

$$3. \left(3y \cos x - \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} \sin 2x \right) dx + dy = 0.$$

$$4. \left(3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3} \right) dx + \left(\frac{x^3}{\cos^2 y} + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2} \right) dy = 0.$$

$$5. (2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$$

Варіант 13

$$1. (2x+1)y' = 4x+2y. \quad 2. 3y^2 y' - y^3 = 2e^{2x} - 1, \quad y(-1) = 3. \quad 3. yx^2(y^3 - 1) + 3y' = 0.$$

$$4. \left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y} \right) dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2} dy. \quad 5. y(1 - y \sin x) \cos^2 y dx - (y^2 + x \cos^2 y) dy = 0.$$

Варіант 14

$$1. (2x + y)dy = ydx + 4 \ln y dy. \quad 2. (1 - x^2)y' = xy(1 - 6y). \quad 3. 2y' + 3e^x y + 3e^x y^{\frac{1}{3}} = 0.$$

$$4. \left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx = \left(\frac{\sin^2 x}{y^2} - y \right) dy, \quad M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right). \quad 5. dx + (x + y^2 e^{-y})dy = 0.$$

Варіант 15

$$1. [x + 2 + (x - 1)y]dx - xdy = 0. \quad 2. y'x = 2\sqrt{y}(\ln x - \sqrt{y}), \quad y(2) = 1.$$

$$3. dx = \left[8xy + 4(y+1)x^{\frac{3}{4}} e^{y^2} \right] dy. \quad 4. \left(\sqrt{x^2 + 1} + x^2 - \ln x \right) dy + \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + 1}} + 2xy - \frac{y}{x} \right) dx = 0.$$

$$5. \left(5x^2 + \frac{2 \sin y}{x} + \frac{2}{x} \right) dx + \cos y dy = 0.$$

Варіант 16

$$1. (1 - 2xy)y' = y(y - 1), \quad y(-1) = 4. \quad 2. 2dy = [y - y^{-1}(\cos x + \sin x)]dx. \quad 3. y' = \frac{1}{x - y^2}.$$

$$4. \left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x} \right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y} \right) dy = 0. \quad 5. \frac{2}{x^3} dx + \left(\frac{1}{y^3} + \frac{12}{y} + \frac{4}{yx^2} \right) dy = 0.$$

Варіант 17

$$1. [(x - 2)y - x - 1]dx + (1 - x)dy = 0. \quad 2. xy' = x(2x - 2x^3)\sqrt{y} - 2y, \quad y(-1) = 2.$$

$$3. \frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{y} - 2x \right) dy. \quad 4. \frac{y + \sin x \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)} dx + \left[\frac{x}{\cos^2(xy)} + \sin y \right] dy = 0.$$

$$5. 2 \cos 2x dx + \left(y^3 - \frac{2 \sin 2x}{y} \right) dy = 0.$$

Варіант 18

1. $(2y - \cos x)dx + (x - 1)dy = 0$. 2. $y' \cos x - 6y^{\frac{5}{6}} + 6y \sin x = 0$. 3. $(1 - x^2)y' - 2xy^2 = xy$.
 4. $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$, $M(1,1)$. 5. $(2 - e^y \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y)dx + \left(e^y + \frac{1}{\cos^2 y} \right)dy = 0$.

Варіант 19

1. $(y - 1)dx + (2x - \ln y)dy = 0$. 2. $2x[\sqrt{x}(1 - y) - 1]dy = dx$.
 3. $dy + (xy - xy^3)dx = 0$, $y\left(\frac{1}{4}\right) = 0$.
 4. $y(x^2 + y^2 + 4)dy + x(x^2 + y^2 - 4)dx = 0$. 5. $\ln x dx + (e^{-3y} + 2x \ln x - 2x)dy = 0$.

Варіант 20

1. $(y - 1)dx + (2x - \sin 3y)dy = 0$, $y(\pi) = \frac{1}{2}$. 2. $2xy \ln x dy = (y^2 + 3 \ln x - 1)dx$.
 3. $(x - 2y^3)y' = y$. 4. $(x \ln y - x^2 + \cos y)dy + (x^3 + y \ln y - y - 2xy)dx = 0$.
 5. $\left(\frac{1}{x^2 + 1} + x + \frac{2x}{x^2 + 1} \cos y \right)dx - \sin y dy = 0$.

Варіант 21

1. $[(2x - 1)y - \cos 2x]dx + (x - 1)dy = 0$. 2. $5x^4 + (y + 4 - x^5)y' = 0$. 3. $y - y' = y^2 + xy'$.
 4. $\left(x - \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} \right)dx = \left(\frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}} - y \right)dy$, $M(0, -1)$.
 5. $(3x^2 - 3 \sin 3x)dx + (1 + x^3 \operatorname{ctg} y + \cos 3x \operatorname{ctg} y)dy = 0$.

Варіант 22

1. $y' = \frac{y}{3x - y^2}$, $y(3) = \frac{1}{2}$. 2. $\left(3y \cos x - \frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} \sin 2x \right)dx + dy = 0$. 3. $x^3 y' \sin y = xy' - 2y$.
 4. $\frac{2x - y}{x^2 + y^2}dx + \frac{2y + x}{x^2 + y^2}dy = 0$. 5. $(x - 2 \operatorname{ctg} y - 2y)dx - \operatorname{ctg}^2 y dy = 0$.

Варіант 23

1. $y dx - (2x - e^y)dy = 0$. 2. $yx^2(y^3 - 1) + 3y' = 0$. 3. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$, $y(2) = e$.
 4. $(6xy + x^2 + 3)y' + 3y^2 + 2xy + 2x = 0$. 5. $(e^x + 1)dx + \left(y^2 + \frac{e^x + x}{y \ln y} \right)dy = 0$.

Варіант 24

1. $xy' + (2x + 1)y - \sin 2x = 0$. 2. $2y' + 3e^x y + 3e^x y^{\frac{1}{3}} = 0$, $y(1) = 2e$.

3. $(2x + y)dy = ydx + 4 \ln y dy$.

4. $[\cos(x + y^2) + 3y]dx + [2y \cos(x + y^2) + 3x]dy = 0$, $M\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

5. $(x^2 y + y^2 + 2xy)dx + (x^2 + x)(x + 2y)dy = 0$.

Варіант 25

1. $(3x - 1 + xy)dx - (x + 1)dy = 0$. 2. $dx = \left[8xy + 4(y + 1)x^{\frac{3}{4}} e^{y^2} \right] dy$.

3. $x dx = (x^2 - 2y + 1)dy = 0$. 4. $(xe^y + e^x)dy + (e^y + ye^x)dx = 0$, $M(1, e)$.

5. $(2x^2 y - x)y' - x^2 y^3 + 2xy^2 + y = 0$.

Джерело: *Резо В. Л., Варга Я. В.* Диференціальні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування. – Навчальний посібник із курсу «Диференціальні рівняння», частина I. – Ужгород: 2021. – С. 44-93.

Примітки. Підкресленням позначені номери завдань, у яких задана початкова умова або точка M , через яку проходить шукана інтегральна крива (див. постановку завдань).