РІВНЯННЯ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

1. Найпростіші інтегровні типи неявних рівнянь першого порядку

Приклад 1.1. Розв'язати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:
$$x^2 y'^2 - 2xyy' = x^2 + 3y^2. \tag{1.1}$$
Розв'язання. Виразимо з рівності (1.1) y' із застосуванням відомої формули для коренів квадратного рівняння:
$$y' = \frac{2xy \pm \sqrt{4x^2y^2 + 4x^2(x^2 + 3y^2)}}{2x^2},$$
або після спрощення
$$y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{1 + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2}. \tag{1.2}$$
Це нелінійне однорідне ДР, яке можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою $y = xu(x)$, де $u(x)$ нова невідома функція. Тоді з (1.2) одержимо
$$xu' + u = \frac{xu}{x} \pm \sqrt{1 + 4\left(\frac{xu}{x}\right)^2},$$
тобто
$$xu' = \pm\sqrt{1 + 4u^2}.$$
Відокремлюємо змінні:
$$x\frac{du}{dx} = \pm\sqrt{1+4u^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{1+4u^2}} = \pm\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{u^2 + \frac{1}{4}}} = \pm\frac{2dx}{x}.$$
Після інтегрування отримаємо рівності
$$\operatorname{Arsh} 2u = 2\ln|x| + \ln|C_1|, \quad \operatorname{Arsh} 2u = -2\ln|x| + \ln|C_2|,$$
де C_1, C_2 – ненульові сталі. Виразимо з цих рівностей аргумент ареа-синуса:
$$\operatorname{Arsh} 2u = \ln|C_1x^2| \quad \Rightarrow \quad 2u = \operatorname{sh}\ln|C_1x^2| = \frac{C_1^2x^4 - 1}{2C_1x^2}; \tag{1.3}$$
$$\operatorname{Arsh} 2u = \ln|C_2x^{-2}| \quad \Rightarrow \quad 2u = \operatorname{sh}\ln|C_2x^{-2}| = \frac{C_2^2 - x^4}{2C_2x^2}. \tag{1.4}$$
Зауважимо, що для ненульових значень C_1, C_2 рівності (1.3) та (1.4) є еквівалентними, оскільки
$$\frac{C_2^2 - x^4}{2C_2x^2} = \frac{C_2^{-2}x^4 - 1}{-C_2^{-1} \cdot 2x^2},$$

тобто (1.3) отримується з (1.4) при $C_1 = -C_2^{-1}$. Тому для знаходження загального розв’язку рівняння (1.1) достатньо розглядати рівність (1.3), яку запишемо у вигляді

$$2u = \frac{C^2x^4 - 1}{2Cx^2}. \tag{1.5}$$

Виконавши обернену підстановку $u = x^{-1}y$, із (1.5) маємо:

$$2\frac{y}{x} = \frac{C^2x^4 - 1}{2Cx^2} \quad \Rightarrow \quad 4Cxy = C^2x^4 - 1,$$

звідки отримуємо загальний розв’язок ДР (1.1)

$$y = \frac{C^2x^4 - 1}{4Cx}.$$

Для дослідження рівняння (1.1) на особливі розв’язки скористаємося критерієм, викладеним у [2] (Теорема 2.2). Ввівши позначення $y' = p$, подамо рівняння (1.1) у вигляді

$$F(x, y, p) \equiv x^2p^2 - 2xyp - x^2 - 3y^2 = 0.$$

Тоді для визначення особливих розв’язків одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, p) \equiv x^2p^2 - 2xyp - x^2 - 3y^2 = 0, \\ F'_p(x, y, p) \equiv 2px^2 - 2xy = 0, \\ F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) \equiv 2xp^2 - 2yp - 2x - p(2xp + 6y) = 0, \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} x^2(p^2 - 1) - 2xyp - 3y^2 = 0, \\ x(px - y) = 0, \\ x + 4py = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Згідно з критерієм для існування особливих розв’язків усі три рівності з (1.6) мають виконуватися одночасно. У нашому випадку з третього рівняння системи одержуємо $p = -0.25xy^{-1}$, а з другого $p = yx^{-1}$ (тут принагідно зауважимо, що значення $x = 0$ не входить в область визначеності рівняння). Вимога одночасного виконання дає необхідну умову

$$-\frac{x}{4y} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad 4y^2 = -x^2.$$

Із останньої рівності очевидно випливає, що система (1.6) є несумісною, а отже, ДР (1.1) не має особливих розв’язків.

Відповідь. Загальний розв’язок: $y = \dfrac{C^2x^4 - 1}{4Cx}$. Особливих розв’язків рівняння не має.

Приклад 1.2. Розв’язати рівняння та дослідити на особливі розв’язки:

$$y = (xy' + 2y)^2. \tag{1.7}$$

Розв’язання. Із рівності (1.7) очевидно випливає, що рівняння має зміст тільки для значень $y \geq 0$, а тому його можна подати у вигляді

$$xy' + 2y = \pm\sqrt{y}$$

або

$$y' + \frac{2y}{x} = \pm\frac{\sqrt{y}}{x} \tag{1.8}$$

(значення $x = 0$ не входить в область визначеності рівняння).

Одержане ДР (1.8) є рівнянням Бернуллі при $\alpha = \frac{1}{2}$. Зінтегруємо його методом підстановки, шукаючи розв'язок у вигляді добутку двох функцій незалежної змінної x

$$y = u(x)\cdot v(x). \tag{1.9}$$

Одну з двох функцій $u(x)$, $v(x)$ можна вибрати довільним чином, а друга визначиться на підставі рівняння (1.8).

Після підстановки (1.9) у (1.8) маємо:

$$u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = \pm\frac{\sqrt{uv}}{x}$$

або

$$u'v + u\left(v' + \frac{2v}{x}\right) = \pm\frac{\sqrt{uv}}{x}. \tag{1.10}$$

Будемо вимагати, щоб в (1.10) коефіцієнт при $u(x)$ перетворився на нуль, тоді за функцію $v(x)$ можна взяти будь-який розв'язок лінійного однорідного ДР

$$v' + \frac{2v}{x} = 0.$$

наприклад, $v = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = x^{-2}$. Тоді з (1.10) для визначення функції $u(x)$ дістанемо рівняння

$$u'x^{-2} = \pm x^{-2}\sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \pm\sqrt{u},$$

звідки після відокремлення змінних і наступного інтегрування маємо:

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = \pm dx \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{u} = \pm x + C_1 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{(C_1 \pm x)^2}{4} = \frac{(x+C)^2}{4},$$

де $C = \pm C_1$ – довільна стала. Підставивши знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$ у формулу (1.9), одержимо загальний розв'язок рівняння Бернуллі (1.8)

$$y = \frac{(x+C)^2}{4x^2}.$$

Для дослідження рівняння (1.7) на особливі розв'язки подамо його у вигляді

$$F(x,y,p) \equiv y - (xp + 2y)^2 = 0,$$

де $y' = p$. Тоді для визначення особливих розв'язків одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x,y,p) \equiv y - (xp+2y)^2 = 0, \\ F'_p(x,y,p) \equiv -2x(xp+2y) = 0, \\ F'_x(x,y,p) + pF'_y(x,y,p) \equiv -2p(xp+2y) + p[1 - 4(xp+2y)] = 0, \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} y = (xp + 2y)^2, \\ x(xp + 2y) = 0, \\ p[1 - 6(xp + 2y)] = 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Згідно з критерієм для існування особливих розв'язків усі три рівності з (1.11) мають виконуватися одночасно. У нашому випадку з другого рівняння системи, враховуючи, що $x \neq 0$, одержуємо $p = -2yx^{-1}$, тоді з третього $p = 0$. Вимога одночасного виконання дає необхідну умову

$$-\frac{2y}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Отримана функція очевидно справджує перше рівняння системи (1.11), а отже, згідно з критерієм є особливим розв'язком ДР (1.7).

Відповідь. $y = \dfrac{(x+C)^2}{4x^2}$ – загальний розв'язок; $y = 0$ – особливий розв'язок.

2. Метод введення параметра

Приклад 2.1. Розв'язати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:

$$3y'^3 - xy' + 1 = 0. \tag{2.1}$$

Розв'язання. Виразимо з рівності (2.1) незалежну змінну x:

$$xy' = 3y'^3 + 1 \quad \Rightarrow \quad x = 3y'^2 + y'^{-1}. \tag{2.2}$$

Це неявне рівняння типу $x = f(y')$. Розв'яжемо його шляхом введення параметра

$$y' = p \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dy}{p}. \tag{2.3}$$

Тоді з (2.2)

$$x = 3p^2 + p^{-1} \quad \Rightarrow \quad dx = (6p - p^{-2})dp. \tag{2.4}$$

Із (2.4) з урахуванням (2.3) одержимо явне ДР першого порядку відносно невідомої функції $y(p)$:

$$\frac{dy}{p} = (6p - p^{-2})dp \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dp} = 6p^2 - p^{-1}.$$

Відокремлюємо змінні й інтегруємо:

$$dy = (6p^2 - p^{-1})dp \quad \Rightarrow \quad y = 2p^3 - \ln|p| + C, \tag{2.5}$$

де C – довільна стала. Із (2.4) та (2.5) одержуємо загальний розв'язок ДР (2.1) у параметричній формі

$$x = 3p^2 + p^{-1}, \quad y = 2p^3 - \ln|p| + C.$$

Для дослідження рівняння (2.1) на особливі розв'язки подамо його у вигляді

$$F(x, y, p) \equiv 3p^3 - xp + 1 = 0,$$

де $y' = p$. Тоді для визначення особливих розв'язків одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x,y,p) \equiv 3p^3 - xp + 1 = 0, \\ F'_p(x,y,p) \equiv 9p^2 - x = 0, \\ F'_x(x,y,p) + pF'_y(x,y,p) \equiv -p + p\cdot 0 = 0, \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} xp = 3p^3 + 1, \\ x = 9p^2, \\ p = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Згідно з критерієм для існування особливих розв'язків усі три рівності з (2.6) мають виконуватися одночасно. Із третього рівняння $p = 0$, тоді з другого $x = 0$; підстановка цих значень у перше рівняння дає хибну рівність $0 = 1$. Звідси очевидно випливає, що система (2.6) є несумісною, а отже, ДР (2.1) не має особливих розв'язків.

Зауваження. Із застосуванням критерію легко показати, що ДР типу $x = f(y')$ не мають особливих розв'язків узагалі, адже в цьому випадку $F(x,y,p) \equiv x - f(p)$, а для цієї функції система для дослідження на особливі розв'язки завжди несумісна, оскільки її третє рівняння дає хибну рівність

$$F'_x(x,y,p) + pF'_y(x,y,p) \equiv 1 + p\cdot 0 = 0.$$

Відповідь. Загальний розв'язок у параметричному вигляді: $x = 3p^2 + p^{-1}$, $y = 2p^3 - \ln|p| + C$. Особливих розв'язків рівняння не має.

Приклад 2.2. Розв'язати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:

$$y(1 + y'^2) = 2r,\ r = const. \tag{2.7}$$

Розв'язання. Для інтегрування рівняння (2.7) скористаємося методом подвійної параметризації на підставі тригонометричної тотожності

$$a\sin^2 t(1 + \mathrm{ctg}^2 t) = a.$$

Введемо параметр t згідно з формулами: $y = 2r\sin^2 t$, $y' = \mathrm{ctg}\, t$, тоді

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2r\sin 2t dt}{\mathrm{ctg}\, t} = 4r\sin^2 t dt \quad \Rightarrow \quad x = r(2t - \sin 2t) + C.$$

Отже, загальний розв'язок ДР (2.7) у параметричному вигляді

$$x = r(2t - \sin 2t) + C, \quad y = 2r\sin^2 t = r(1 - \cos 2t).$$

Поклавши в останніх рівностях $2t = \theta$, одержимо простіші формули

$$x = r(\theta - \sin\theta) + C, \quad y = r(1 - \cos\theta). \tag{2.8}$$

Якщо з рівностей (2.8) виключити параметр θ – наприклад, визначивши його з другої рівності й підставивши в першу, – то отримаємо загальний інтеграл ДР (2.7) у звичайній формі

$$x = r\arccos\frac{r - y}{r} - \sqrt{2ry - y^2} + C.$$

Для дослідження рівняння (2.7) на особливі розв'язки подамо його у вигляді

$$F(x,y,p) \equiv y(1 + p^2) - 2r = 0,$$

де $y' = p$. Тоді для визначення особливих розв'язків одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x,y,p) \equiv y(1+p^2) - 2r = 0, \\ F'_p(x,y,p) \equiv 2py = 0, \\ F'_x(x,y,p) + pF'_y(x,y,p) \equiv 0 + p\cdot(1+p^2) = 0, \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} y(1+p^2) = 2r, \\ py = 0, \\ p(1+p^2) = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Згідно з критерієм для існування особливих розв’язків усі три рівності з (2.9) мають виконуватися одночасно. Із третього рівняння $p=0$, тоді друге рівняння справджується автоматично, а з першого дістанемо $y=2r$. Ця функція очевидно є розв’язком ДР (2.7), і згідно з критерієм цей розв’язок є особливим.

Відповідь. Загальний інтеграл: $x = r\arccos\dfrac{r-y}{r} - \sqrt{2ry-y^2} + C$; особливий розв’язок: $y=2r$.

Приклад 2.3. Розв’язати рівняння та дослідити на особливі розв’язки:

$$y'^2 - yy' + \mathrm{e}^x = 0. \tag{2.10}$$

Розв’язання. Виразимо з рівності (2.10) незалежну змінну y:

$$yy' = y'^2 + \mathrm{e}^x \quad\Rightarrow\quad y = y' + \mathrm{e}^x\cdot y'^{-1}. \tag{2.11}$$

Це неявне рівняння типу $y = f(x,y')$. Розв’яжемо його шляхом введення параметра

$$y' = p \quad\Rightarrow\quad dy = pdx. \tag{2.12}$$

Тоді з (2.11)

$$y = p + \mathrm{e}^x\cdot p^{-1} \quad\Rightarrow\quad dy = \mathrm{e}^x\cdot p^{-1}dx + (1-\mathrm{e}^x\cdot p^{-2})dp. \tag{2.13}$$

Із (2.13) з урахуванням (2.12) одержимо явне ДР першого порядку відносно невідомої функції $x(p)$:

$$pdx = \mathrm{e}^x\cdot p^{-1}dx + (1-\mathrm{e}^x\cdot p^{-2})dp \quad\Rightarrow\quad p\left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{p^2}\right)dx = \left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{p^2}\right)dp. \tag{2.14}$$

1. Якщо $\mathrm{e}^x \ne p^2$, то після скорочення і відокремлення змінних із (2.14) маємо:

$$pdx = dp \quad\Rightarrow\quad dx = \frac{dp}{p} \quad\Rightarrow\quad x = \ln|p| + \ln|C| = \ln|Cp|,$$

звідки $\mathrm{e}^x = Cp$, а тоді з (2.13) $y = p + Cp\cdot p^{-1} = p + C$. Отже, загальний розв’язок ДР (2.10) у параметричній формі

$$x = \ln|Cp|,\quad y = p + C,\quad C \ne 0.$$

Виключивши з останніх рівностей параметр p, одержимо загальний розв’язок ДР (2.10) у звичайній формі

$$y = \frac{\mathrm{e}^x}{C} + C.$$

2. Розглянемо випадок, коли у (2.14) $\mathrm{e}^x = p^2$, тобто $p = \pm \mathrm{e}^{0,5x}$. Підставивши це значення в (2.13), одержимо функції
$$y = \pm 2\mathrm{e}^{0,5x}. \tag{2.15}$$
Ці функції є розв'язками ДР (2.10), у чому можна переконатися безпосередньою підстановкою. Покажемо, що ці розв'язки є особливими. Для цього проведемо дослідження рівняння (2.10) на особливі розв'язки, подавши його у вигляді
$$F(x, y, p) \equiv p^2 - yp + \mathrm{e}^x = 0,$$
де $y' = p$. Для визначення особливих розв'язків аналогічно до попередніх прикладів одержимо систему рівнянь
$$\begin{cases} F(x, y, p) \equiv p^2 - yp + \mathrm{e}^x = 0, \\ F'_p(x, y, p) \equiv 2p - y = 0, \\ F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) \equiv \mathrm{e}^x - p^2 = 0, \end{cases}$$
або після спрощення
$$\begin{cases} p^2 - yp + \mathrm{e}^x = 0, \\ y = 2p, \\ \mathrm{e}^x = p^2. \end{cases} \tag{2.16}$$
Згідно з критерієм для існування особливих розв'язків усі три рівності з (2.16) мають виконуватися одночасно. Із третього рівняння $p = \pm \mathrm{e}^{0,5x}$, тоді з другого $y = \pm 2\mathrm{e}^{0,5x}$, і за цих значень перше рівняння перетворюється на тотожність. Отже, функції (2.15) є особливими розв'язками ДР (2.16).

Відповідь. Загальний розв'язок: $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{C} + C$, $C \neq 0$; особливі розв'язки: $y = \pm 2\mathrm{e}^{0,5x}$.

3. Рівняння Лаґранжа та Клеро

Приклад 3.1. Розв'язати рівняння Лаґранжа:
$$y = 2xy' - 5y'^2. \tag{3.1}$$
Розв'язання. Рівняння Лаґранжа є частинним випадком неявного рівняння типу $y = f(x, y')$. Розв'яжемо його шляхом введення параметра
$$y' = p \quad \Rightarrow \quad dy = pdx. \tag{3.2}$$
Тоді з (3.1)
$$y = 2xp - 5p^2 \quad \Rightarrow \quad dy = 2p\,dx + (2x - 10p)dp. \tag{3.3}$$
Із (3.3) з урахуванням (3.2) одержимо лінійне неоднорідне ДР першого порядку відносно невідомої функції $x(p)$:
$$pdx = 2pdx + (2x - 10p)dp \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = 10. \tag{3.4}$$
1. Розв'яжемо рівняння (3.4) методом Лаґранжа, вважаючи $p \neq 0$. Для цього спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного до (3.4) однорідного рівняння, яке інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2x}{p}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x}=-\frac{2dp}{p},$$

звідки

$$x_{з.о.}=Cp^{-2}, \quad C=const. \tag{3.5}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.4) будемо шукати у вигляді (3.5), вважаючи сталу C функцією незалежної змінної p:

$$x=C(p)\cdot p^{-2}. \tag{3.6}$$

Функцію $C(p)$ знайдемо безпосередньою підстановкою (3.6) у (3.4):

$$C'(p)\cdot p^{-2}-2C(p)\cdot p^{-3}+2C(p)p^{-3}=10,$$

звідки

$$C'(p)=10p^2 \quad \Rightarrow \quad C(p)=\frac{10p^3}{3}+C_1,$$

де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдений вираз для $C(p)$ у (3.6) і перепозначивши задля зручності $C_1=C$, одержимо шуканий загальний розв'язок ЛНДР (3.4)

$$x=\left(\frac{10p^3}{3}+C\right)\cdot p^{-2}=\frac{10p}{3}+\frac{C}{p^2},$$

а тоді з (3.3) $y=2xp-5p^2=\frac{2C}{p}+\frac{5p^2}{3}$. Отже, загальний розв'язок ДР (3.1) у параметричній формі

$$x=\frac{10p}{3}+\frac{C}{p^2}, \quad y=\frac{2C}{p}+\frac{5p^2}{3}.$$

2. Розглянемо окремо випадок, коли $p=0$. За цього значення параметра із (3.3) одержимо функцію $y=0$, яка очевидно є розв'язком ДР (3.1). Щоб переконатися, чи буде цей розв'язок особливим, проведемо дослідження рівняння (3.1) на особливі розв'язки, подавши його у вигляді

$$F(x,y,p)\equiv y-2xp+5p^2=0,$$

де $y'=p$. Для визначення особливих розв'язків аналогічно до попередніх прикладів одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x,y,p)\equiv y-2xp+5p^2=0, \\ F'_p(x,y,p)\equiv -2x+10p=0, \\ F'_x(x,y,p)+pF'_y(x,y,p)\equiv -2p+p\cdot 1=0, \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} y=2xp-5p^2, \\ x=5p, \\ p=0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Згідно з критерієм для існування особливих розв'язків усі три рівності з (3.7) мають виконуватися одночасно. Із третього рівняння $p=0$, тоді з другого $x=0$, і за цих значень перше рівняння перетворюється в тотожність при $y=0$. Отже, функція $y=0$ є особливим розв'язком ДР (3.1).

Відповідь. Загальний розв'язок у параметричній формі: $x=\dfrac{10p}{3}+\dfrac{C}{p^2}$, $y=\dfrac{2C}{p}+\dfrac{5p^2}{3}$;

особливий розв'язок: $y=0$.

Приклад 3.2. Розв'язати рівняння Лаґранжа:

$$y=xy'^2+y'^3. \tag{3.8}$$

Розв'язання. Введемо параметр за формулами (3.2). Тоді з (3.8)

$$y=xp^2+p^3 \quad \Rightarrow \quad dy=p^2\,dx+(2px+3p^2)dp. \tag{3.9}$$

Із (3.9) з урахуванням (3.2) одержимо лінійне неоднорідне ДР першого порядку відносно невідомої функції $x(p)$:

$$pdx=p^2dx+(2px+3p^2)dp \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dp}+\frac{2x}{p-1}=-\frac{3p}{p-1}. \tag{3.10}$$

1. Розв'яжемо рівняння (3.10) методом Лаґранжа, вважаючи коефіцієнт при dx, на який виконувалося ділення, $p-p^2\neq 0$. Для цього спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного до (3.10) однорідного рівняння, яке інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2x}{p-1}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x}=-\frac{2dp}{p-1},$$

звідки

$$x_{з.о.}=C(p-1)^{-2}, \quad C=const. \tag{3.11}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.10) будемо шукати у вигляді (3.11), вважаючи сталу C функцією незалежної змінної p:

$$x=C(p)\cdot(p-1)^{-2}. \tag{3.12}$$

Функцію $C(p)$ знайдемо безпосередньою підстановкою (3.12) у (3.10):

$$C'(p)\cdot(p-1)^{-2}-2C(p)\cdot(p-1)^{-3}+2C(p)(p-1)^{-3}=-3p(p-1)^{-1},$$

звідки

$$C'(p)=-3p(p-1) \quad \Rightarrow \quad C(p)=\frac{3p^2}{2}-p^3+C_1,$$

де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдений вираз для $C(p)$ у (3.12), одержимо шуканий загальний розв'язок ЛНДР (3.10)

$$x=\left(\frac{3p^2}{2}-p^3+C_1\right)\cdot(p-1)^{-2}=\frac{3p^2-2p^3+2C_1}{2(p-1)^2},$$

а тоді з (3.9) $y=xp^2+p^3=\dfrac{2p^3-p^4+2C_1p^2}{2(p-1)^2}$. Отже, загальний розв'язок ДР (3.8) у параметричній формі

$$x=\frac{3p^2-2p^3+C}{2(p-1)^2}, \quad y=\frac{2p^3-p^4+Cp^2}{2(p-1)^2},$$

де $C = 2C_1$.

2. Розглянемо окремо випадок, коли $p - p^2 = 0$, тобто $p = 0$ або $p = 1$. За цих значень параметра із (3.9) одержимо відповідно функції $y = 0$ та $y = x + 1$, які очевидно є розв'язками ДР (3.8). Щоб переконатися, чи будуть ці розв'язки особливими, проведемо дослідження рівняння (3.8) на особливі розв'язки, подавши його у вигляді

$$F(x, y, p) \equiv y - xp^2 - p^3 = 0,$$

де $y' = p$. Для визначення особливих розв'язків аналогічно до попередніх прикладів одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, p) \equiv y - xp^2 - p^3 = 0, \\ F'_p(x, y, p) \equiv -2xp - 3p^2 = 0, \\ F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) \equiv -p^2 + p \cdot 1 = 0, \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} y = xp^2 + p^3, \\ xp = -1{,}5\,p^2, \\ p(p-1) = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Згідно з критерієм для існування особливих розв'язків усі три рівності з (3.13) мають виконуватися одночасно. Якщо в третьому рівнянні $p = 0$, тоді друге виконується автоматично, а перше перетворюється в тотожність при $y = 0$ – а отже, остання функція є особливим розв'язком ДР (3.8). Якщо ж у третьому рівнянні $p = 1$, то з другого маємо $x = -\frac{3}{2}$; тоді з першого виходить $y = -\frac{1}{2}$, однак ця функція не є розв'язком ДР (3.8). Таким чином, при $p = 1$ система (3.13) несумісна, тож пряма $y = x + 1$ є не особливим розв'язком, але асимптотою.

Відповідь. Розв'язки: $x = \dfrac{3p^2 - 2p^3 + C}{2(p-1)^2}$, $y = \dfrac{2p^3 - p^4 + Cp^2}{2(p-1)^2}$, $y = x + 1$; особливий розв'язок: $y = 0$.

Приклад 3.3. Розв'язати рівняння Клеро:

$$y = xy' + 2y'^2. \tag{3.14}$$

Розв'язання. Введемо параметр за формулами (3.2). Тоді з (3.14)

$$y = xp + 2p^2 \quad \Rightarrow \quad dy = p\,dx + (x + 4p)dp. \tag{3.15}$$

Із (3.15) з урахуванням (3.2) одержимо:

$$pdx = pdx + (x + 4p)dp \quad \Rightarrow \quad (x + 4p)dp = 0. \tag{3.16}$$

Згідно з властивостями рівняння Клеро рівність (3.16) розпадається на два рівняння, одне з яких визначає загальний, а друге – особливий розв'язки цього типу неявних ДР першого порядку, тож у цьому випадку ніяких додаткових досліджень проводити не потрібно.

Знайдемо спочатку загальний розв'язок із рівності $dp = 0$ з урахуванням (3.15):

$$dp = 0 \quad \Rightarrow \quad p = C \quad \Rightarrow \quad y = Cx + 2C^2.$$

Особливий розв'язок знаходиться з рівності $x+4p=0$ так само з урахуванням (3.15):

$$x+4p=0 \quad \Rightarrow \quad p=-\frac{x}{4} \quad \Rightarrow \quad y=-x\cdot\frac{x}{4}+2\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^2=-\frac{x^2}{8}.$$

Зауважимо, що отримана парабола є обвідною сім'ї прямих, визначених формулою загального розв'язку.

Відповідь. Загальний розв'язок: $y=Cx+2C^2$; особливий розв'язок: $y=-\frac{x^2}{8}$.

Приклад 3.4. Розв'язати рівняння Клеро:

$$y-xy'=\sqrt{1+y'^2}\,. \tag{3.17}$$

Розв'язання. Введемо параметр за формулами (3.2). Тоді з (3.17)

$$y=xp+\sqrt{1+p^2} \quad \Rightarrow \quad dy=p\,dx+\left(x+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)dp\,. \tag{3.18}$$

Із (3.18) з урахуванням (3.2) одержимо:

$$pdx=pdx+\left(x+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)dp \quad \Rightarrow \quad \left(x+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)dp=0\,. \tag{3.19}$$

Аналогічно до Прикладу 3.3 знайдемо спочатку загальний розв'язок із рівності $dp=0$ з урахуванням (3.18):

$$dp=0 \quad \Rightarrow \quad p=C \quad \Rightarrow \quad y=Cx+\sqrt{1+C^2}\,.$$

Далі знаходимо особливий розв'язок:

$$x+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \quad \Rightarrow \quad y=-p\cdot\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}+\sqrt{1+p^2}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Отже, особливий розв'язок у параметричній формі

$$x=-\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad y=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,.$$

Виключивши з останніх рівностей параметр p, дістанемо особливий інтеграл рівняння Клеро (3.17) у звичайному вигляді:

$$x^2+y^2=1\,.$$

Відповідь. Загальний розв'язок: $y=Cx+\sqrt{1+C^2}$; особливий інтеграл: $x^2+y^2=1$.

Примітка. Необхідні теоретичні відомості по темах розділу:

[1] *Маринець К. В.* Диференціальні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування. – Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння», частина I. – Ужгород: «Говерла», 2015. – С. 66-81.
[2] Лекції до Модуля 2 – Неявні рівняння першого порядку.